



普通高等教育“十二五”规划教材

地下水流数值模拟基础

杜新强 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn



普通高等教育“十二五”规划教材

地下水流数值模拟基础

杜新强 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本着通俗易懂的原则,本书讲述地下水数值模拟方法中有限差分法、有限单元法的基本原理与实践应用练习。

绪言部分主要讲述水文地质定量评价方法的发展阶段以及地下水数值模型的特点;第1章着重回顾地下水渗流理论的基本公式及其水文地质学意义;第2章主要讲解有限差分法基本原理;第3章着重讲述有限单元法的基本原理;第4章主要讲述地下水数值模拟的应用步骤以及地下水数值模拟反演方法的基础理论;第5章主要通过实例完成地下水数值模拟应用的实践练习,达到学以致用目的。

本书适用于水文与水资源工程专业、地下水科学与工程本科专业本科生教学、自学的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

地下水流数值模拟基础 / 杜新强编著. — 北京 :
中国水利水电出版社, 2014.9
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-2584-9

I. ①地… II. ①杜… III. ①地下水—数值模拟—高等学校—教材 IV. ①P641.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第228389号

书 名	普通高等教育“十二五”规划教材 地下水流数值模拟基础
作 者	杜新强 编著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (发行部)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 6.75印张 160千字
版 次	2014年9月第1版 2014年9月第1次印刷
印 数	0001—2000册
定 价	15.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前言

地下水数值计算方法作为现代水文地质定量评价的最重要技术手段之一，在生产和科学研究领域发挥着不可或缺的作用。但对于本科教学而言，合适的地下水数值模拟教材相对比较少，目前的地下水数值计算方法的教材多在数学理论与计算方法方面作比较深入、全面的阐述，使数学基础相对薄弱的群体难以理解和接受。因此，为本科教学需要，作者在多年讲授地下水数值模拟课程的基础上，特编著成此书。

本教材着重讲述地下水数值计算的基本原理以及基本计算思路与方法，并尽量将公式推导过程中的水文地质意义作出阐述，使初学者易于理解和掌握，并为深入研究和应用地下水数值计算奠定一定的基础。本教材简明易懂、易于运用，适用于初学者以及自学者。书中第5章所用的练习数据，如有需要可进入“地下水数值模拟基础”QQ群（160558970）下载。本教材的出版受到吉林大学“十二五”规划教材项目的资助。

本教材所阐述的是地下水数值计算理论与方法的基础知识，在系统性和理论深度上均有不足之处，期待本教材的使用者对教材内容提出宝贵意见，并请发送到作者邮箱 duxq@jlu.edu.cn，作者拟在本版基础上继续修改、完善教材内容，适时再版。

编者

2014年6月

目 录

前言

绪言	1
0.1 数值计算方法概述	1
0.1.1 数值计算的重要意义	1
0.1.2 数值计算方法的涵义	2
0.1.3 数值计算的理论基础	2
0.2 地下水模型类型及其简介	3
0.2.1 数学模型	3
0.2.1.1 解析法	3
0.2.1.2 数值法	6
0.2.2 物理模型	6
0.2.3 相似模型	6
0.2.4 地下水数值计算的特点	8
第1章 渗流理论基础	10
1.1 达西定律	10
1.2 渗流连续性方程	11
1.3 承压水非稳定运动的基本微分方程	12
1.4 潜水非稳定运动的基本微分方程	13
1.5 定解条件	13
1.5.1 边界条件	13
1.5.2 初始条件	15
1.6 数学模型	15
第2章 有限差分法	17
2.1 离散化方法	17
2.2 有限差分法	19
2.2.1 有限差分法的基本思想	19
2.2.2 基本原理	19
2.3 承压二维非稳定流差分方程及其求解	21
2.3.1 数学模型	21
2.3.2 时空离散	21
2.3.3 数学角度建立差分方程	23

