

# 结构力学的 样条函数方法及程序

秦荣 李秀梅 著



科学出版社

# 结构力学的样条函数 方法及程序

秦 荣 李秀梅 著

科学出版社

## 内 容 简 介

本书主要介绍结构力学的样条函数方法及其应用,共十三章,主要内容包括样条函数基本理论及基本方法、样条有限点法、样条有限元法、样条子域法、样条加权残数法、样条边界元法、QR法、程序设计及其应用,内容丰富、新颖、富有创造性,为力学及工程学开辟了新的研究方向。

本书可供从事固体力学、结构力学及桥梁工程等研究的科研人员及高等院校相关专业的师生参考。

---

### 图书在版编目(CIP)数据

结构力学的样条函数方法及程序/秦荣,李秀梅著.—北京:科学出版社, 2015

ISBN 978-7-03-044097-6

I. ①结… II. ①秦… ②李… III. ①结构力学-样条函数-研究 IV. O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 078239 号

---

责任编辑:童安齐 / 责任校对:王万红  
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号  
邮政编码:100717  
<http://www.sciencep.com>

北京中科印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2015 年 5 月第 一 版 开本:787×1092 1/16  
2015 年 5 月第一次印刷 印张:24 3/4

字数:570 000

定价:110.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(中科))

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62137026

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

# 前 言

目前,国内外对结构分析主要采用有限元法。有限元法产生后,为结构分析开创了一个新局面,贡献很大,但在实践中,它的缺陷也日益暴露。由于有限元法是一种网格法,为大型复杂结构分析带来了巨大的困难及严重的缺陷,需要另外创立结构分析的新方法。因此,国内外在研究有限元法的同时,还致力于研究结构分析的新方法,企图为结构分析开辟一条新的途径。

1976~1978年,作者在致力于研究结构分析的新理论新方法中,发现了样条函数与加权残数法、变分原理、广义变分原理、虚功原理、广义虚功原理及积分方程法耦合起来,可以另成新体系,可创立各种独特的新方法。1978年以来,作者围绕上述发现,致力于科学研究,创立了结构分析的新理论新方法,内容包括新的本构关系、新的变分原理与广义变分原理及新方法,其中新方法包括样条有限点法、样条加权残数法、样条边界元法、样条子域法、QR法、样条无网格法、样条无限域-QR法。这些新理论和新方法,不仅奠定了样条半解析法及样条无网格法的理论基础,而且为工程结构的分析及研究开拓了新途径。上述新理论新方法已在国内外公开发表,被引用、收录很多,影响很广。上述成果获广西自然科学优秀论文成果奖一等奖1项,获省部级科技进步奖二等奖7项。经同行专家鉴定认为,这些成果为国内外首创,达到了国际先进水平,有广泛的应用前景。

本书共十三章,其内容均是在上述成果的基础上撰写而成,内容丰富、新颖、富有创造性。因此,本书对推动固体力学、结构力学、计算力学及结构分析的科学发展具有重大意义。

本书主要介绍结构力学的新方法及其程序,重点介绍作者的研究成果:第一章主要介绍B样条函数的理论、方法及其C程序设计;第二章主要介绍样条有限点法的理论、方法及其程序;第三章主要介绍样条有限元法的理论、方法及其C程序设计;第四章主要介绍样条子域法的理论、方法及其C程序设计;第五章主要介绍样条加权残数法的理论、方法及其C程序设计;第六章主要介绍结构自由振动分析的新方法及其C程序设计;第七章主要介绍结构动力反应分析的新算法及其C程序设计;第八章主要介绍结构稳定性分析的新方法及其C程序设计;第九章主要介绍样条边界元法的理论、方法;第十章主要介绍扇形薄板分析的新方法;第十一章主要介绍QR法的理论方法及其C程序设计;第十二章主要介绍样条函数方法的推广应用;第十三章主要介绍样条函数方法的收敛性。

1983年以来,上述内容对土木建筑工程学院的研究生讲授过,反映很好。

本书的出版及相关内容的研究受到“广西大学中西部高校提升综合实力计划”和“广西理工科学实验中心重点项目(LGZX201101)”的资助,借此机会表示衷心感谢!

