PASS 绿卡图书——走向成功的通行证

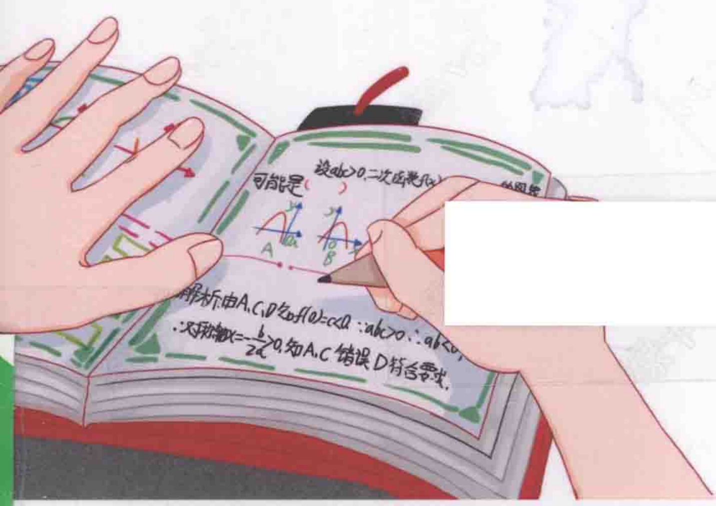
高中数学
万能解题模板

每天用得到，天天都可学

课本不会天天翻，补习班不会天天去，
每天用万能解题模板辅助做题，
才能天天学数学！

总主编：牛胜玉

第2次修订



用万能解题模板 **明确高考考什么，怎么考。**
用万能解题模板 **抓住解题关键，学会破题技巧。**
用万能解题模板 **规范解题步骤，掌握得分法则。**
用万能解题模板 **让你审题有思路，解题有速度，答题有准度，轻松得高分！**

模板探究　模板攻略　知识要点　模板演练　万能

176个解题模板+141个知识要点+782道高考真题，只要一本万能解题模板就能搞定高中数学！

湖南师范大学出版社

PASS® 绿卡图书——走向成功的通行证

高中数学
万能解题模板

每天用得到，天天都可学

课本不会天天翻，补习班不会天天去，
每天用万能解题模板辅助做题，
才能天天学数学！

总 主 编：牛胜玉
本册主编：亢喜岱 侯培培
陈 静 刘 丽
徐光莹 吕艳君

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学万能解题模板 / 牛胜玉编. — 长沙 : 湖南师范大学出版社, 2014.4

ISBN 978-7-5648-1614-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①牛… Ⅲ.①中学数学课 - 高中 - 题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第063021号

高中数学万能解题模板

◇总 主 编：牛胜玉

◇责任编辑：张 宇 颜李朝

◇责任校对：刘 丽

◇出版发行：湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山

邮编/410081

电话/0731.88853867 88872751

传真/0731.88872636

网址/http://press.hunnu.edu.cn

◇经销：全国新华书店

山东绿卡凯尔文化传媒有限公司

◇印刷：肥城新华印刷有限公司

◇开本：720mm × 1092mm 1/16

◇印张：30

◇字数：640千字

◇版次：2014年4月第1版 2015年4月第2次印刷

◇书号：ISBN 978-7-5648-1614-8

◇定价：42.80元

前言

Preface

作为高中课程学习的常备工具书，本书以最新考试大纲和课程标准为依据，参照新课标各版本教材编写而成，包括新课标各版本教材必修和选修的高考常考题目，并根据题目的解题过程整理成一个个方便掌握的解题模板，以最新高考真题诠释对模板的运用，从而将高考常考的题目类型进行梳理和归纳，并浓缩成易于规范解题的综合性工具书，本书既适合学生高一、高二同步使用，又适合高三总复习使用，同时可供有关教师教学参考。