2.3.3.1	微分方程的离散	23
2.3.3.2	定解条件离散	26
2.3.4	从水量均衡角度建立差分方程	27
2.4	差分方程的解法	28
2.4.1	显式差分格式	28
2.4.1.1	概念	28
2.4.1.2	求解过程	28
2.4.1.3	解的收敛与稳定	28
2.4.2	隐式差分格式	29
2.4.2.1	概念	29
2.4.2.2	求解方法——迭代法	29
2.4.3	算法举例	31
2.4.4	简单计算实例	32
2.5	潜水二维非稳定流差分方程及其解法	34
2.5.1	线性化方法	35
2.5.2	求解方法	35
第3章	有限单元法	36
3.1	有限单元法简介	36
3.2	剩余加权法	37
3.3	剖分插值法构造基函数	38
3.4	承压二维非稳定流迦辽金有限单元方程及其解法	42
3.4.1	构造迦辽金有限单元方程	42
3.4.2	将常微分方程转化为线性代数方程组	45
3.4.3	各种系数矩阵的形成	47
3.4.4	系数矩阵计算举例	49
3.5	方程的解法	54
3.5.1	迭代法	54
3.5.2	LU 分解法	56
3.5.2.1	非对称矩阵的 Choleski 分解法	56
3.5.2.2	对称矩阵的 Choleski 分解法	59
3.6	潜水二维非稳定流迦辽金有限单元方程	60
3.6.1	数学模型	60
3.6.2	潜水有限元方程	60
第4章	地下水数值模拟应用基础	63
4.1	地下水数值模拟的一般步骤	63
4.1.1	建立水文地质概念模型	63
4.1.2	建立数学模型	64
4.1.3	选择模拟程序	64
4.1.4	时空剖分原则	65
4.1.5	数据整理与输入	66
4.1.6	模型校正(识别)	66

4.1.7 模型验证	67
4.1.8 模型预测	67
4.1.9 模型后续检验与修正	68
4.2 地下水数值模型反演问题介绍	68
4.2.1 反演问题的一些基本概念	68
4.2.1.1 反演问题的必要性	68
4.2.1.2 模型参数	69
4.2.1.3 反演问题的适定性	69
4.2.2 反演方法	70
第5章 地下水数值模拟应用练习	71
5.1 有限差分法练习	71
5.1.1 研究区介绍	71
5.1.1.1 自然地理条件	71
5.1.1.2 区域地质概况	72
5.1.1.3 区域水文地质概况	72
5.1.1.4 水文地质概念模型	74
5.1.1.5 数学模型	75
5.1.2 高程数据的准备——Surfer 制作等值线练习	75
5.1.2.1 观测点分布图	75
5.1.2.2 初始地下水位分布图	76
5.1.2.3 其他高程文件	78
5.1.3 非稳定地下水流动问题有限差分法练习	78
5.1.3.1 模拟软件简介——Visual MODFLOW	78
5.1.3.2 创建地下水数值模拟识别模型	79
5.1.3.3 模型验证	93
5.1.3.4 模型预报	93
5.2 非稳定地下水流动问题有限单元法练习	93
5.2.1 软件简介——FEFLOW	93
5.2.2 FEFLOW 基本建模过程练习	93
5.2.2.1 模型离散	94
5.2.2.2 定义模型维数和层面参考高程	94
5.2.2.3 编辑模型属性数据	95
5.2.2.4 模型运行与结果显示	100
参考文献	102

绪 言

0.1 数值计算方法概述

0.1.1 数值计算的重要意义

17 世纪是数学发展史上一个划时代的时期, 当我们今天享受着高科技成果所带来的各种便利条件时, 应该意识到笛卡尔 (Descartes, 1596—1650) 和牛顿 (Newton, 1642—1727) 这两位卓越先驱人物所作出的具有划时代意义的贡献。

首先, 笛卡尔创立了平面解析几何, 使我们能够用数学形式描述动态变化着的客观对象, 接下来牛顿和莱布尼兹 (Leibniz) 等人创立了微积分学, 为我们研究连续变量的变化规律给出了完整的方法体系。随后, 又在这个基础上产生了更多的数学分支以及相关的一些交叉学科分支。

由于数学研究的范围在不断扩大, 而且研究的对象更为复杂, 一个伴随的问题就是相应的数值计算更加困难。如果不解决与理论方法平行的数值计算问题, 再好的数学理论也难以发挥应有的作用。

【例 0.1】 解线性方程组 $Ax=b$, $x \in R^n$, A 为 n 阶可逆方阵, 用著名的 Cramer 法则求解, 行列式的计算按原始的方法计算, 假设计算机每秒可算 1 亿次乘法运算, 我们来估计机器所花的时间。

Cramer 法则告诉我们线性代数方程组有解的充分必要条件以及如何求解。

计算一个行列式所需要的乘法数共 $n!$ 项, 每项 n 个数相乘, 故共需 $n!(n-1)$ 次乘法; 完成计算的乘法数共 $n+1$ 个行列式, 故共需 $(n^2-1)n!$ 次乘法。

行列式: 将每一行、每一列在每一次都取一个数相乘, 得到的结果再相加。

当 $n=10$ 时, 需要 3592561200 (次) ≈ 3.59251 (s)

当 $n=100$ 时, 需 9.33169×10^{161} (次) $\approx 9.33169 \times 10^{153}$ (s) $\approx 2.95906 \times 10^{146}$ (年)

因此, 当 n 较大时, 采用该方法进行计算是不可行的。

这表示在相应的计算机生产工艺条件下, 一个好的数学方法 (公式) 未必是一个有效的计算方法。而方法的有效性将直接影响到计算的效率, 我们的任务就是要构造有效的数值计算方法。