在本书的写作过程中,得到许多同行的热情关心及大力支持,我的硕士生及博士生利用这些新理论新方法编制程序,算过许多例题,为本书做过许多有益的工作,特此表示衷心感谢!特将本书献给帮助过作者的人们!

由于作者水平有限,书中有不妥之处在所难免,敬请读者指正。

秦 荣

2015年3月18日

# 目 录

## 前言

第一章 样条函数及其程序	1
1.1 样条函数的概念	1
1.2 B 样条函数的构造方法	4
1.2.1 $\delta$ 函数的一些性质	4
1.2.2 B 样条函数的构造方法	5
1.3 B 样条函数的性质	9
1.4 B 样条函数的数值计算方法	15
1.4.1 $\varphi_n(x)$ 的数值计算方法	15
1.4.2 $\varphi_n(x)$ 的求导数方法	17
1.4.3 $\varphi_n(x)$ 的求积分方法	20
1.4.4 B 样条函数的数值积分方法	21
1.5 B 样条函数乘积的积分方法	22
1.5.1 利用分部积分法对 B 样条函数乘积进行积分的方法	22
1.5.2 计算例题	25
1.6 奇次样条函数插值法	29
1.7 变分原理及变分法	31
1.7.1 变分原理	31
1.7.2 变分法	34
1.8 基函数的构造方法	37
1.8.1 参数法	37
1.8.2 凑合法	38
1.8.3 $\phi(x)$ 的性质	39
1.8.4 五次 B 样条函数构成的基函数	40
1.8.5 新的位移函数	41
1.9 分部积分公式	42
1.10 附录 (常用的 C 程序)	44
1.10.1 三次 B 样条函数	44
1.10.2 五次 B 样条函数	44
1.10.3 $n$ 次 B 样条函数	45
1.10.4 $n$ 次 B 样条基函数乘积的积分	46
1.10.5 常用的 B 样条基函数	48
主要参考文献	49

第二章 样条有限点法及其程序	50
2.1 基本原理	50
2.1.1 计算方法	50
2.1.2 弹性地基梁 C 程序设计	54
2.2 薄板的弯曲问题	56
2.2.1 计算原理	56
2.2.2 计算例题及计算方法	59
2.2.3 简化计算方法	63
2.3 解决偶联问题的方法	66
2.3.1 第一种方法	66
2.3.2 第二种方法	69
2.4 扁壳问题	72
2.4.1 扁壳的总势能泛函	72
2.4.2 基本方程	73
2.4.3 对边界条件的处理	75
2.4.4 简化计算方法	76
2.4.5 拉格朗日乘子法	77
2.5 圆柱薄壳	79
2.6 考虑剪切变形的板	83
2.6.1 基本方程	83
2.6.2 拉格朗日乘子法	85
2.6.3 计算例题	86
2.7 利用对称条件简化计算	87
2.8 斜板的解法	88
2.9 荷载向量	90
2.9.1 梁的弯曲	90
2.9.2 板壳问题	92
2.9.3 弹性力学平面问题	94
2.10 五次 B 样条函数的应用	96
2.11 新的位移函数	98
2.12 附录 (重要数据及程序)	99
2.12.1 三次 B 样条函数的 $A_x \sim L_x$ 的具体形式	99
2.12.2 对称情况	102
2.12.3 几种积分的具体形式	104
2.12.4 $Z_m(y)$ 及其导数的积分值	105
2.12.5 引入边界条件的问题	106
主要参考文献	108

