应用型本科院校“十二五”规划教材/同步学习指导丛书

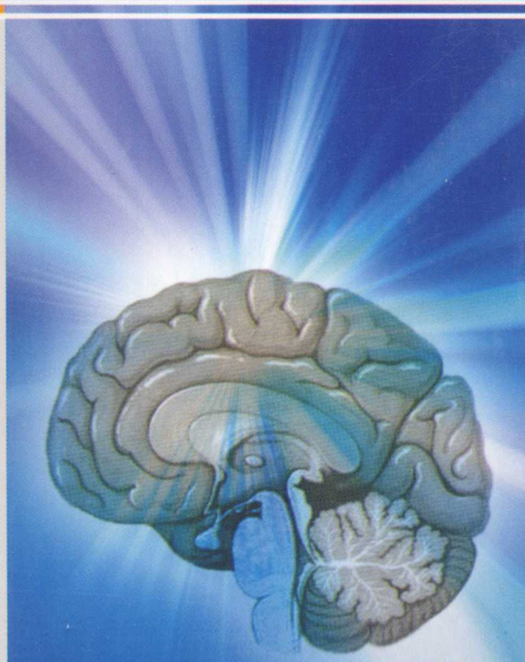
主编　巨小维

高等数学学习指导

上册

A Guide to the Study of Higher Mathematics

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业



哈尔滨工业大学出版社

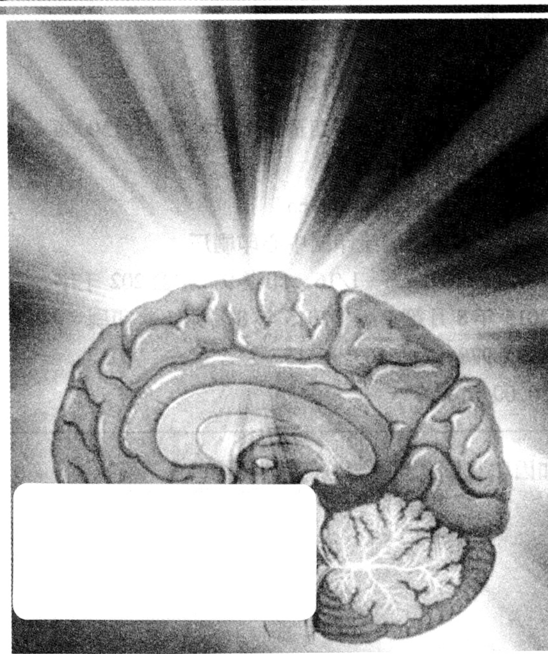
应用型本科院校“十二五”规划教材/同

主　编　巨小维
副主编　于莉琦　杨 磊

高等数学学习指导

上册

A Guide to the Study of Higher Mathematics



哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书是应用型本科院校规划教材的学习辅导教材，是与哈尔滨工业大学出版社出版的由洪港主编的《高等数学(上)》教材相配套的学习指导书．内容包括：函数与极限、导数和微分、导数应用、不定积分、定积分、微分方程与差分方程等．每章都包括以下五方面的内容：(1)内容提要；(2)典型题精解；(3)同步题解析；(4)验收测试题；(5)验收测试题答案．本书还编写了五套期末测试模拟题，并附有答案．叙述详尽，通俗易懂．

本书可供应用型本科院校相关专业学生使用，也可作为教师与工程技术及科技人员的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导．上/巨小维主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.8

应用型本科院校“十二五”规划教材

ISBN 978－7－5603－5515－3

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①巨…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 174071 号

策划编辑　杜　燕
责任编辑　刘　瑶
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 9　字数 202 千字
版　　次　2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－5515－3
定　　价　20.00 元

《应用型本科院校"十二五"规划教材》编委会

主　任　修朋月　竺培国

副主任　王玉文　吕其诚　线恒录　李敬来

委　员　（按姓氏笔画排序）

丁福庆　于长福　马志民　王庄严　王建华
王德章　刘金祺　刘宝华　刘通学　刘福荣
关晓冬　李云波　杨玉顺　吴知丰　张幸刚
陈江波　林　艳　林文华　周方圆　姜思政
庹　莉　韩毓洁　臧玉英

