21世纪高等院校通识教育规划教材

概率论与数理统计

徐晓岭 王蓉华 ◎ 编著

Probability Theory & Mathematical Statistics

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

21世纪高等院校通识教育规划教材

概率论与数理统计

徐晓岭 王蓉华 ◎ 编著

Probability Theory & Mathematical Statistics

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 徐晓岭，王蓉华编著. -- 北京：人民邮电出版社，2014.10
21世纪高等院校通识教育规划教材
ISBN 978-7-115-36210-0

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①徐… ②王… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①021

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第180370号

内 容 提 要

本书以提升学生发现问题与解决问题的能力为目的，注重实际应用背景与实用性，作者在收集了大量资料的基础上，尤其是结合近一二十年来的新进展，经过精心提炼加工，以阅读材料的形式详细介绍了概率统计的基本思想、基本解题方法。全书分 10 章，共 88 份阅读材料，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析和相关分析等。

本书既可作为本科生学习概率统计课程的同步学习指导书，也可作为考研学生的复习参考资料，同时对讲授概率统计的教师也具有一定的参考价值。

◆ 编　　著　徐晓岭　王蓉华
　责任编辑　张孟玮
　执行编辑　税梦玲
　责任印制　彭志环　杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：24.5　　2014 年 10 月第 1 版
　字数：602 千字　　2014 年 10 月北京第 1 次印刷

定价：59.80 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

Preface

概率统计课程是高等院校（理工类、经管类）学生最主要的数学基础课之一，也是全国硕士研究生入学考试的必考内容。概率统计不仅涉及较深的高等数学、线性代数等知识，而且是与现实生活联系较为紧密且实用性较强的一门课程。学生对其掌握程度的好坏，直接关系到后续诸多课程的学习，因此该课程对人才培养的质量有着深远的影响。

学生在初次接触概率统计课程时普遍会感到"三难"——基本概念难懂、方法灵活难以掌握、习题难做，以致在学生中流传着著名的呐喊——"我就是不懂"。为了帮助学生能更好地学好这一门课程，深入理解概率统计的基本思想，掌握基本的解题方法，提高发现问题、分析问题与解决问题的能力，我们系统地汇总了讲授概率统计课程的教学体会，注重实际应用背景与实用性，在收集了大量资料的基础上，结合近一二十年来概率统计学科的新进展，经过精心提炼加工，整理成 88 个阅读材料，汇编成《概率论与数理统计》这本书。

本书由上海对外经贸大学徐晓岭、上海师范大学王蓉华两位作者合作完成。徐晓岭编写了第一章至第五章，王蓉华编写了第六章至第十章，并由徐晓岭对全书进行了统稿。本书的撰写得到了上海对外经贸大学赵飞、顾蓓青、凌学岭、沙丹、王磊、范登锋、陈洁、徐冰纨八位老师的关心与帮助，此外，上海师范大学概率论与数理统计专业 2012 级硕士研究生房晴晴、乔磊，上海对外经贸大学数量经济学专业 2012 级和 2013 级硕士研究生曹奔、张洲铭、张罗赛、李慧杰，国际经济与贸易专业 2011 级硕士研究生梁舒，2009 级统计学专业本科生程慧君、於笑扬，2010 级统计学专业本科生刘芳芳、李桂芳、王园园、杨雯逸也对本书的撰写提供了协助，在此一并表示感谢！

本书的出版得到了上海对外经贸大学地方本科 085 工程建设项目——统计学重点专业建设的资助（编号：R085132023）。

真心地希望本书对提高概率统计课程教学质量有所帮助，但由于编者水平有限，书中难免有不妥或谬误之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2014 年 3 月 7 日晚于上海

目录

Contents

第一章

随机事件与概率

Chapter 1

材料一　概率论简史

概率(Probability)这个词,是和探求(Probe)真实性联系在一起的。现实世界充满了不确定性,因此,人们试图通过猜测事件的真相和未来,以掌握这不确定性。当我们对周围世界进行分析时,这种思维方法是一个重要的组成部分。

概率论是研究机遇的数学模型。最初它只是对于带机遇性的游戏的分析,而现在已经成为一门理论严谨、应用广泛、发展迅速、方法独特的数学学科。

概率论的研究一般说法始于意大利文艺复兴时代。1494 年意大利出版的一本计算技术的教科书中,作者帕奇欧里写道:假如在一个比赛中赢 6 次才算赢。两个赌徒在一个赢 5 次(甲)另一个赢 2 次(乙)的情形之下中断赌博的话,那么总的赌金应该按照 5 与 2 之比分给他们两人,这似乎很合理,但是按照赢的次数的比例来分配的原则肯定不合理。比如说,假设需要赢 16 次才算赢,并将上面的数字改成 15 次和 12 次。这时他们所分得的钱差不多一样。但是这里面肯定有什么不对头的地方。事实上,已经赢了 15 次的赌徒只要再赢一次,就可以把赌金全部拿到手,而另一个赌徒却需要再一连赢 4 次才行。许多年之后,卡尔达诺讨论了一个类似的问题。他懂得需要分析的不是已经赌过的次数,而是剩下的次数。在帕奇欧里的问题中,假定在任何一局中两个赌徒赢的概率各为 0.5,甲只需赢一次就可以得到全部赌金,而乙则需要 4 次。因此,以后的赌博只有 5 种可能结果,即甲赢头一次、赢第二次、赢第三次、赢第四次或者完全输掉。卡尔达诺认为,总赌金应该按照$(1+2+3+4):1=10:1$的比例来分配。他这个想法的出发点我们不清楚。正确的结果是 $15:1$,这个结果大家可以利用学过的知识算一算。