第三章 样条有限元法及其程序	109
3.1 位移函数	109
3.2 板壳问题	112
3.2.1 基本方程	112
3.2.2 荷载列阵	114
3.2.3 位移的求法	117
3.2.4 弯矩及扭矩的求法	118
3.2.5 薄膜内力的求法	118
3.2.6 薄板弯曲问题的程序设计	119
3.2.7 计算例题	122
3.3 弹性地基梁的解法	123
3.3.1 基本方程	123
3.3.2 确定地基刚度矩阵	125
3.3.3 计算方法	129
3.4 弹性地基板的解法	130
3.4.1 基本方程	130
3.4.2 地基刚度矩阵	132
3.4.3 计算方法、程序及例题	133
3.5 斜板的解法	136
主要参考文献	137
第四章 样条子域法及其程序	138
4.1 位移函数	138
4.1.1 梁的挠度函数	138
4.1.2 单样条位移函数	139
4.1.3 双样条位移函数	141
4.1.4 双向单样条位移函数	143
4.2 样条子域法	143
4.2.1 子域分析	143
4.2.2 梁的整体分析	144
4.2.3 程序设计	145
4.3 单样条子域法	149
4.3.1 子域分析	149
4.3.2 整体分析	151
4.3.3 计算例题及方法	153
4.4 双样条子域法	154
4.4.1 子域分析	154
4.4.2 整体分析	155

4.5	双向单样条子域法	157
4.6	板壳问题	157
4.6.1	单样条子域法	157
4.6.2	双样条子域法	158
4.7	多肢剪力墙	160
4.7.1	位移函数	160
4.7.2	子域分析	162
4.7.3	整体分析	163
	主要参考文献	164
<b>第五章</b>	<b>样条加权残数法及其程序</b>	<b>165</b>
5.1	基本概念	165
5.2	试函数	168
5.2.1	五次样条函数	168
5.2.2	梁的振型函数	173
5.2.3	板条函数	178
5.3	样条配点法	181
5.3.1	计算原理	181
5.3.2	双样条配点法	183
5.3.3	利用对称性简化计算	185
5.3.4	单样条配点法	186
5.3.5	计算例题及方法	189
5.4	样条伽辽金法	190
5.4.1	伽辽金法	190
5.4.2	双样条伽辽金法	192
5.4.3	样条伽辽金配点法	193
5.4.4	双样条伽辽金配点法	196
5.4.5	单样条伽辽金法	198
5.4.6	单样条伽辽金配点法	200
5.4.7	程序设计	203
5.4.8	计算例题	206
5.5	样条最小二乘法	207
5.5.1	最小二乘法	207
5.5.2	双样条最小二乘配点法	208
5.5.3	单样条最小二乘配点法	209
5.6	样条矩量法	211
5.6.1	样条矩量配点法	211
5.6.2	双样条矩量配点法	213
5.6.3	单样条矩量配点法	213



5.7 样条能量配点法	215
5.7.1 样条能量配点法	215
5.7.2 双样条能量配点法	216
5.7.3 单样条能量配点法	217
5.8 样条子域配点法	219
5.8.1 位移函数	219
5.8.2 样条子域配点法	224
5.9 稳定函数的应用	225
5.10 扁壳的解法	226
5.10.1 扁壳的微分方程及边界条件	226
5.10.2 三种双样条配点法	228
5.10.3 单样条最小二乘配点法	230
5.10.4 四边简支球面扁壳的简化计算方法	232
5.11 附录(重要数据及程序)	235
5.11.1 样条基函数系数矩阵 $[Q]$	235
5.11.2 $[A_x]$ , $[B_x]$ 及 $[C_x]$ 矩阵	237
5.11.3 能量配点法用的数据	238
5.11.4 薄板位移函数的其他形式	239
主要参考文献	240
<b>第六章 结构振动及其程序</b>	<b>241</b>
6.1 板壳振动的泛函	241
6.2 薄板的横向自由振动	242
6.3 扁壳的自由振动	247
6.4 附录(重要数据及程序)	249
主要参考文献	252
<b>第七章 求结构动力反应的样条函数方法及其程序</b>	<b>253</b>
7.1 基本方程	253
7.2 试函数	254
7.3 振型叠加法	255
7.3.1 样条最小二乘法	256
7.3.2 样条伽辽金法	256
7.3.3 样条配点法	257
7.3.4 样条最小二乘配点法	257
7.3.5 样条伽辽金配点法	258
7.3.6 程序设计	258
7.4 直接积分法	261
7.4.1 样条伽辽金法	262