序

哈尔滨工业大学出版社策划的《应用型本科院校"十二五"规划教材》即将付梓,诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁,凡百余种,涉及众多学科门类,定位准确,内容新颖,体系完整,实用性强,突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习,而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位,培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别,其培养的人才特征是:①就业导向与社会需求高度吻合;②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合;③具备良好的人文素质和科学技术素质;④富于面对职业应用的创新精神。因此,应用型本科院校只有着力培养"进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好"的人才,才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减,针对性、应用性不够突出,因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材,以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的《应用型本科院校"十二五"规划教材》,在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的"本科应用型高级专门人才"精神,根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见,在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上,特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性,既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律,又针对应用型本科人才培养目标

及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

《应用型本科院校“十二五”规划教材》的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

前　言

为了加强学生的自学能力、分析问题与解决问题能力的培养，加强对学生的课外学习指导，我们编写了这套高等数学学习指导书. 这套学习指导书是与应用型本科院校数学系列教材相匹配的.

本书是与洪港主编的《高等数学　上》教材相配套的学习指导书. 本书内容包括：函数与极限、导数和微分、导数应用、不定积分、定积分、微分方程与差分方程等. 每章都编写了以下五方面的内容：(1)内容提要；(2)典型题精解；(3)同步题解析；(4)验收测试题；(5)验收测试题答案. 本书还编写了五套期末测试模拟题，并附有答案. 叙述详尽，通俗易懂.

本书由巨小维任主编，于莉琦、杨磊任副主编. 在编写过程中参阅了以往教学过程中积累的资料以及兄弟院校的相关资料，在此一并表示感谢.

建议读者在使用本书时，不要急于参阅书后的答案，而首先要独立思考，多做习题，尤其是多做基础性和综合性习题，这对于掌握教材的理论与方法有着不可替代的作用. 希望本书能在你解题山重水尽疑无路之时，将你带到柳暗花明又一春的境界. 不断地提高自学能力，分析问题与解决问题的能力.

由于编写时间仓促，书中难免存在一些不妥之处，敬请广大读者不吝指教.

编　者

2015 年 3 月

目　　录

第 1 章

函数与极限

1.1 内容提要

1. 邻域

(1) 邻域的概念.

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,数集 $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,记为

$$\cup(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

其中,a 为该邻域的中心;δ 称为该邻域的半径.

(2) 函数的概念.

设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中,x 称为自变量;y 称为因变量;D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f = D$.

2. 反函数与复合函数的概念

(1) 反函数的概念.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 对于值域 W 中的任一数值 y,在定义域 D 中存在唯一数值 x 与之对应,且满足关系式

$$f(x) = y$$

则此关系式确定了一个以 y 为自变量,x 为函数的新函数,即

$$x = \varphi(y) \text{ 或 } x = f^{-1}(y)$$

称此函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

(2) 复合函数的概念.

设有函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,而函数 $u=g(x)$ 的值域为 R_g,若 $R_g \cap D_f \neq \varnothing$,则称函数 $y=f[g(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数,其中 x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

3. 初等函数的概念

(1) 基本初等函数的概念.

常用的函数都是由常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数构成

的,我们将这六类函数称为基本初等函数.

(2) 初等函数的概念.

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合并用一个式子表示的函数称为初等函数.

(3) 双曲函数.

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}, x \in(-\infty,+\infty)$;

双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, x \in(-\infty,+\infty)$;

双曲正切函数 $\operatorname{th} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$(即$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$), $x \in(-\infty,+\infty)$.

4. 极限

(1) 数列的极限定义.

设$\{x_n\}$是一个数列,A是常数.若对于任意给定的正数ε,总存在一个正整数N,使得当$n>N$时,不等式$|x_n-A|<\varepsilon$恒成立,则称常数A为数列x_n的极限,记为$\lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_n=A$或$x_n \rightarrow A(n \rightarrow \infty)$.

(2) 函数的极限.

定义 1 设$f(x)$对于充分大的$|x|$有定义,A是某常数.若对于任意给定的正数ε,总存在一个正数X,当$|x|>X$时,使得$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立,则称常数A为函数$f(x)$的极限,记为$\lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x)=A$或$f(x) \rightarrow A(x \rightarrow \infty)$.

定义 2 设函数$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义,A是常数,若对于任意给定的正数ε,总存在一个正数δ,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,总有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立,则称常数A为函数$f(x)$当$x \rightarrow x_0$时的极限,记为$\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=A$或$f(x) \rightarrow A(x \rightarrow x_0)$.