有的数学史记载,当时一个赌博者向法国数学家帕斯卡提出了一个使他苦恼很久的问题:“两个赌博者相约赌若干局,谁先赢了 S 局就算赢了,现在一个人赢 a 局($a<S$),另一个人赢 b 局($b<S$),赌博中断。问赌本应该怎样分才合理?”帕斯卡将这个问题和它的解法寄给费马(法),这是 1654 年 7 月 29 日的事。

概率论诞生时期的这些故事,情节都具有同一格局,这种格局后来曾多次重复:先提出一个实际问题,接着提出一个错误的解答,结果提出一个简单的数学模型使答案十分明显,最后转而讨论这个模型的可应用性。

尽管概率论起源于随机游戏,但赌博只是少数人的灰色行为,绝不会成为推动概率论发展的动力,概率论发展的动力在于实践应用中。

1657 年,荷兰物理学家惠更斯(1629—1695)发表了《论赌博中的计算》的重要论文,提出了数学期望的概念。伯努利(1654—1705)把概率论的发展向前推进了一步,1713 年(伯努利死后的第 8 年)出版了他的著作《猜测的艺术》,指出概率是频率的稳定值,他第一次阐明了大数定律的意义。1718 年,法国数学家棣莫弗(1667—1754)发表了重要著作《机遇原理》,书中叙述了概率乘法公式和复合事件概率的计算方法,并在 1733 年发现了正态分布密度函数:

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<+\infty$$

但他没有把这一结果应用到实际数据上,直到 1924 年才被英国统计学家皮尔逊(1857—1936)

在一家图书馆中发现。

德国数学家高斯(1777—1855)从测量同一物体所引起的误差这一随机现象独立地发现了上述正态分布密度函数。他发展了误差理论，并提出了最小二乘法。法国数学家拉普拉斯(1749—1827)也独立地导出了正态分布密度函数，拉普拉斯对概率的意义如何抽象化做出了杰出的贡献，提出了概率的古典定义。他的著作有《概率的分析理论》和《概率的哲学探讨》等。拉普拉斯是奠定概率论基础的第一个人，并预言："值得注意的是，从考虑赌博问题而起始的一门科学，将会成为人类知识宝库里最重要的主题。"

在俄国，车贝雪夫(1821—1894)继承了拉普拉斯的理论工作，把概率论的理论研究推进现代数学的门槛。他的学生马尔可夫(1856—1922)在概率论的理论研究方面作出了有深远意义的贡献，马尔可夫推广了大数定理和中心极限定理的应用范围，奠定了随机过程的发展基础，他提出的马尔可夫过程是现代概率论的基本内容。另一位俄国的数学家李雅普诺夫(1857—1918)在极限定理研究方面做出了开创性工作。俄国的这三位数学家还提出了随机变量的概念，使概率论从对个别事件的研究发展为用数量化的形式刻画随机现象。研究对象的扩大，必然导致新的概念和新的研究方法的诞生，如分布函数、密度函数、数学期望、特征函数等概念，使数学分析的研究方法进入概率论的研究领域。

到19世纪末，概率论的主要研究内容已基本形成，但有两个问题从理论上没有解决：一是概率论的公理化体系；二是中心极限定理成立的条件。直到1933年苏联数学家柯尔莫哥洛夫将实变函数论的观念引进概率论的研究中，构建了概率论的公理化体系。而中心极限定理也在1900—1922年间，由前苏联数学家提出了定理成立的广泛条件。

随机过程是现代概率论的一个主要研究方向。随机过程研究无穷多个随机变量的集合，它是现实世界中随时间而变化的随机现象的数学抽象，如某地区每年的降雨量、百货公司每天接待顾客人数等。随机过程的发展与力学体系理论有密切关系。1828年，英国生物学家布朗发现花粉颗粒在液体中悬浮时呈现出一种奇特的飘忽不定的游动，称为布朗运动。维纳首次应用测度论给出了布朗运动的严密的数学定义，并证明了布朗运动的几乎一切轨道都是连续的。