7.4.2 三种样条配点法 .....	262
7.5 结构动力反应的新算法 .....	264
7.5.1 建立递推格式 .....	264
7.5.2 建立无条件稳定算法 (SSWRM-1) .....	266
7.5.3 建立条件稳定算法 .....	268
7.6 数值稳定性 .....	269
7.7 计算例题 .....	270
7.8 结语 .....	272
7.9 附录 (重要数据及程序) .....	273
7.9.1 $[A]$ , $[D]$ 及 $[F]$ 的具体形式 .....	273
7.9.2 试函数 .....	274
主要参考文献 .....	274
<b>第八章 结构的稳定性及其程序 .....</b>	<b>276</b>
8.1 板壳稳定性的泛函 .....	276
8.2 压杆的稳定函数 .....	276
8.3 稳定函数的正交性 .....	280
8.4 板壳的稳定性 .....	283
8.5 程序及算例 .....	285
8.5.1 薄板稳定分析的程序设计 .....	285
8.5.2 计算例题 .....	287
8.6 简化计算方法 .....	288
主要参考文献 .....	289
<b>第九章 样条边界元法 .....</b>	<b>290</b>
9.1 基本原理 .....	290
9.2 薄板的样条边界元法 .....	293
9.3 简化方法 .....	297
9.4 计算例题 .....	300
9.5 结语 .....	300
主要参考文献 .....	301
<b>第十章 扇形薄板的样条函数方法 .....</b>	<b>302</b>
10.1 基本方程 .....	302
10.2 双样条最小二乘配点法 .....	304
10.3 单样条最小二乘配点法 .....	307
10.4 双样条能量配点法 .....	309
10.5 单样条能量配点法 .....	311
10.6 小结 .....	312

主要参考文献 .....	312
<b>第十一章 QR 法及其程序设计 .....</b>	<b>313</b>
11.1 结构位移插值函数 .....	313
11.2 单元离散信息 .....	315
11.3 总势能泛函及结构刚度方程 .....	318
11.4 位移及内力的计算 .....	319
11.5 单元 QR 法变换的简化 .....	320
11.5.1 一般离散结构 .....	320
11.5.2 规则离散结构 .....	321
11.6 平面刚架静力分析的 QR 法程序设计 .....	322
11.6.1 程序主要的数据结构 .....	322
11.6.2 QR 法的程序流程图 .....	323
11.6.3 主要的 C 程序模块 .....	325
11.7 计算例题 .....	336
11.8 结语 .....	340
主要参考文献 .....	340
<b>第十二章 样条函数方法的推广应用 .....</b>	<b>342</b>
12.1 利用样条有限点法计算复杂支承的薄板 .....	342
12.1.1 位移函数 .....	342
12.1.2 基本方程 .....	343
12.1.3 计算例题 .....	345
12.2 双向样条能量配点法 .....	346
12.2.1 位移函数 .....	346
12.2.2 基本原理 .....	347
12.3 双向单样条子域法 .....	349
12.3.1 薄板子域的挠度函数 .....	349
12.3.2 子域分析 .....	349
12.3.3 整体分析 .....	350
12.4 $X(x)$ 及 $Y(y)$ 的选用问题 .....	352
12.4.1 简单支承的情况 .....	352
12.4.2 带柱支承的情况 .....	352
12.4.3 子域的情况 .....	353
12.4.4 同一边界上有不同支承的情况 .....	353
12.4.5 混合支承情况 .....	353
12.4.6 对称情况 .....	354
12.5 非规则薄板的分析方法 .....	354
12.5.1 静力分析 .....	355