定理 1 $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=A$存在的充分必要条件:$\lim\limits_{x \rightarrow x_0^{+}} f(x)=\lim\limits_{x \rightarrow x_0^{-}} f(x)=A$.

5. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量的定义.

如果$\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=0$或$\lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$,则称$f(x)$当$x \rightarrow x_0$或$x \rightarrow \infty$时的无穷小量(简称为无穷小).

(2) 无穷小量的运算性质.

定理 2 有限个无穷小量的代数和是无穷小量.

定理 3 有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量.

定理 4 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

(3) 无穷小量的阶.

设$x \rightarrow x_0$(或$x \rightarrow \infty$),α与β都是在同一变化过程中的无穷小,且$\beta \neq 0$.

① 若$\lim \frac{\alpha}{\beta}=0$,则称$\alpha$是比$\beta$高阶的无穷小,记为$\alpha=o(\beta)$.

② 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小.

③ 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = b \neq 0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小.

④ 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta^k} = C \neq 0, k > 0$，则称 α 是关于 β 的 k 阶无穷小.

⑤ 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha \sim \beta$.

(4) 无穷大量的定义.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$ 时，为无穷大量（或无穷大）.

(5) 无穷大量与无穷小量的关系.

定理 2　① 如果当 $x \to x_0$（或 $x \to +\infty$）时，函数 $f(x)$ 是无穷大，则函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；② 若当 $x \to x_0$（或 $x \to +\infty$）时，函数 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

6. 函数极限的性质及运算法则

(1) 函数极限具有唯一性、有界性及保号性.

(2) 函数极限的四则运算.

定理 3　设 $\lim f(x) = a, \lim g(x) = b$，则

① $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = a \pm b$.

② $\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = ab$.

③ 当 $b \neq 0$ 时，$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

7. 极限存在准则及两个重要极限

(1) 极限存在准则.

准则 1　若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足：

① $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n = 1, 2, \cdots)$；

② $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a, \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$.

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

准则 1′　设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0, \delta_0)$（或对于充分大的 $|x|$）有定义，且满足条件：

① $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；

② $\lim g(x) = A, \lim h(x) = A$.

则 $\lim f(x) = A$.

准则 2　单调有界数列必有极限.

(2) 两个重要极限.

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

8. 函数的连续性

(1) 函数连续性的概念.

设函数$f(x)$在$\cup(x_0)$内有定义,如果当自变量改变量Δx趋于0时,相应的函数改变量Δy也趋于0,即

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续.

(2) 函数的间断点.

如果函数$y=f(x)$在点x_0处不满足连续性定义的条件,则称函数$f(x)$在点x_0处间断(或不连续).

(3) 连续函数的运算.

定理 4　设函数$f(x)$与$g(x)$都在点x_0处连续,则函数$f(x)\pm g(x)$,$f(x)g(x)$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq0)$在点$x_0$处也连续.

(4) 反函数的连续性.

定理 5　单调增加(或减少)的连续函数的反函数也是单调增加(或减少)的连续函数.

(5) 复合函数的连续性.

定理 6　设函数$y=\varphi(x)$在点x_0处连续,且$y_0=\varphi(x_0)$,又函数$z=f(y)$在点y_0处连续,则复合函数$z=f[\varphi(x)]$在点x_0处连续.

(6) 闭区间上连续函数的性质.

定理 7　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则:

①$f(x)$在$[a,b]$上有界(有界性定理).

②$f(x)$在$[a,b]$上必有最小值和最大值(最值定理).

③ 若$f(a)$与$f(b)$异号,在(a,b)内至少存在一点ξ,使$f(\xi)=0$(零点定理).

④ 在$[a,b]$上至少存在一点ξ,使$f(\xi)=c$(M与m分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值,c是M,m之间的任意数)(介值性定理).

1.2　典型题精解

例 1　设$y=f(x)$的定义域为$(0,1]$,$\varphi(x)=1-\ln x$,则复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域为________.

解　令$u=\varphi(x)$,由题意知$f(u)$的定义域为$(0,1]$,即$0<1-\ln x\leqslant1$,解得$1\leqslant x<\mathrm{e}$,所以$y=f[\varphi(x)]$的定义域为$[1,\mathrm{e})$.

例 2　函数$y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$的反函数为________.