早在20世纪30年代末至50年代初，著名数学家杜布和莱维就创立了鞅论(鞅是Martingale的中文意思，原意是赌输后增加下注的一种赌法)。鞅论不仅是随机过程中最活跃的分支，而且还愈来愈广泛地应用于马尔可夫过程、点过程估计理论、随机控制等理论分支及应用领域。另外，随机过程与其他学科相结合，又产生一些新的边沿分支，如与微分方程、数理统计、数论、几何等相结合，便产生了随机微分方程、过程统计、数论中的概率方法、几何概率等新分支。当代概率论的研究方向大致可分为极限理论、马尔可夫过程、平稳过程、鞅论和随机微分方程等。在概率论的理论研究方面，法国和俄罗斯仍处于领先地位。新中国成立后，我国的概率论研究逐步引起世界的重视，许多分支已接近世界前沿阵地。目前，某些分支已处于领先地位。

材料二　小概率事件必须足够重视

我们知道通常做决策要依赖大样本，但小概率事件还是应该引起足够的重视。在制定重大决策的时候，不能只是考虑问题的主要方面，还要充分考虑到不利的小概率事件存在和发生

的可能性。不然的话，后果将不堪设想。

中国有句老话“不怕一万，就怕万一”，说的就是小概率事件。当我们知道那件事是大概率事件时，我们可以从容地去应对它。可是当它是小概率事件时，就有些麻烦了。学过了概率论能让我们科学地选择好的小概率事件，避开不好的小概率事件。这就是概率论的魅力所在——它能让那些飘忽不定的事在我们的掌握之中。对于小概率事件，人们有这样一种选择心理：对于诱惑力极高的小概率事件，哪怕它的概率小到几乎为 0，人们也还是固执地去选择它，这就是为什么那么多人排队买彩票的原因。而对于有害的小概率事件，哪怕它发生或再次发生的概率极小，人们也不会去选择它，俗话说吃一堑长一智，有谁愿意把那不确定的 1%变成自己身上的 100%？

历中上非常有名的“赤壁之战”也充分说明了重视小概率事件的重要性。我国湖北省赤壁市历史上曾经发生过一场以少胜多的经典战役——赤壁之战。当时东吴的周瑜在江南，只有 3 万兵力，而曹操在江北，有兵力 80 万。鉴于当时江中风浪大，不便于单个船只独立作战，曹操下令将所有战船相连，以减弱风浪颠簸的影响。当时曹操手下的一个谋士进言：“铁索连舟，万一火攻，岂不难以进退。”曹操听后大笑说：“若用火攻必借风力，如今隆冬，只有西北风。我军在北岸，他(周瑜)若用火，岂不反烧了自己。”然而，令曹操想不到的是，交战那天居然刮起了东南风(小概率事件)。周瑜趁机用火，将曹操的所有船只烧毁。可见，这个小概率事件瞬间改变了双方的交战结果。凭曹操的军事指挥才能和绝对兵力优势，取胜应该是情理之中的事。然而，这个极其意外的小概率事件的发生，使曹操顿时失去了兵力上的优势，大败于周瑜。

如果某公司宣称其生产的某零件不良率仅 2%。有一回你买了一盒(200 个)，并取出 3 个使用。若坏了一个尚可忍受，可算出此概率约为 0.0582。若坏了两个，可能便要找公司退货了(因为概率约为 0.000859，小于千分之一)。若三个皆坏，大概就不相信不良率只有 2%而已。我们原先认为不太会发生的事，偶尔碰到一次只是觉得运气不好。碰到第二次时，心里便可能觉得怪怪的。若再多碰到一两次，便很可能觉得要么有人搞鬼，要么这件事发生的可能性并不是那么低。小概率事件就是在这类发生的概率很低的情况中，显现其影响力。《战国策》第二十三篇(魏策二)，另有一则“三人市虎”的典故，也是相似的道理：夫市之无虎明矣，然而三人言而成虎。要知有时是可以以偏概全的。

小概率事件是不可能轻视的。“水滴石穿”，“铁杵磨成针”，“不积跬步无以致千里，不积小流无以成江海”就是这个道理，量变才能达到质变。有句话说“有 1%的成功就要付出 99%的努力，事情成功率就大得多”，也许你现在的努力微不足道，但只要你坚持下去，不断地积累，你的成功将是必然的！

在平常的生活中我们经常应用小概率事件原理，这也是数理统计中假设检验的思想基础。比如，20 世纪 50 年代有一部电影叫《北大荒人》，描写的是在 50 年代几十万解放军官兵屯垦戍边，开发北大荒的事迹。电影中有一段对当时北大荒情形描写的台词，说当时的北大荒“棒打狍子，瓢舀鱼，野鸡飞到饭锅里”意思是说在当时的北大荒，挥一下棒子能打到狍子，在河里舀瓢水能舀到鱼，在外野炊，野鸡能飞到饭锅里。听到这段台词，你马上反应出“当时的北大荒非常荒凉，野生资源非常丰富，狍子多、鱼多、野鸡多”。在台词中并没有说狍子多、鱼多、野鸡多，你为什么能得出狍子多、鱼多、野鸡多的信息呢？你是不自觉地应用了小概率原理。事实上可以进行如下分析。