12.5.2	动力分析	357
12.5.3	计算例题	358
12.5.4	非对称区域的非规则薄板	360
12.6	非规则薄壳的分析方法	360
12.6.1	位移函数	361
12.6.2	静力分析	361
12.6.3	动力分析	363
12.6.4	计算例题	363
12.7	规则扁壳的分析方法	364
12.7.1	位移函数	364
12.7.2	基本方程	365
12.8	附录	367
12.8.1	$A_x, B_x, C_x, F_x$ 及 $H_x$ 的具体形式	367
12.8.2	$[g_x], [g'_x], [g''_x]$ 的具体形式	367
12.8.3	样条子域法	369
	主要参考文献	369
<b>第十三章 样条函数方法的收敛性</b>		<b>370</b>
13.1	基本概念	370
13.1.1	线性空间	370
13.1.2	内积空间	370
13.1.3	Hilbert 空间	371
13.1.4	等价模	371
13.1.5	Schwarz 不等式	371
13.1.6	线性算子	372
13.2	样条插值余项估计	373
13.2.1	皮亚诺核定理	373
13.2.2	两个引理	374
13.2.3	余项估计	374
13.3	样条有限点法的收敛性	376
13.3.1	最小势能原理	376
13.3.2	样条有限点法的收敛性	377
13.3.3	能量模估计	379
13.4	样条加权残数法的收敛性	379
13.4.1	$L^2(\Omega)$ 空间	379
13.4.2	收敛性问题	380
	主要参考文献	381

# 第一章 样条函数及其程序

样条函数是现代函数逼近的一个十分活跃的分支，是计算方法的一个重要基础。它应用很广泛，对计算力学和计算数学的发展有很重要的作用。

## 1.1 样条函数的概念

样条函数来源于实际中的样条曲线。本节从梁的微分方程出发来定义样条函数。

梁的微分方程为

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) \quad (1.1)$$

式中： $q(x)$ 为梁上的分布荷载； $w$ 为梁的挠度函数。

梁上分布荷载 $q$ 和截面剪力 $Q$ 的关系为

$$q = \frac{dQ}{dx}$$

现以悬臂梁为例，如果悬臂梁在 $x=0$ 处受一个单位集中荷载( $P=1$ )作用(图 1.1)，则这个梁的剪力方程为

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的左极限为零，右极限为1。因此，这个悬臂梁的剪力图在集中荷载作用点( $x=0$ )发生一个突变，描述这种突变现象的函数 $\sigma(x)$ 叫单位跳跃函数。 $x=0$ 是 $\sigma(x)$ 的间断点。

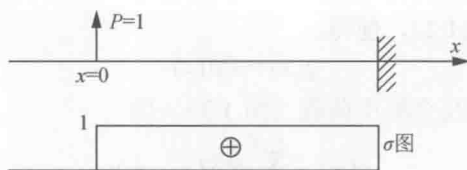


图 1.1 悬臂梁及其剪力

如果悬臂梁在 $x=0$ 处作用一个集中荷载 $P$ ，则这个梁的剪力方程为

$$Q(x) = P\sigma(x)$$

这时，式(1.1)中的 $q(x)$ 为

$$q(x) = \frac{dQ}{dx} = P \frac{d\sigma(x)}{dx} = P\sigma'(x) \quad (1.2)$$

在古典意义下， $\sigma(x)$ 在 $x=0$ 处的导数不存在。但是导数是差商的极限，因此可以从研究 $\sigma(x)$ 的差商入手。

规定 $\bar{\Delta}$ 代表以步长为 $h$ 的对称差分算子，则

$$\bar{\Delta}\sigma(x) = \sigma\left(x + \frac{h}{2}\right) - \sigma\left(x - \frac{h}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |x| > \frac{h}{2} \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } |x| < \frac{h}{2} \text{ 时} \end{cases}$$