【例 0.2】 设多项式为 $p(x) = (x-2)^9$, 我们来计算其在区间 $[1.92, 2.08]$ 上的值。

令: $p(x) = (x-2)^9$

$$q(x) = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$$

图 0.1.1 分别展示了两个算式的不同计算机模拟结果, 由此可见: 即使数学上的恒等公式, 用计算机来计算, 结果也是不一样的。

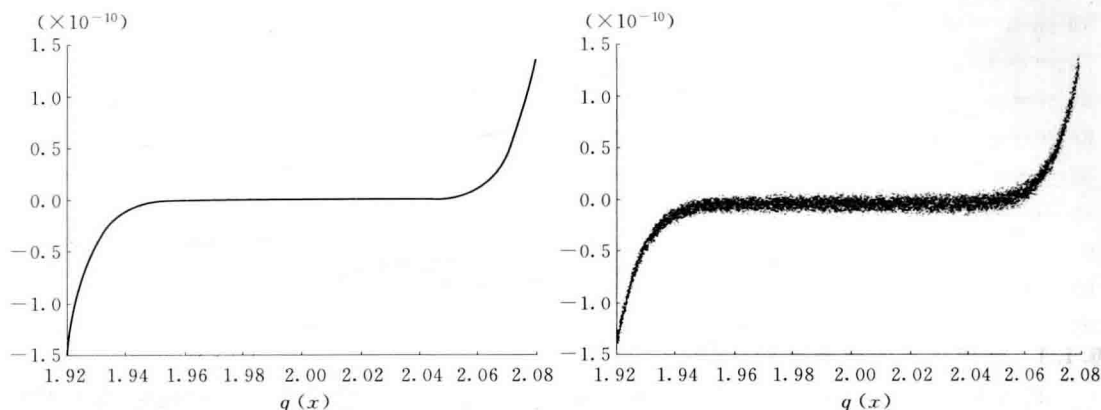


图 0.1.1 不同计算方法结果对比

科学的计算方法与实验理论相辅相成,已成为第三种科学方法,而不仅仅是数学或计算机学科的一个部分。数值计算的重要性表现在两方面:一方面促进了计算方法的研究,另一方面也促进了计算工具的发展。随着 20 世纪 40 年代中期人类第一台电子数字计算机的问世,数值计算终于有了理想的支撑工具。

坚实的数学理论、科学的计算方法以及先进的计算工具的有机结合,为我们打造了一个无比坚实的工作平台。完全可以这么讲,今天几乎所有的高科技成果都是在这个平台上产生的。正是因为有了这样一个平台,使得我们这个时代的科学技术能够飞速发展。

0.1.2 数值计算方法的涵义

数值计算方法,过去有不少人称之为数值分析,现在更多的人称之为科学计算,其核心思想就是通过有限步的加、减、乘、除四则运算得到某个连续变量的近似值。追根溯源,它是微积分学孕育出来的一个数学分支。

0.1.3 数值计算的理论基础

极限理论和泰勒级数展开式为近似计算提供了理论基础。

(1) 极限理论。

如果一个无限序列 $\{x_n\}$ 收敛于某个极限值 x^* ,那么可用这个序列中的某个元素 x_N 作为 x^* 的近似值。只要序号 N 取得足够大,那么 x_N 与 x^* 的差值 $|x_N - x^*|$ 就不会超过某个预先给定的充分小的正数 ϵ 。

(2) 泰勒级数展开式。

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数,则在该邻域内 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \quad (0.1.1)$$

它可以把某个充分光滑的实函数 $f(x)$ 表示为一个项数为无限多的多项式,再利用极限理论,用这个多项式的前 n 项 (n 足够大) 近似表示 $f(x)$ (所得的误差足够小,满足精度要求),从而可以通过有限步四则运算得到 $f(x)$ 的近似值。

0.2 地下水模型类型及其简介

马克思曾说过：任何一门学科只有充分利用了数学，才能够达到完美的境界。水文地质学的萌芽时期是从人类开始有意识地利用地下水开始（大约 5700 年前）一直持续到 1856 年，在这漫长的历史时期内，水文地质学一直处于定性研究阶段，以 1856 年达西定律的出现为标志，水文地质学开始发展到定量研究阶段，才成为一门真正的科学登上历史舞台，而地下水模型则成为解决各种水文地质问题的最重要手段。

地下水模型（Groundwater models）是用于分析和预测不同条件下局部或区域地下水系统行为的数学和数字化工具。地下水模型有多种分类方法，比如：按含水层类型分为承压含水层模型、非承压含水层模型以及半承压含水层模型；按水流条件（Flow condition）分为饱和地下水流模型、非饱和地下水流模型以及溶质运移模型；而从研究手段上则可分为物理模型（Physical model），相似模型（Analog model）和数学模型（Mathematical model）。