记随机事件 A 表示在河里舀一瓢水，舀着了鱼。原假设与备择假设如下。

原假设 H_0:河里的鱼很少↔备择假设 H_1:河里的鱼很多。

当河里的鱼很少时,在河里舀瓢水还舀到了鱼,这是个小概率事件,一般来说,在一次试验中,小概率事件不应发生,若发生了(舀到了鱼),就否定原假设,河里的鱼不是很少,接受备择假设,河里的鱼很多。

人的一生充满变数,你做的每一件事几乎是由随机概率向必然结果的一种飞跃。“勿以恶小而为之,勿以善小而不为”,在日常生活学习中,决不能轻视小概率事件。如果是过失的话,只要犯了几次,便可能造成很难弥补的损失;而如果是好事,做了几次,也可能给人留下了很好的印象。

材料三 π 趣谈及实验求 π 值

1. π 趣谈(π 值计算中的错误)

一提到圆周率,你立即会想到 π=3.1415926…,这是一个无限不循环小数。圆周率是指平面上圆的周长与直径之比,用 π 来表示圆周率是英国学者琼斯在 1706 年首先使用的。作为一个非常重要的常数,圆周率最早是出于解决有关圆的计算问题。古今中外,许多人致力于圆周率的研究与计算。为了计算出圆周率的越来越好的近似值,一代代的数学家为这个神秘的数贡献了无数的时间与心血。19 世纪前,圆周率的计算进展相当缓慢,19 世纪后,计算圆周率的世界纪录频频刷新。整个 19 世纪,可以说是圆周率的手工计算量最大的世纪。

公元 460 年,我国古代数学家祖冲之用刘徽割圆术,算得圆周率为 3.1415926,第一次把圆周率精确地算到小数点后第七位,这个纪录保持了 1000 多年。以后不断有人把它算得更为精确。1596 年,荷兰数学家卢道夫算得有 35 位小数的圆周率。

值得一提的是英国学者沈克士整整花了 20 年的时间,在 1873 年把 π 的值从小数点后 500 位推进到 707 位之多!在没有电子计算机的当时,沈克士花了毕生的精力才创造了这个轰动一时的纪录。人们对他的计算结果深信不疑,并在他的墓碑上刻下其一生心血的结晶:带有 707 位小数的 π 值。直到 1937 年巴黎世博会发现馆的天井里,依然显赫地刻着沈克士求出的 π 值。但是 20 世纪 40 年代,曼彻斯特大学的费林生对它产生了怀疑。他想 π 这个数是一个没有规则的无理数(有的无理数的数字出现是有规律的,例如 2.02002000200002…),也就是说 0,1,2,…,9 这 10 个数字出现是带有偶然性的。这些偶然出现的数字有什么规律呢?他统计了 π 的 608 位小数,得到了表 1.1。

表 1.1 费林生对沈克士所求 π 值小数的统计

数　字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
出现的次数 n_i	60	62	67	68	64	56	62	44	58	67

由表 1.1 可以发现:多数的数字出现的频率(即在 608 个数字中所占的比例)都与 1/10 的偏差不大,而数字 7 却出现的特别少。他想这种偶然出现的情况不会对某一、二个数字持有“偏见”,各个数字出现的可能性大约应当相等才对(且不说这个猜想是否真有道理)。因此他决定自己来重算一次。从 1944 年 5 月到 1945 年 5 月,他用了整整一年时间,终于发现沈克士

计算的 π 值只有前 527 位是正确的，也就是沈克士在 528 位之后发生了计算的错误。可惜，沈克士 20 年的心血几乎全被勾销。后美国人伦奇发表了 π 的 808 位小数，但费林生也很快发现其中第 723 位小数以后是错误的。至此，人工计算 π 值的最高纪录是算到小数点后 808 位。

当然，需要指出的是基于表 1.1 的数据，可以通过拟合优度 χ^2 检验的方法来检验 0，1，2，…，9 这 10 个数字出现的概率都是 1/10。如给定显著性水平 $\alpha=0.05$，其 χ^2 检验统计量为

$$\begin{aligned}\chi^2&=\sum_{i=0}^{9}\frac{(n_i-60.8)^2}{60.8}\\&=\frac{0.8^2+1.2^2+6.2^2+7.2^2+3.2^2+4.8^2+1.2^2+16.8^2+2.8^2+6.2^2}{60.8}\\&=\frac{0.64+1.44+38.44+51.84+10.24+23.04+1.44+282.24+7.84+38.44}{60.8}\\&=\frac{455.6}{60.8}=7.49\end{aligned}$$

由于 $7.49<\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，所以在置信水平 0.95 下，还是可以认为 0，1，2，…，9 这 10 个数字在 608 个数字中是均匀出现的。

进入 20 世纪，随着计算机的发明，圆周率的计算有了突飞猛进。20 世纪 50 年代，人们用计算机算得了 10 万位小数的圆周率，70 年代又刷新到 150 万位。1987 年 1 月 13 日，日本的金田康正算出了 133544000 位小数的圆周率！印出的数字占两万页！借助于超级计算机，人们已经得到了圆周率的 2061 亿位精度。