因此,  $\sigma(x)$  的差商为

$$\delta_h(x) = \frac{\bar{\Delta}}{h}\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |x| > \frac{h}{2} \text{ 时} \\ \frac{1}{h}, & \text{当 } |x| < \frac{h}{2} \text{ 时} \end{cases}$$

当  $h$  趋于零 ( $h \rightarrow 0$ ) 时, 上式便变为

$$\delta(x) = \sigma'(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时} \\ \infty, & \text{当 } x=0 \text{ 时} \end{cases} \quad (1.3)$$

这就是  $\sigma(x)$  对  $x$  的导数。  $\delta_h(x)$  和  $\delta(x)$  的图形如图 1.2 所示。

因为在古典意义下,  $\sigma'(x)$  在  $x=0$  处没有意义, 因此式 (1.3) 是一种形式导数。这个导数叫狄拉克 (Dirac) 的  $\delta$  函数。由此可知,  $\delta$  函数是单位跳跃函数的广义导数。考虑到微分与积分互为逆运算, 则  $\delta(x)$  的积分为

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx \quad (1.4)$$

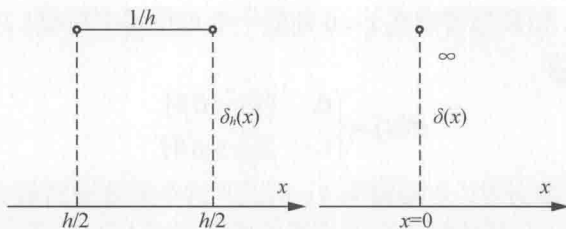


图 1.2  $\delta_h(x)$  和  $\delta(x)$

把式 (1.4) 代入式 (1.2), 便得

$$q(x) = P\delta(x)$$

由此可知, 如果梁上作用几个集中荷载 (图 1.3), 则

$$q(x) = \sum_{i=1}^{N-1} P_i \delta(x - x_i)$$

这时梁的剪力方程  $Q(x)$  是一个按段为常数的阶梯函数 (图 1.3), 即

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{N-1} P_i \sigma(x - x_i)$$

其中  $x_i$  为  $Q(x)$  的间断点。在间断点处,  $Q(x)$  的左、右极限都存在, 但不相等。它们之差叫剪力的跳跃量, 即

$$[Q(x_i)] = Q(x_i + 0) - Q(x_i - 0) = P_i$$

其中

$$\sigma(x - x_i) = (x - x_i)_+^0 = \begin{cases} 1, & \text{当 } x - x_i > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x - x_i < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

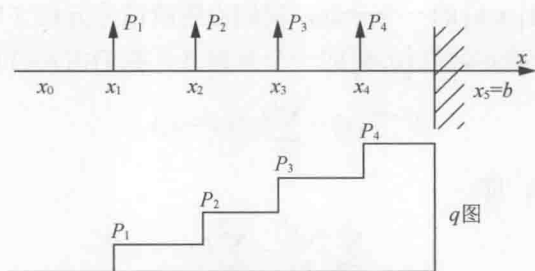


图 1.3 悬臂梁及其剪力

设  $EI = 1$ ,  $w = S(x)$ , 则式 (1.1) 便变为

$$S^{(4)}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} P_i \sigma(x - x_i) \quad (1.5)$$

式中:  $S^{(4)}(x)$  是  $S(x)$  对  $x$  的四阶导数。  $P_i$  向上为正, 向下为负。

式 (1.5) 是一个四阶常微分方程, 它的一般解为

$$S(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{2!} + \frac{a_3 x^3}{3!} + \frac{\sum_{i=1}^{N-1} b_i (x - x_i)_+^3}{3!} \quad (1.6)$$

式中:  $b_i = P_i$ ;  $(x - x_i)_+^n$  为截断单项式, 对于任一正整数  $n$ , 定义为

$$(x - x_i)_+^n = \begin{cases} (x - x_i)^n, & \text{当 } x - x_i \geq 0 \\ 0, & \text{当 } x - x_i < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