0.2.1 数学模型

0.2.1.1 解析法

（1）达西公式（1856 年，法国，Henry Darcy）。

达西（Henri Philibert Gaspard Darcy, 1803. 6. 10—1858. 1. 3）是法国杰出的工程师和著名的水力学家，是现代毕托管（Pitot pipe）的发明者，他提出了管流阻力方程，并在明渠流研究领域卓有建树。他最卓越的贡献，是在 1839～1840 年设计并主持建造了法国第戎（Dijon）的城市供水系统，从 12.7km 外的 Rosoir Spring 输水到城市附近的水库，供给 28000m 的城市输水管道。这个全封闭的供水系统可在重力驱动下完成自流供水，不需要水泵加压或提水，并且只采用砂过滤的方式进行水质处理，这是他研究水在多孔介质中运动的现实基础和驱动因素。1856 年，Darcy 在经过大量的试验后，发表了他对多孔介质中水流运动规律的研究成果，即著名的达西定律。达西定律奠定了地下水定量评价的基础，开启了水文地质学迅速发展的全新时代。



达西

达西定律的数学表达式和电学中的欧姆定律以及固体介质中的热传导定律是一致的，反映了 3 种运动形式的内在共性：

$$Q = KI\omega \text{ 或 } V = KI \quad (0.2.1)$$

式中：Q 为流量；K 为介质渗透系数；I 为水力梯度（无量纲）； ω 为过水断面面积；V 为渗流速度。

（2）裘布依稳定井流公式（1863 年，法国，Jules Dupuit）。

裘布依（Jules Dupuit, 1804. 5. 18—1866. 9. 5）生于意大利福萨诺（Fossano），10 岁时移民法国，是法国著名的土木工程学家，在水力学中曾有多方面贡献，曾担任法国桥梁公路局的总督察，是达西的同事与朋友，擅长理论推导。甚至有资料显示，他在 1854



裘布依

年时已从理论上预测了达西定律的基本规律，但裘布依仍在其专著的前言中明确指出“达西的实验超过了所有的前人”，体现了严谨、谦逊的学者风范（沧浪，1983）。裘布依以达西定律为基础，提出了著名的裘布依假设，并在此基础上推导出了地下水单向及平面径向稳定井流公式，描绘了特定条件下的地下水运动状态，成为水文地质学发展史上又一个重要里程碑。

裘布依假设：①含水层是均质、各向同性、等厚、水平的；②地下水为层流，符合达西定律，地下水运动处于稳定状态；③静水位是水平的，抽水井具有圆柱形定水头补给边界；④对于承压水，顶底板是完全隔水的，对于潜水，井边水力坡度不大于 $1/4$ ，底板完全隔水。

承压水稳定井流公式：

$$S_w = H_0 - H_w = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r_w} \quad (0.2.2)$$

潜水稳定井流公式：

$$H_0^2 - h_w^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{R}{r_w} \quad (0.2.3)$$

式中： S_w 为井中水位降深； Q 为抽水流量； R 为水力影响半径； r_w 为井径； H_0 为初始地下水位； H_w 为井中地下水位。

裘布依公式出现之后的很长一段时间，地下水水力学虽有一定程度的发展，但总是没有超出稳定流理论的范围。

地下水稳定流理论的应用有很大的局限性，最大的缺陷在于：稳定流理论所描绘的，仅仅是在一定条件下，地下水的运动经过很长时间所达到的一种平衡状态，这种平衡状态不随时间变化。而实际的地下水运动状态却是不断变化的。因而，稳定流理论的应用就只能局限于在某些特定条件下解释地下水运动的状态，而不能说明从一个状态到另一个状态之间的整个发展过程。

裘布依公式的出现，对当时地下水水力学的发展起了重要作用，直到今天仍有一定的实用价值。稳定流公式目前主要适用于具有两个定水头边界的条件，如岛状含水层、河边抽水井等，在上述条件下，经过较长时间的抽水，稳定流状态是比较容易达到和维持的。

如果说，当地下水开发利用规模与地下水天然补给量相比很小的时候，还可以近似地符合稳定流理念，而当开发规模越来越大，地下水位年复一年地发生明显的持续性下降时，就要求有新的理论来解释地下水动态的变化过程，非稳定流理论的出现则成为学科发展与生产实践中的必然。