解　从$y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$中解出$x=\sin\dfrac{1}{4}(y^2-\pi)$,所以反函数为$y=\sin\dfrac{1}{4}(x^2-\pi)$,而$y$的值域为$[0,\sqrt{3\pi}]$,故反函数的定义域为$[0,\sqrt{3\pi}]$.

例3 极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\ln\dfrac{x}{x+1}\right)\cos[\ln x(x+1)]=$________.

解 因为当$x\to+\infty$时，$\dfrac{x}{x+1}\to1$，$\ln\dfrac{x}{x+1}\to0$，所以$\sin\left(\ln\dfrac{x}{x+1}\right)\to0$. 而$|\cos[\ln x(x+1)]|\leqslant1$，故原式$=0$.

例4 若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则$a=$________.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}+\dfrac{e^{2ax}-1}{x}\right)=2+2a$，故$2+2a=a$，即$a=-2$.

例5 设$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$，则$a,b$的值分别为________.

解 由公式$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, m=n\\ 0, n<m\\ \infty, n>m\end{cases}$可知，仅当分子、分母关于$x$的最高次幂相同时，极限才是不为零的数值，因此必须有$a=-1,b=-2$.

例6 求极限$\lim\limits_{x\to0^+}(\cos x)^{\csc^2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos x)^{\csc^2x}=\lim\limits_{x\to0^+}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\sin^2x}}=$

$$\lim_{x\to0^+}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

例7 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

例8 证明：方程$x^5-3x=1$至少有一个根介于1和2之间.

解 设$f(x)=x^5-3x-1$，则$f(1)=-3<0$，$f(2)=25>0$，根据零点定理，至少存在一点$\xi\in(1,2)$，使得$f(\xi)=0$.

因此$x^5-3x=1$至少有一个根介于1和2之间.

1.3 同步题解析

习题1.1解答

1. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$； (2) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；

(3) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$;　　　　(4) $y=\arcsin(1-x^2)$.

解　(1) 由题设得$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$,解得$x\geqslant -2$且$x\neq\pm 1$,即$x\in[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

(2) 由题设得$\begin{cases}|x|-1>0\\ 3-x>0\end{cases}$,解得$1<x<3$或$x<-1$,即$x\in(-\infty,-1)\cup(1,3)$;

(3) 由题设得$\begin{cases}\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0\\ \frac{5x-x^2}{4}>0\end{cases}$,解得$1\leqslant x\leqslant 4$,即$x\in[1,4]$;

(4) 由题设得$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$,解得$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$,即$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

2. 下列两个函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$与$g(x)=1$;　　　　(2) $f(x)=x$与$g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\lg x^2$与$g(x)=2\lg x$;　　　　(4) $y=\sin^2x+\cos^2x$与$y=1$.

解　(1) 不相同. 因为函数$f(x)=\frac{x}{x}$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而函数$g(x)=1$的定义域是$(-\infty,+\infty)$;

(2) 不相同. 因为函数$f(x)=x$的值域是$(-\infty,+\infty)$,而函数$g(x)=\sqrt{x^2}$的值域是$(0,+\infty)$;

(3) 不相同. 因为函数$f(x)=\lg x^2$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而函数$g(x)=2\lg x$的定义域是$(0,+\infty)$;

(4) 相同. 因为函数$f(x)=\sin^2x+\cos^2x$与函数$g(x)=1$的定义域与函数关系都相同.

3. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$;　　　　(2) $y=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$;

(3) $y=x\sin\frac{1}{x}$;　　　　(4) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解　(1) 设$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$,因为$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$,所以此函数为奇函数;

(2) 设$f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$,因为$f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{(\sqrt{1+x^2}-x)}=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x)$,所以此函数为奇函数;

(3) 设$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$,因为$f(-x)=-x\sin(-\frac{1}{x})=x\sin\frac{1}{x}=f(x)$,所以此函数为偶函

数；

(4) 设$f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$,因为$f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$,所以此函数为偶函数.

4. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\ln(x+2)$；　　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解　(1) 函数$y=1+\ln(x+2)$是单调的,所以它的反函数存在,其反函数为$x=e^{y-1}-2$,习惯上记为$y=e^{x-1}-2$；

(2) 函数$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$是单调的,所以它的反函数存在,其反函数为$x=\log_2(\dfrac{y}{1-y})$,习惯上记为$y=\log_2(\dfrac{x}{1-x})$.