2. 实验求 π 值

求 π 的方法中，其中最简单的方法莫过于实验法，但实验法的应用却是以近代概率论的诞生为前提的。1777 年，法国自然科学家蒲丰出版了《能辨是非的算术试验》一书，其中给出了著名的“蒲丰问题”，提供了实验求 π 值的一种方法。在一张纸上画满间隔为 a 的等距离平行线，向此纸随意投一根长为 $l(l<a)$ 的针，由几何概率可得针与平行线相交的概率 $p=\frac{2l}{\pi a}$。而重复试验 n 次，m 为针与线相交数，则根据概率的统计定义可得 p 的一近似值 $\hat{p}=\frac{m}{n}$。当 n 足够大时，有：$\frac{2l}{\pi a}=\frac{m}{n}$，得 π 的一个近似值 $\hat{\pi}=\frac{2nl}{ma}$。值得指出的是：为得到 π 的近似值，利用蒲丰的试验不仅需要长度为 l 的一根针和一张描出了间隔为 a 的平行线束的纸，而且要具有相当的耐心去机械地、长时间地投掷一根针。蒲丰提到他做的实验。某日，他请来满堂宾客，让大家向一张画好平行线的纸上随意投一些长为 $l=\frac{a}{2}$ 的缝衣针，结果，客人们莫名其妙地共投针 2212 枚，其中与平行线相交的有 704 枚，由此而得出 π 的近似值 $\hat{\pi}=\frac{n}{m}=\frac{2212}{704}=3.142$。

在蒲丰之后，又有不少科学家耐心去做过这种实验，并报告了他们所得的 π 值。当然所有的实验并不产生同样的结果，但如果 n 变大时，不同的这些值会很接近。据记载，德国法兰克福的沃尔夫教授在 1850～1860 年这 10 年间，把一根长为 36mm 的针共投掷了 5000 次，平行线束的间隔为 45mm，观察到针和线相交的次数为 2532 次，得到一个 π 估计值为 $\hat{\pi}=3.1596$，其误差为 0.6%。据说在 1890—1900 年间，一个叫福克斯的人“非常小心地”投掷了 1200 次，

得到 $\pi=3.1416$。求得 π 的最准确估计值的是意大利数学家拉兹瑞尼，他在 1901 年的《数学期刊》中详细报告了他所做实验的结果，在 3408 次投掷中，针和线相交了 1808 次，得到 $\frac{1808}{3408}\approx\frac{2l}{\pi a}=\frac{5}{3\pi}\left(已知\frac{l}{a}=\frac{5}{6}\right)$，给出 π 的一个估计值为 $\hat{\pi}=3.1415929$，这个值与真值的差仅在小数点后第 7 位上。

注意到上述计算过程中所出现的奇妙的数字，由这些数字漂亮地产生出比值 $\frac{355}{113}$，作为 π 的近似值，这个比值被认为是 π 含有小数的最佳有理近似值（实际上，这个值是公元 5 世纪中国数学家祖冲之算出来的）。π 的另一个含有较高位数的有理近似值为 $\frac{52163}{16604}$。从理论上讲，当投针次数 $n\to+\infty$ 时，$\hat{\pi}=\frac{2nl}{ma}$ 与 π 值相差无穷小，完全可以得到更加准确的 π 值。

令人难以置信的是，原子科学家们也采用了这种方法去计算由核裂变产生的中子，使环绕在它周围的防护层中的原子核迫停或使它偏转的概率。

另外，通过构造适当的概率模型，可以证明从正整数中随机选取两数，此两数互素的概率等于 $\frac{6}{\pi^2}$，利用这一结果也可以求得 π 的近似值。1904 年，查尔特勒斯做了这样的实验：让 50 多名学生每人随意写出 5 对正整数，在所得到的 250 对正整数中，他发现有 154 对互素，则求解 $\frac{154}{250}=\frac{6}{\pi^2}$，得 $\hat{\pi}=3.12093892$ 与 $\pi=3.14159265$ 仅差 0.02065373。

利用实验法求 π 值，虽远不如解析法便捷，且精确度也大为逊色，但它揭示了分析方法与概率论方法之间的联系，显示了概率论的技巧在越来越多的数学分支中的应用。

材料四　谚语背后的概率问题

我国著名数学家、数学教育家徐利治先生在谈及自己的治学经验时，曾概括为五句话：一是培养兴趣，二是追求简易，三是重视直观，四是学会抽象，五是不怕计算。后来他在中山大学、浙江大学给研究生作演讲时，又补充上一句话：六是喜爱文学。可见徐利治先生对于人文素质和数学学科之间的关系的独到见解。

概率论既有其别开生面的研究课题，又有其独特的概念和方法，并且需要一定的数学基础，因此增加了概率论的学习难度，降低了学生的学习兴趣。而谚语却以短小精炼为人熟知，并且有些谚语的背后隐藏着一定的概率知识。

1. 常在河边走，哪能不湿鞋

“常在河边走，哪能不湿鞋”，意思是有些事情虽然发生的可能性很小，但是如果次数多了，事情便非常有可能发生。这一点和概率论中的著名论断“小概率事件必然发生”具有高度一致性。