(3) 泰斯非稳定井流公式（1935年，美国，C. V. Theis）。

在地下水稳定流理论出现之前，在经典物理学中就已提出了电流和热传导等方面的非稳定运动理论问题。地下水非稳定流理论的出现，比其他学科的相应理论要晚一个多世

纪,这主要是由于地下水的开发规模,还不足以对地下水动态造成引人注目的变化,而将其近似等同于稳定状态,满足于以裘布依公式为代表的稳定流理论。

达西定律和裘布依公式是在法国提出的,有关热传导的数学理论也是法国人福里哀早在达西定律出现以前就建立了的,但地下水非稳定流理论出自美国。这是由于法国地表水资源比较丰富,地下水开发量不大,因而长期停留在裘布依公式的水平上;而美国由于有大片干旱半干旱地区,加上社会经济发展迅速,一段时期内对地下水资源需要量增长较快,地下水资源开发利用程度的提高促进了非稳定流理论的发生和发展。恩格斯曾经精辟地提出:“社会一旦有技术上的需要,则这种需要就会比10所大学更能把科学推向前进。”

在地下水非稳定流理论的发展过程中,首先是温策尔(L. K. Wenzel)等人在美国内布拉斯加州进行抽水试验对蒂姆公式(Thiem equation)进行验证时,发现了一系列地下水作非稳定运动的现象,提出了可以根据地下水降落漏斗发展过程计算含水层给水度的思想;迈因策尔(O. E. Oscar Edward Meinzer, 1876—1948)根据大量长期观测资料,在1928年撰文认为:承压含水层是可压缩而且是有弹性的,在分布宽广的承压含水层中抽水的过程,也是不断消耗贮存量的过程,并以美国达科他(Dakota)砂岩中几十年抽水的实际材料证明了这一点。

温策尔、迈因策尔等人的文章表明,早在20世纪30年代初期,由于开发利用地下水规模的扩大,已经为潜水和承压含水层中的地下水非稳定流理论准备了丰富的实践基础。而固体中热传导理论的发展又为非稳定流理论准备了现成的数学工具。1935年美国人泰斯(Charles Vernon Theis, 1900. 3. 27—1987. 7. 31)利用了迈因策尔、温策尔等人的实际材料和观点,在数学家卢宾(C. I. Lubin)的帮助下,利用热传导理论中现成的公式加以适当改造,第一次提出了实用的地下水径向非稳定流公式,即泰斯公式:

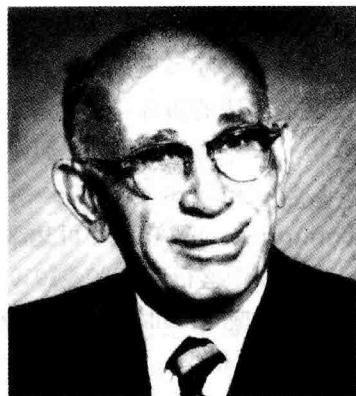
$$S = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{1}{y} e^{-y} dy = \frac{Q}{4\pi T} W(u); u = \frac{r^2 \mu^*}{4Tt} \quad (0.2.4)$$

泰斯公式出现5年后,雅各布(Jacob)参照热传导理论中的方法,建立了地下水运动的基本微分方程,并系统阐明了承压含水层贮水系数的构成。

非稳定流理论问世以来,地下水运动问题的解析法有了很大发展,建立了一系列的方程、公式和图表,并被广泛应用到生产实践中去。它不仅推动了地下水理论的发展,还解决了大量的生产实际问题。

解析法的缺点:在确立定解问题时,需要对地质、水文地质条件进行大量的简化,一般来说,它只适用于含水层几何形状简单,并且是均质、各向同性的情形,而实际水文地质条件往往十分复杂,建立符合实际条件的复杂的数学公式,其解析解的求取则相当困难,很多

模型在当前条件下甚至是不可能得到结果的;而如果勉强应用解析法,常常需要大量简化水文地质条件,这样得到的结果,可能与实际情况相差较大。



泰斯

0.2.1.2 数值法

根据一定的数学模型在计算机上用数值法模拟地下水的运动状态便称为地下水数值模拟。

对数学模型求其数值解的思想早在 20 世纪 40~50 年代就已出现,然而由于计算量过大,以至于没有数字计算机哪怕是解一个最简单的问题所需要的时间也是惊人的。因而,这个方法的普及依赖于数字计算机的发展。

Terwilliger 等 (1951) 用数字方法及穿孔卡设备,采用数值方法对油储重力疏干所遇到的二相流问题进行了求解尝试,其后,油储问题的数值计算方法得到了较大发展,直到 1956 年,斯图尔曼 (R. W. Stallman) 才将数值模拟应用于水文地质计算,并提出了一种用对承压面进行数值分析以确定含水层渗透系数的方法。20 世纪 60 年代以来,随着计算机技术的迅速发展,数值方法作为一种求解近似解的方法被广泛用于地下水水位预报和资源评价中,成为当代水文地质研究与应用的最重要手段之一。近年来,国际上大型野外试验场地研究、随机方法引入、生物过程模型耦合以及计算方法的创新,使地下水数值模拟进入全新研究阶段。