在初学阶段使用该书，可以系统掌握每一章知识所涉及的考试常考题目类型和特点，通过典型例题学会用模板解决问题的具体步骤及解题方法技巧。

在复习阶段使用该书，模板的重要程度和考查频率一目了然，可以准确把握考试内容和要求，将有限的时间用在突破高考核心考点上。

在高考冲刺阶段使用该书，能让学生明确高考考什么，破解高考怎么考，掌握考题怎么解。

本书具有以下特色：

1. 模板内容全面、系统：本书根据国家教育部最新考试大纲和课程标准编写，融入我国现行所有高中新课标教材所规定的全部必修和选修内容。

2. 按步骤解题更规范、更快捷：按照解题模板步骤解题能让你在最短的时间内学会破题技巧，规范解题步骤，掌握得分法则，轻松考得高分。

3. 标注考频：精心研究最近五年高考真题，针对模板所涉及的题目类型，标注了模板的考查频率，让学生更清晰地了解题目的考查方式及模板的重要程度。

4. 精选高考真题：本书精选实用性和针对性强的高考真题，对模板解决步骤进行强化与巩固，帮助学生加深对模板的运用，更好地掌握模板，同时方便学生提前感知高考。

5. 答案指引、方便查找：针对模板演练中的典型练习题，相应地给出了答案所在的页码，让学生在练习完后更方便快捷地查阅答案。

6. 附录内容丰富：针对高考所涉及的四种思想方法进行全面解读，让学生掌握如何运用思想方法解题，进一步体会思想方法的妙用。

栏目介绍

模板探究

给出模板解决的问题类型，以母题的形式呈现此类型的一个例题，并写出相应的解题步骤，以此来引出“模板攻略”中的解决此类问题的一个通用步骤——模板解决步骤。

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)若函数 $y=(x+1)(x-a)$ 为偶函数，则 $a=$(　　). A. −2　B. −1　C. 1　D. 2	本模板解决的是“已知含参数的函数 $f(x)$ 是奇(或偶)函数，求其中参数的值”的问题.
解析：$\because f(x)=(x+1)(x-a)$ 为偶函数， $\therefore f(-x)=(-x+1)(-x-a)=f(x)$ 恒成立， 即 $x^2+(a-1)x-a=x^2-(a-1)x-a$ 恒成立. $\therefore a-1=0$，$\therefore a=1$. **答案**：C	第一步　将解析式代人 $f(-x)=f(x)$. 第二步　得到关于 a 的方程. 第三步　解出 a 的值.

模板攻略

先给出解决此类问题的思路，再给出解决此类问题的通用步骤，最后给出1~2道典型例题，并将“模板解决步骤”应用到例题中，让你掌握最快、最规范的解题方法技巧。

模板攻略

1. 模板解决思路

求有限集合 M 的元素个数，一般是先将 M 求出，然后数出元素个数.

2. 模板解决步骤

①第一步　采用树状图列出所有组合.

②第二步　计算 M 生成规则下每一组组合的值.

③第三步　写出集合 M，并检验.

④第四步　数出 M 中元素的个数.

3. 典型例题

典例 1　(山东高考)已知集合 $A=\{0,1,2\}$，则集合 $B=\{x-y\mid x\in A, y\in A\}$ 中元素的个数是(　　).

A. 1　B. 3　C. 5　D. 9

解析：列树状图并计算：

$$0\begin{cases}0\to 0\\1\to -1\\2\to -2\end{cases}\quad 1\begin{cases}0\to 1\\1\to 0\\2\to -1\end{cases}\quad 2\begin{cases}0\to 2\\1\to 1\\2\to 0\end{cases}$$

①~②

由集合的互异性知 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$.　③

即 B 中有 5 个元素.　④

答案：C

知识要点

把本模板所涉及的重要知识点进行归纳整理，让你在用模板解决问题的同时，加深对知识的理解，并进一步体会知识在解决问题时的作用。

知识要点

1. 集合的含义

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫作集合(简称为集).

2. 集合中元素的特征

(1)确定性：给定的集合，它的元素必须是确定的. 这就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了. 如“高一(1)班的高个子同学”就不能构成一个集合，因为组成它的元素是不确定的.

(2)互异性：一个给定集合中的元素是互不相同的(或说是互异的). 也就是说，集合中的元素是不重复出现的.