从概率的角度，虽然一次在河边走湿鞋的可能性非常小（其概率记为 p），但常在河边走，即在河边走的次数多了，便使得湿鞋这个小概率事件非常有可能发生。如果用 p 表示湿鞋小

概率事件A在河边走一次时发生的概率，则在河边走一次不湿鞋的概率是$1-p$。为便于说明，假设该常在河边走的人每一次在河边走的时候是否湿鞋都是相互独立的。

小概率事件A发生的概率是p，则第一次河边走时A发生的概率是p；第一次A不发生，而第二次河边走A发生的概率是$(1-p)p$；同样的前两次河边走时A都不发生，而在第三次A发生的概率是$(1-p)^2p$；依次类推，前$n-1$次河边走A都不发生，而第n次河边走时A发生的概率是$(1-p)^{n-1}p$。如此，可以得到一等比数列$p,(1-p)p,(1-p)^2p,\cdots,(1-p)^{n-1}p,\cdots$，且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}p=1$，这说明在河边走的次数足够多，湿鞋这一小概率事件$A$发生的概率为1，即湿鞋这一小概率事件肯定发生。

通过以上分析，“常在河边走，哪能不湿鞋”的谚语就不难理解了，同时这个谚语也提醒人们要注意防范小概率事件发生的危害，当然也可充分利用小概率事件的益处为人类服务。

2. 三个臭皮匠，顶个诸葛亮

人们常用“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”来表示对人多办法多，人多智慧多的一种赞誉。对“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”，可以从事件的独立性上来加以阐释。

假设三个皮匠A,B和C，他们各自单独解决某问题的概率分别为p_1,p_2和p_3，而诸葛亮单独解决该问题的概率为p_0。假定$p_i\ll p_0, i=1,2,3$，即三个皮匠任何一人与诸葛亮相比都有很大的差距，或者说$p_i(i=1,2,3)$比较小(比0.5小)，而p_0比较大(比0.5大)。那么这三个皮匠通过精诚合作有没有可能顶得上诸葛亮呢？

为了说明问题，假设这三个皮匠运用各自的智慧独立完成该问题，并且这三个皮匠只要有一个能够把问题解决，则该问题被解决。可用A,B与C分别表示皮匠A,B与C独立解决该问题，D表示诸葛亮解决该问题，E表示问题被皮匠解决，则

$$P(A)=p_1, P(B)=p_2, P(C)=p_3, P(D)=p_0, E=A+B+C$$

于是有

$$\begin{aligned}P(E)&=1-P(\overline{E})=1-P(\overline{A+B+C})=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})\\&=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\end{aligned}$$

为简单起见，令$p_1=p_2=p_3=p$，此时，$P(E)=1-(1-p)^3$。

如果$P(E)\geqslant P(D)$，即$1-(1-p)^3>p_0, 1-p_0>(1-p)^3, 1-p<\sqrt[3]{1-p_0}$，于是只要满足$p>1-\sqrt[3]{1-p_0}$，也就体现了“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”这句谚语的含义了。

例如，设$p=0.45, p_0=0.9$，此时$P(E)=1-(1-p)^3=1-0.45^3=0.90888>P(D)=0.9$，即三个智商一般的皮匠通过团结协作以0.00888的微弱优势胜过智商超群的诸葛亮。虽然赢得有些惊险，但也体现出了团队的力量。

3. 不要把鸡蛋放在一个篮子里

在风险投资中，如何规避风险并获得最大收益是投资的重要研究课题。其中“不要把鸡蛋放在一个篮子里”就是非常重要的投资原则之一。类似的原理在系统可靠性等领域中有广泛的应用。

设某系统由三个独立单元组成，每个单元正常工作的概率同为p，其中系统一先是由两个单元并联后再与另一单元串联构成的；系统二先是由两个单元串联后再与另一单元并联构成的；系统三是由三个单元串联而成的；系统四是由三个单元并联构成的。现考察这4个系统中

哪个更可靠。

设 $A_i, i=1,2,3,4$ 分别表示系统一、系统二、系统三和系统四正常工作，则有

系统一：$P(A_1)=p+p^2-p^3=p(1+p-p^2)$

系统二：$P(A_2)=p(2p-p^2)=p^2(2-p)$

系统三：$P(A_3)=p^3$

系统四：$P(A_4)=1-(1-p)^3$

为说明问题，取 $p=0.9$，此时

$$P(A_1)=0.9(1+0.9-0.9^2)=0.981, P(A_2)=0.9^2(2-0.9)=0.891$$

$$P(A_3)=0.9^3=0.729, P(A_4)=1-(1-0.9)^3=0.999$$

通过以上分析，可以看出相当于把鸡蛋分别放在三个篮子里的系统四最可靠，而把鸡蛋放在同一个篮子里的系统三最不可靠，而把鸡蛋放在两个篮子里的系统一和系统二的可靠性介于系统三与系统四之间。