地下水数值模拟在中国经历了从无到有、从简单的水流模型到比较复杂的物质和热量运移模型、从仿制到独立研制最后走向世界的发展历程。现在可以说,中国已经差不多对国际上讨论的各种问题都建立了相应的数值模拟模型:包括水资源评价问题,地下水污染问题,水岩作用和生物降解作用的模拟,非饱和带水分和盐分运移问题,海水入侵、高浓度咸水/卤水入侵问题,热量运移和含水层贮能问题,地下水管理与合理开发、井渠合理布局 and 渠道渗漏问题,地下水—地表水联合评价调度问题,地面沉降问题,参数的确定问题。所建立的模型囊括了包括识别模型、预报模型以及管理模型等在内所有的地下水模型类型 (蔺文静, 2007; 薛禹群, 2010)。

0.2.2 物理模型

菲利浦—福熙海麦 (Philipp Forchheimer, 1852—1933, 奥地利土木水利工程学家) 是第一位采用物理砂箱模型 (Sand tank model) 演示地下水流现象的学者 (1898)。在砂箱模型中,实际尺度的水文地质条件按照一定比例缩小到实验室尺度,含水层介质装入砂箱,设定合适的边界条件,模拟抽水、注水、溶质运移、海水入侵等现象。人们建立了不同形状 (长方形、立方体等) 以及不同规模的物理装置模拟多孔介质中的水流运动 (图 0.2.1),在德国慕尼黑的放射研究与水力学实验室 (Radiometric Study and Hydraulic Laboratory) 的砂槽尺寸可达 $20\text{m} \times 10\text{m} \times 5\text{m}$ 。

物理模型盛行于 1930~1950 年间,由于对区域地下水流的物理模拟成本高、耗时长,因此,相似模型 (Analog models) 在 20 世纪 60 年代开始出现,并一度成为地下水模型主流。

0.2.3 相似模型

相似模型技术是基于两种物理系统在运动特征等方面的相似性,利用易于掌控和分析的一种系统去模拟另外一个系统的运动规律。在区域地下水流研究中,主要有两种相似模拟技术。

(1) 黏滞流体模型 (Viscous Fluid Models)。

赫尔—肖 (Hele—Shaw, 1897) 指出:二维地下水流运动特征与两平行薄板间的黏

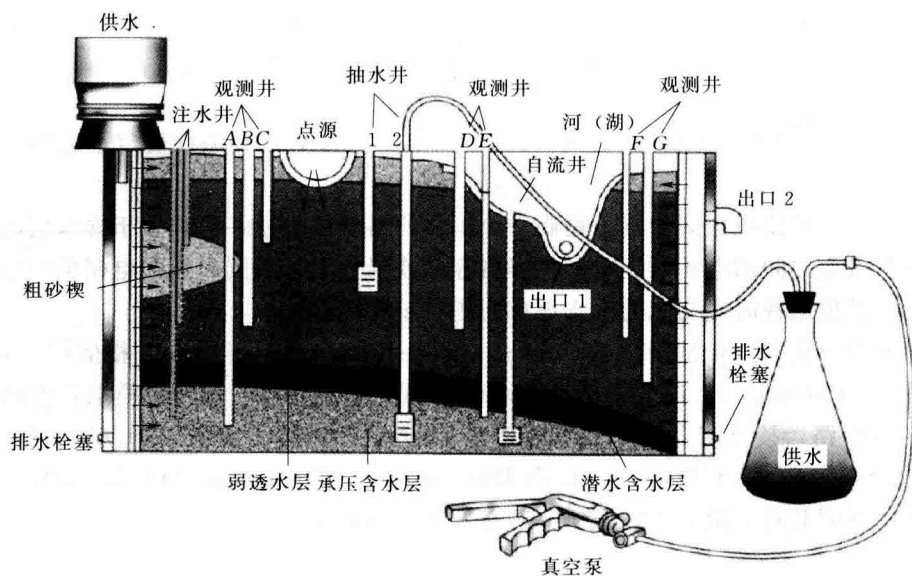


图 0.2.1 砂箱模型示意图

滞流体运动相似，并提出了在密度流问题（海水入侵）中广泛使用的 Hele—Shaw 模型。假设两平行薄板间的流体运动为层流，则流线可以绘制出流体运动的二维等势场。利用流体运动的 Navier—Stokes 方程以及垂向流条件的裘布依假设，则可导出平均流速为