5. 下列函数哪些是周期函数？如果是,请指出其周期.

(1) $y=\sin^2x$；　　　(2) $y=1+\sin\pi x$.

解　(1) $y=\sin^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$是周期函数,周期$T=\pi$；

(2) $y=1+\sin\pi x$是周期函数,周期$T=2$.

6. 设函数$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求$f[f(x)]$,$f\{f[f(x)]\}$.

解　$f[f(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$；

$f\{f[f(x)]\}=\dfrac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}=\dfrac{x}{1-3x}$.

7. 设函数$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$,求$f(x-1)$.

解　$f(x-1)=\begin{cases}1, & x-1\geqslant 0\\ 0, & x-1<0\end{cases}$,即$f(x-1)=\begin{cases}1, & x\geqslant 1\\ 0, & x<1\end{cases}$.

8. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；　　(2) $y=\lg^2\arccos x^3$；　　(3) $y=a^{\sin^2x}$.

解　(1) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$,$u=\ln v$与$v=\sqrt{x}$复合而成；

(2) $y=\lg^2\arccos x^3$ 是由 $y=u^2$,$u=\lg v$,$v=\arccos\omega$ 与 $\omega=x^3$ 复合而成；

(3) $y=a^{\sin^2x}$ 是由 $y=a^u$,$u=v^2$,$v=\sin x$ 复合而成.

9. 设函数$f(x)$的定义域是$[0,1]$,求下列函数的定义域.

(1) $f(x^2)$；　　　(2) $f(\ln x)$.

解　(1) 由$0\leqslant x^2\leqslant 1$,得$-1\leqslant x\leqslant 1$,所以$f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$；

(2) 由 $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$,得 $1 \leqslant x \leqslant e$,所以 $f(\ln x)$ 的定义域是 $[1,e]$.

10. 已知 $f(\frac{1}{t}) = \frac{5}{t} + 2t^2$,求 $f(t)$,$f(t^2+1)$.

解 由 $f(\frac{1}{t}) = \frac{5}{t} + 2t^2 = 5 \cdot \frac{1}{t} + 2 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{t})^2}$,得 $f(t) = 5t + \frac{2}{t^2}$,于是 $f(t^2+1) = 5(t^2+1) + \frac{2}{(t^2+1)}$.

11. 火车站行李收费规定如下:当行李不超过 50 kg 时,按每千克 0.15 元收费,当超过 50 kg 时,超重部分按每千克 0.25 元收费,试建立行李收费 $f(x)$(元)与行李质量 x(kg)之间的函数关系.

解 根据题意,当行李不超过 50 kg 时,收费函数为 $f(x) = 0.15x$;当行李超过 50 kg 时,收费函数为 $f(x) = 0.15 \times 50 + 0.25(x-50) = 7.5 + 0.25(x-50)$,即行李收费函数为

$$f(x) = \begin{cases} 0.15x, 0 < x \leqslant 50 \\ 7.5 + 0.25(x-50), x > 50 \end{cases}$$

12. 要设计一个容积为 $V = 20\pi\ \mathrm{m}^3$ 的有盖圆柱形储油桶,已知上盖单位面积造价是侧面的一半,而侧面单位面积造价又是底面的一半,设上盖的单位面积造价为 a 元/米^2,试将油桶的总造价 y 表示为油桶半径 r 的函数.

解 设油桶的上盖造价函数、侧面造价函数与底面造价函数分别为 y_1, y_2, y_3,则根据题意得 $y_1 = \pi r^2 \cdot a$,$y_2 = 2\pi r \frac{20\pi}{\pi r^2} \cdot 2a = \frac{80\pi a}{r}$,$y_3 = \pi r^2 \cdot 4a$,于是总造价函数为

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = 5\pi r^2 a + \frac{80\pi a}{r}$$

习题 1.2 解答

1. 当 $n \to \infty$ 时,观察并写出下列数列的极限.

(1) $x_n = \frac{2n^2+1}{n^2}$;　　(2) $x_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$;

(3) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;　　(4) $x_n = (-1)^n$.

解 (1) $3, \frac{9}{4}, \frac{19}{9}, \frac{33}{16}, \frac{51}{25}, \frac{73}{36}, \cdots$,易见 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

(2) $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$;$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \cdots$,易见 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$;

(3) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \cdots$,易见 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

(4) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots$, 易见 x_n 的极限不存在.