4. 真金不怕火炼

“真金不怕火炼”往往用来比喻品质好，意志坚强的人经得起任何考验。在多局的比赛中，每局获胜概率大的队员或者球队也能经受住比赛局数增加的考验。

例如，甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为 p，假设各局胜负相互独立，试问对甲而言，采用“三局两胜”制有利，还是采用“五局三胜”制有利？

“三局二胜”制中，甲获胜的比分为 2∶0 或 2∶1，而 2∶0 表示前两局甲全部获胜，其概率为 p^2；2∶1 则表示前两局甲、乙各胜一局，第三局甲胜，其概率为 $C_2^1 p^2(1-p)$。因此甲获胜的概率为

$$p_1=p^2+C_2^1 p^2(1-p)=p^2(3-2p)$$

“五局三胜”制中，甲获胜的比分为 3∶0，3∶1 或 3∶2，而 3∶0 表示前三局甲全部获胜，其概率为 p^3；3∶1 表示前三局甲胜两局，乙胜一局，第四局甲胜，其概率为 $C_3^2 p^3(1-p)$；3∶2 则表示前四局中甲、乙各胜两局，第五局决胜局甲获胜，其概率为 $C_4^2 p^3 (1-p)^2$。因此甲获胜的概率为

$$p_2=p^3+C_3^2 p^3(1-p)+C_4^2 p^3 (1-p)^2=p^3[1+3(1-p)+6(1-p)^2]$$

比较“三局两胜”制和“五局三胜”制中甲获胜的概率，即

$$p_2-p_1=3p^2 (1-p)^2(2p-1)$$

由此得：当 $p>0.5$ 时，$p_2-p_1>0$，此时“五局三胜”制甲获胜的概率大；当 $p<0.5$ 时，$p_2-p_1<0$，此时“三局两胜”制甲获胜的概率大；当 $p=0.5$ 时，$p_2-p_1=0$，即对甲获胜没有影响。

最后可知：甲每局获胜的概率越大，则比赛设置的局数越多越有利，也就说明了真金的甲是不怕局数多的火锤炼的。

材料五　蒲丰投针问题的推广

平面上画有等距离的平行线，平行线间的距离为 $a(a>0)$，向平面上任意投掷一枚长为 l $(l<a)$ 的针，要求针与平行线相交的概率。这便是著名的“蒲丰投针问题”，记 A＝“针与平行

线相交”，则 $P(A)=\frac{2l}{\pi a}$。如果将这一问题进一步延伸，即向画有等距离平行线的平面任意地投一个三角形，三角形与平行线相交的概率等于多大呢？如果是一般的 n 边形又会如何呢？

问题一 平面上画有间隔为 $d(d>0)$ 的等距离的平行线，向平面任意地投一个三角形，其边长为 a,b,c（均小于 d），求三角形与平行线相交的概率。

这个问题直接解决比较困难，但经过分析其有这样一个特点：三角形与平行线相交，只可能有两种情形。第一种情形是三角形的两条边同时与平行线相交；第二种情形是三角形的一边与平行线重合。考虑到边与平行线重合的概率为零（从“蒲丰投针问题”可以看出针与平行线重合的概率为零），所以可以将情形二省略，仅考虑情形一。因此三角形与平行线相交这一事件是以下三个事件的并。(1)边长为 a,b 的两条边与平行线相交；(2)边长为 a,c 的两条边与平行线相交；(3)边长为 b,c 的两条边与平行线相交。易见这三个事件是两两互斥的，这样问题就转化为求三角形两条边同时与平行线相交的概率。为求这个概率，考虑到对三角形而言，互斥事件(1)与(2)的并事件恰好是边长为 a 的这条边（可看成是一枚针）与平行线相交这个事件，即成为“蒲丰投针问题”了，这便可以利用已知的结论将该问题解决。

记 A_1,A_2,A_3 分别表示边长为 a,b,c 的边与平行线相交，记 A_{12},A_{13},A_{23} 分别表示边长为 a,b 的两条边，边长为 a,c 的两条边，边长为 b,c 的两条边同时与平行线相交，记 A 表示三角形与平行线相交，则 $A=A_{12}\cup A_{13}\cup A_{23}$，且 A_{12},A_{13},A_{23} 是三个互斥事件，所以

$$P(A)=P(A_{12})+P(A_{13})+P(A_{23})$$

又因为 $A_1=A_{12}\cup A_{13},A_2=A_{12}\cup A_{23},A_3=A_{13}\cup A_{23}$，得

$$P(A_1)=P(A_{12})+P(A_{13}),P(A_2)=P(A_{12})+P(A_{23}),P(A_3)=P(A_{13})+P(A_{23})$$

由此得
$$P(A_{12})+P(A_{13})+P(A_{23})=\frac{1}{2}[P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)]$$

又
$$P(A_1)=\frac{2a}{\pi d},P(A_2)=\frac{2b}{\pi d},P(A_3)=\frac{2c}{\pi d}$$

得 $P(A_{12})+P(A_{13})+P(A_{23})=\frac{a+b+c}{\pi d}$，即 $P(A)=\frac{a+b+c}{\pi d}=\frac{L}{\pi d}$，其中 $L=a+b+c$。