$$V_m = -\frac{b^2 \rho_m g}{12 \mu_m} \frac{dh}{dx} \quad (0.2.5)$$

式中： μ_m 为模型流体黏滞度； ρ_m 为模型流体密度； b 为两平行薄板间距离； g 为重力加速度； dh/dx 为水力坡度。

对比式 (0.2.5) 和达西定律的表达式 ($V=KI$)，则模型渗透系数可以写成

$$K_m = \frac{b^2 \rho_m g}{12 \mu_m} \quad (0.2.6)$$

显然，从式 (0.2.6) 中可以通过改变平板距离 b 以及改变流体密度和黏滞性得到需要的渗透系数值。

模型流体常选择油 (oil) 和甘油 (glycerin)，流体加上染料 (dye) 可模拟非承压条件下的自由表面。过去，大量研究人员利用黏滞流体相似模型解决了一系列关于渗漏、排水和海水入侵等问题。

(2) 电模拟模型 (Electric Analog Models)。

M. King Hubbert 在 1931~1936 年期间进行地球电阻测量时，对地下渗流的物理性质发生了兴趣，并直觉感到水流与电流的运动规律具有相似性。欧姆定律和达西定律在数学上完全类似，表示了流动和势之间的关系，并且包含一个反映材料性质的比例常数：

欧姆定律：

$$I = -\sigma \frac{dV}{dx} \quad (0.2.7)$$

式中： I 为电流强度； σ 为电导率； dV/dx 为电压梯度。

达西定律：

$$q = -K \frac{dh}{dx} \quad (0.2.8)$$

式 (0.2.8) 中的 q , K , h 与式 (0.2.7) 中 I , σ , V 的相似性奠定了电相似模拟的基础。

电容的定义是使极板间的电压提高一个单位所需要的电量，它相当于含水层的储水系数，当两个极板之间的电压改变时，电容器存储或释放电量。因此，在电模拟模型中使用电容，使得模拟依赖时间变化的水文地质问题有了可能。

在电模拟方法中，电阻—电容 (R—C, Resistance—Capacitance) 相似模型在 20 世纪 60~70 年代应用最为广泛。Skibitzke(1960) 提出了使用 R—C 相似模拟技术研究地下水流问题的思路，接下来，Bermes(1960), Brown(1962), Stallman(1963), Walton 和 Prickett(1963), Patten(1965), Cole 和 Blair(1967), Thangarajan(1975, 1983) 等应用此项技术并证明其对于地下水问题研究的有效性 (图 0.2.2)。

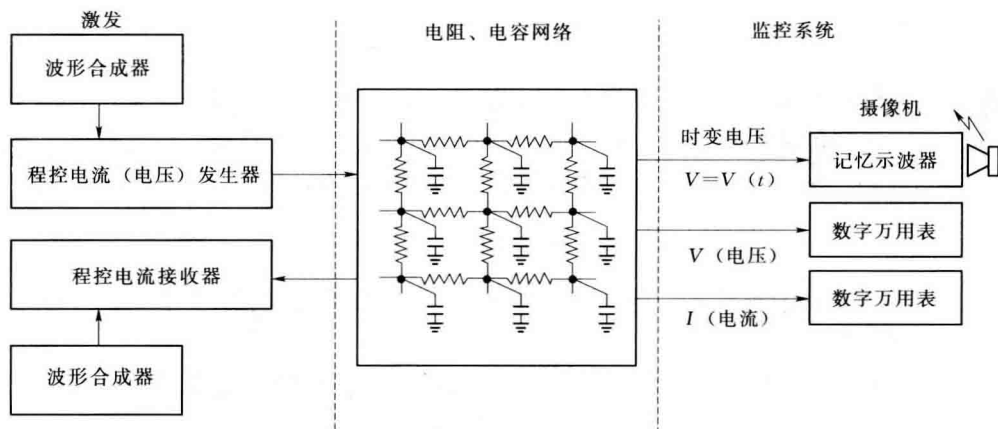


图 0.2.2 R—C 电模拟系统示意图

0.2.4 地下水数值计算的特点

与解析法相比，地下水数值法灵活、适应性强，善于模拟复杂的水文地质条件，不仅可以解线性问题，非线性问题也比较容易处理，而且可以用于水文地质的很多领域，如水位预报、水量计算、水质以及水温的计算、地下水的合理开发利用、地下水染污预防与治理等一系列问题。

地下水数值法的计算在通用计算机上进行，不需要像物理模拟和相似模拟那样建立复杂的专门设备；同时，地下水数值计算可以实现程序化，修改算法、修改模型都十分方便。对某一类问题只要编出通用程序后，对不同的具体问题只要按程序整理好数据就可以直接上机计算。

由于地下水数值计算方法的迅速普及和水平参差不齐的应用，使得在生产实践中，人们对地下水数值计算方法产生了一些误解。如下这些观点的出现一般都有一定的确凿案例为支撑，但可能过度放大了局部效应。