如果以悬臂梁全跨为给定区间  $[a, b]$ , 则式 (1.6) 有下列性质:

(1) 在每个子区间  $(x_i, x_{i+1})$  上, 它是三次多项式。

(2)  $S(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ ; 这里  $C^2(-\infty, \infty)$  表示整个实轴上具有二阶连续导数的全体函数的集合, 符号  $\in$  表示属于的意思。

(3) 在  $x_i$  处,  $S(x)$  的三阶导数的左、右极限存在, 但不相等, 它们之差为

$$b_i = S^{(3)}(x_i + 0) - S^{(3)}(x_i - 0)$$

式中:  $b_i$  为  $S(x)$  在  $x_i$  处三阶导数的跳跃量。

(4) 当  $b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, N-1)$  时, 则式 (1.6) 就退化为普通的三次多项式。

因此, 式 (1.6) 与普通的三次多项式不同, 是一个分段光滑函数。根据这些特性, 人们提出样条函数。

样条函数在数学上有严格的定义: 对于给定区间  $[a, b]$  的一个分划

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

如果  $S(x)$  满足下列条件:

(1)  $S(x)$  在每个子区间  $(x_i, x_{i+1})$  是  $n$  次多项式。

(2)  $S(x)$  及其  $1, 2, \dots, (n-1)$  阶导数在  $[a, b]$  上连续, 则称  $S(x)$  是对应于分划  $\Delta$  的  $n$  次多项式样条函数, 简称  $n$  次样条函数。其中  $x_i$  称为样条结点。

由上述可知, 式 (1.6) 是一个三次样条函数, 因此在集中荷载作用下, 梁的挠度函数就是我们定义的三次样条函数。

前面,对给定区间 $[a, b]$ 的一个分划,我们由四阶微分方程(1.5)建立了三次样条函数。由此可知,对于给定区间 $[a, b]$ 的一个分划 $\Delta$ ,我们由 $n+1$ 阶微分方程

$$S^{(n+1)}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} b_i \delta(x - x_i) \quad (1.8)$$

可以建立 $n$ 次样条函数,即

$$S(x) = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{a_k x^k}{k!} + \sum_{i=1}^{N-1} b_i (x - x_i)_+^n}{n!} \quad (1.9)$$

式(1.9)有下列性质:

(1) 在每个子区间 $(x_i, x_{i+1})$ 上它是 $n$ 次多项式。

(2)  $S(x) \in C^{n-1}(-\infty, \infty)$ 。这里 $C^{n-1}(-\infty, \infty)$ 表示整个实轴上具有 $n-1$ 阶连续导数的全体函数的集合。

(3)  $S^n(x)$ 在 $x_i$ 点的左、右极限存在,但不相等,有跳跃量

$$[S^n(x_i)] = S^n(x_i + 0) - S^n(x_i - 0) = b_i \quad (1.10)$$

式中: $S^n(x)$ 是 $S(x)$ 对 $x$ 的 $n$ 阶导数。

(4) 当 $b_i = 0 (i=1, 2, \dots, N-1)$ 时,则式(1.9)退化为普通的 $n$ 次多项式。

因此,式(1.9)符合样条函数的定义,是一个 $n$ 次样条函数。由于样条函数是一个分段多项式,利用这样的函数去逼近任意函数,自然具有更大的灵活性和适应性,使许多问题获得满意的解决。

样条函数也可以利用基本样条函数的线性组合来构造,即

$$S(x) = \sum_{i=-P+1}^{N+P-1} C_i \varphi_n \left( \frac{x}{h} - i \right)$$

式中: $C_i$ 是样条结点参数; $P = (n+1)/2$ ;  $\varphi_n \left( \frac{x}{h} - i \right)$ 是 $n$ 次基本样条函数,简称B样条函数。