将问题一再作一次延伸，如果向画有等距离平行线的平面任意地投一个凸 n 边形，这 n 边形与平行线相交的概率能否像问题一那样求出来呢？

问题二 平面上画有间隔为 $d(d>0)$ 的等距离平行线，向平面上任意地投一个凸 n 边形，其边长分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$（均小于 d），且最大的对角线（也称为凸形的直径，记为 R）也小于 d，求 n 边形与平行线相交的概率。

记 A_i 表示边长为 a_i 的边与平行线相交，A_{ij} 表示边长为 a_i,a_j 的两条边同时与平行线相交，$i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j$。记 A 表示 n 边形与平行线相交，则有

$$A=(A_{12}\cup A_{13}\cup\cdots\cup A_{1n})\cup(A_{23}\cup A_{24}\cup\cdots\cup A_{2n})\cup\cdots\cup A_{(n-1)n}$$

等号右端出现的事件两两互斥，故

$$P(A)=[P(A_{12})+P(A_{13})+\cdots+P(A_{1n})]+[P(A_{23})+P(A_{24})+\cdots+P(A_{2n})]+\cdots+P(A_{(n-1)n})$$

又 $A_1=A_{12}\cup A_{13}\cup A_{14}\cup\cdots\cup A_{1n},A_2=A_{21}\cup A_{23}\cup A_{24}\cup\cdots\cup A_{2n}$

$$A_3=A_{31}\cup A_{32}\cup A_{34}\cup\cdots\cup A_{3n},\cdots,A_n=A_{n1}\cup A_{n2}\cup A_{n3}\cup\cdots\cup A_{n(n-1)}$$

由于 $P(A_{ij})=P(A_{ji})$，则

$$[P(A_{12})+P(A_{13})+\cdots+P(A_{1n})]+[P(A_{23})+P(A_{24})+\cdots+P(A_{2n})]+\cdots+P(A_{(n-1)n})$$

$$=\frac{1}{2}[P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)]=\frac{1}{2}\left(\frac{2a_1}{\pi d}+\frac{2a_2}{\pi d}+\cdots+\frac{2a_n}{\pi d}\right)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\pi d}$$

即 $P(A)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\pi d}=\frac{L}{\pi d}$，其中，$L=\sum_{i=1}^{n}a_i$ 。

再仔细观察问题二的结论，$P(A)=\frac{L}{\pi d}$，而 $L=\sum_{i=1}^{n}a_i$ 即为凸 n 边形的周长。于是可以将问题二作进一步的推广，即所谓的“蒲丰弯针问题”。

问题三 在平面内有间隔为 d 的等距平行线，将一任意形状的平面弯针投掷到平面上，则弯针与平行线相交的概率为 $\frac{L}{\pi d}$，其中 L 为包含弯针之最小凸形的周长，且最小凸形的直径 $R\leqslant d$。

材料六 计算概率中的差分方法

概率的计算方法呈现多样性，差分方法作为表示概率变化情况的数学模型，成为研究随机现象的有力和有用的方法。它是利用全概率公式列出差分方程，然后通过解差分方程求得概率。解差分方程，一般通过逐次递推，最后由初值得出差分方程的解。通常一阶差分方程求解过程如下。

$$\begin{aligned}p_n&=cp_{n-1}+d\text{（其中，}c\neq 1,d\text{ 为常数）}\\&=c(cp_{n-2}+d)+d=c^2p_{n-2}+(c+1)d=c^3p_{n-3}+(c^2+c+1)d=\cdots\\&=c^{n-1}p_1+(c^{n-2}+c^{n-3}+\cdots+c+1)d=c^{n-1}p_1+\frac{1-c^{n-1}}{1-c}d\end{aligned}$$

下面通过几个例子介绍计算概率的方法——差分方法。

例 1 设有 N 个袋子，每个袋子中装有 a 只黑球，b 只白球，从第一个袋中取出一球放入第二个袋中，然后从第二个袋中取出一球放入第三个袋中，如此下去，问从最后一个袋中取出一球并为黑球的概率是多少？

解 设 p_i 为从第 i 个袋中取出黑球的概率，则由全概率公式得

$$p_i=p_{i-1}\frac{a+1}{a+b+1}+(1-p_{i-1})\frac{a}{a+b+1}=\frac{1}{a+b+1}p_{i-1}+\frac{a}{a+b+1},i=2,3,\cdots,N,p_1=\frac{a}{a+b}$$

显然有

$$p_1=p_2=\cdots=p_N=\frac{a}{a+b}$$

例 2 设 r 个人相互传球，每传一次时，传球者等可能地传给其余 $r-1$ 人中之一，试求第 n 次传球时，此球由最初发球者传出的概率 p_n（发球那一次算作第 0 次）。

解 由全概率公式得

$$p_n=p_{n-1}\cdot 0+(1-p_{n-1})\frac{1}{r-1}=-\frac{1}{r-1}p_{n-1}+\frac{1}{r-1},n\geqslant 1,p_0=1$$

由差分方程的递推公式得