(1) “数值计算方法的结果总是可按人为意志操控的”。实质上,地下水运动的数学模型是以渗流连续性方程(质理守恒原理)以及达西定律为基础的,具有坚实的理论基础。只要输入确定的水文地质参数、边界条件、源汇项数据,收敛的模型必然具有唯一的确定性结果,其结果并非可以人为任意操控。之所以出现一些负面事例,通常有两种情况:一是由于人们对研究区的实际水文地质条件以及数据的掌握不够,所输入的各种数据不够准确、甚至不合理,所得的结果自然存在不同程度的可靠性问题;另一种情况,极个别技术人员片面追求模拟结果与实际情况的“接近”程度,随意篡改后台数据、有选择性地展示模拟结果,造成一种“合理性假象”,这样的模型自然经受不住时间和现实的考验。

(2) “数值计算方法获得的结果比其他方法更精确或者更可靠”。这也是一个误区,地下水数值法的求解能力要比解析法、实验法等强,可以适应较为复杂的水文地质条件。但数值计算结果的精确程度或可靠性,取决于水文地质概念模型是否合理、可靠,取决于边界条件、源汇项数据、初始流场是否准确。没有可靠、准确的基础数据支撑,数值法的结果也谈不上准确、可靠,因此,不能简单地认为数值法比其他方法更有优势。

(3) “数值计算方法一定要在水文地质资料和数据十分详尽的情况下才能使用”。地下水数值计算方法,提供的是一种分析工具,它可以在不同工作阶段发挥不同的作用。例如,当对研究区水文地质条件掌握不够充分而需要补充勘探工作量时,数值模型可以帮助确定重点工作区或工作内容;当对一个问题有不同观点时,可以利用数值模型模拟出不同取值条件下的地下水系统的响应,从而帮助人们对某些假设的可能性进行判断。因此,在水文地质资料和数据不充足的时候,地下水数值模型可以用来帮助工作人员更有效地开展进一步的工作。当然,在这些条件下应用地下水数值模型,需要工作人员清晰地了解模型存在的不确定性。

(4) “数值模型应该能够准确预测地下水动态”。这是一个对地下水数值模型过于苛求的想法,Stuart Alan Rojstaczer(1994)指出,地下水数值模型对于预测实际地下水系统行为的准确性是较差的。其原因主要有:①限于技术与成本,我们对实际水文地质条件的认识难以达到“真实”状态,甚至很多情况下都难以达到“足够清晰”的程度;②数学模型的“仿真”能力是有限的,必须建立在相对理想的水文地质概念模型基础之上,因此,再准确的数值模型也会与实际情况之间存在偏差;③在地下水动态预测之前,未来条件下的边界条件、源汇项等一系要素需要首先预测出来,而这样预测的准确性通常较低。在上述3个因素作用下,不应该对地下水数值模型预测的准确性过于苛求,而是将其视为对各种拟定方案和假设的定量化模拟工具,分析未来地下水系统行为的变化趋势。

希望大家在学习的过程中,不但注重掌握地下水数值模拟的最基本原理与方法,了解地下水数值模拟技术解决实际水文地质问题的基本过程;同时,也应该时刻注意地下水数值模拟方法在解决实际问题时所做的概化、优点和局限,以期合理、有效地运用该方法为科研和生产服务。

第1章 渗流理论基础

运用数值模拟首先要建立数学模型：由一个或几个表述地下水运动的数学方程式，联同表示该研究地区特定条件（初始条件、边界条件）的数学表达式就构成了一个研究具体地下水运动的数学模型。对这一数学模型进行运算就能再现或预测地下水的运动过程，而地下水数值模拟就是一种求解方法。

1.1 达西定律

$$V = KI = -K \frac{dH}{ds} \quad (1.1.1)$$

用矢量表示渗流速度，形式如下：

$$V = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad (1.1.2)$$
$$V_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x}; V_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y}; V_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

取负号的意思：随着渗流途径的增加，水头逐渐降低。即水头沿着 ds 的方向 dH 增量永远是负的，而水力坡度是正的，所以要加一个负号。

K_x 、 K_y 、 K_z 表示渗透系数在 x ， y ， z 3 个方向上的分量。对于给定的多孔介质， K_x 、 K_y 、 K_z 不等时说明介质是各向异性的；而 K_x 、 K_y 、 K_z 相等时则说明介质是各向同性的。

在三维坐标体系下，渗透系数 K 是一个具有 9 个分量的张量：

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

当 x ， y ， z 3 个坐标轴方向与渗透系数张量主轴方向一致时， K 则可简化为主对角线张量：

$$K = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}$$