在计算力学中,利用B样条函数来构造位移函数及应力函数是一个行之有效的办法。利用B样条函数可以创造出新的计算方法,因此本书着重阐述B样条函数方法。

## 1.2 B样条函数的构造方法

因为样条函数与 $\delta$ 函数有密切的内在联系,因此我们可以利用 $\delta$ 函数来构造B样条函数。为此,先介绍一些 $\delta$ 函数的性质。

### 1.2.1 $\delta$ 函数的一些性质

(1)  $\delta$ 函数是一个偶函数,即 $\delta(-x) = \delta(x)$ 。

(2) 如果 $a < 0 < b$ ,则 $\int_a^b \delta(x) dx = 1$ 。

(3) 如果函数 $f(x)$ 在 $x_i$ 处连续,则



$$\int_a^b \delta(x-x_i)f(x)dx = \begin{cases} f(x_i), & a < x_i < b \\ 0, & x_i < a < b \end{cases} \quad (1.11)$$

证明: 设  $t = x - x_i$ , 则

$$t_1 = a - x_i, \quad t_2 = b - x_i, \quad dt = dx$$

因此

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(x-x_i)f(x)dx &= \int_{t_1}^{t_2} \delta(t)f(x_i+t)dt \\ &= \sigma(t)f(x_i+t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t)f'(x_i+t)dt \\ &= \sigma(t_2)f(x_i+t_2) - \sigma(t_1)f(x_i+t_1) \\ &\quad - \int_{t_1}^0 \sigma(t)f'(x_i+t)dt - \int_0^{t_2} \sigma(t)f'(x_i+t)dt \end{aligned} \quad (1.12)$$

如果  $a < x_i < b$ , 则  $t_1 < 0$ ,  $t_2 > 0$ 。又因为

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } t < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

因此由式 (1.12) 可得

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(x-x_i)f(x)dx &= \sigma(t_2)f(x_i+t_2) - \int_0^{t_2} f'(x_i+t)dt \\ &= f(x_i+t_2) - f(x_i+t) \Big|_0^{t_2} = f(x_i), \quad a < x_i < b \end{aligned}$$

如果  $x_i < a < b$ , 则  $t_1 > 0$ ,  $t_2 > 0$ , 因此

$$\int_a^b \delta(x-x_i)f(x)dx = \sigma(t)f(x_i+t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t)f'(x_i+t)dt = 0, \quad x_i < a < b$$

故式 (1.11) 成立。

$\delta(x)$  有许多重要的性质, 这里只介绍其中几个, 作为研究 B 样条函数的一个基础。

## 1.2.2 B 样条函数的构造方法

若规定  $\bar{\Delta}$  代表以步长为  $h$  的对称差分算子, 则

$$\bar{\Delta}\sigma(x) = \sigma\left(x + \frac{h}{2}\right) - \sigma\left(x - \frac{h}{2}\right), \quad \delta_h(x) = \frac{\bar{\Delta}}{h}\sigma(x) = \frac{\bar{\Delta}}{h} \int_{-\infty}^x \delta(x)dx$$

又因为  $\frac{d}{dx} \approx \frac{\bar{\Delta}}{h}$ , 则由上式可得

$$\delta_h(x) \approx \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \delta(x)dx = \delta(x)$$

因此,  $\delta_h(x)$  是  $\delta(x)$  的一个近似, 但是  $\delta_h(x)$  不再像  $\delta(x)$  那样奇异了, 已成为通常的阶跃函数 (图 1.2)。

为什么  $\delta$  函数的一点取值  $\infty$  的奇异性被克服了呢? 其原因是由于对它作积分的结果。如果从  $\delta_h(x)$  出发, 对它再积分一次, 接着差商一次可得

$$\delta_1(x) = \frac{\bar{\Delta}}{h} \int_{-\infty}^x \delta_h(x)dx \approx \frac{\bar{\Delta}}{h} \int_{-\infty}^x \delta(x)dx = \delta_h(x) \approx \delta(x)$$