(3)无序性：组成集合的元素不考虑顺序. 如 $\{1,2,3\}$ 与 $\{3,2,1\}$ 表示同一个集合. 只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.

3. 元素与集合的关系

给定一个集合 A，任何一个对象 a 是不是这个集合的元素就确定了. 若 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；若 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$.

模板演练

精选出适合本模板的高考真题及典型习题，让你更熟练地运用“模板解决步骤”练习解题，以此来检测对模板的掌握程度。

模板演练

➜ 答案详见 P375

1. (广东高考)设集合 $S=\{x\mid x^2+2x=0, x\in \mathbf{R}\}$，$T=\{x\mid x^2-2x=0, x\in \mathbf{R}\}$，则 $S\cap T=$(　　).
A. $\{0\}$　B. $\{0,2\}$
C. $\{-2,0\}$　D. $\{-2,0,2\}$

2. (北京高考)已知集合 $A=\{x\in \mathbf{R}\mid 3x+2>0\}$，$B=\{x\in \mathbf{R}\mid (x+1)(x-3)>0\}$，则 $A\cap B=$(　　).
A. $(-\infty,-1)$　B. $(-1,-\frac{2}{3})$
C. $(-\frac{2}{3},3)$　D. $(3,+\infty)$

3. (福建高考)已知集合 $M=\{1,2,3,4\}$，$N=\{-2,2\}$，下列结论成立的是(　　).
A. $N\subseteq M$　B. $M\cup N=M$
C. $M\cap N=N$　D. $M\cap N=\{2\}$

4. (辽宁高考)已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，集合 $A=\{0,1,3,5,8\}$，集合 $B=\{2,4,5,6,8\}$，则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$(　　).
A. $\{5,8\}$　B. $\{7,9\}$
C. $\{0,1,3\}$　D. $\{2,4,6\}$

5. (四川高考)设全集 $U=\{a,b,c,d\}$，集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c,d\}$，则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$______.

6. (上海高考)若集合 $A=\{x\mid 2x+1>0\}$，$B=\{x\mid |x-1|<2\}$，则 $A\cap B=$______.

特色“特”说

1 考频分析

标注每个模板在近五年高考中的考查频率，让你清晰把握高考重难点。

模板 1　求集合中元素的个数 [5年12考]

模板 2　求特定子集的个数 [5年6考]

2 误区警示

对解题过程中易出现的错误，加以分析和点拨，让你远离误区，轻松得高分。

误区警示

在使用判定定理和性质定理进行推理论证时要使条件完备，即要有充足的条件保证得出的结论准确，特别是面面平行的判定定理，其中有五个条件，在使用时要把这五个条件都列出.

3 特别提示

通过不同的角度对重要知识点剖析讲解，提醒易错点，点拨疑难点，深化对知识的理解，拓展思维，拓宽思路，让求知的道路更宽阔。

特别提示

(1)分段函数是一个函数，而不是几个函数.

(2)分段函数的定义域是各段自变量的取值集合的并集，分段函数的值域是各段函数的取值集合的并集.

4 答案指引

每个模板演练都对其下方的题目标注了所对应的答案页码，查找方便快捷。

模板演练 → 答案详见 P375

模板演练 → 答案详见 P382

5 凯尔微博

生活中多姿多彩的趣味数学知识让你拓宽视野，在紧张的学习之余放松心情。

数学笑话——减法　数学课上，教师对一位学生说：“你怎么连减法都不会？例如：你家里有 10 个苹果，被你吃了 4 个，结果是多少呢？”这个学生沮丧地说道：“结果是挨了10下打！”

磨练的人生，更懂得珍惜

在美国，有这样一个年轻人：他是个大学生，每逢学校过礼拜或放假，他都得到他父亲开设的工厂去上班。他用打工的工资来偿还父母为他垫付的学费和生活费。

当他终于熬到大学毕业，认为自己可以接管父亲的公司时，父亲不但不让他接管公司，反而对他更加苛刻。他想不如去外面另谋生路。

他用打工积累的一点资金开了家小店，小店生意不错，他又开了家小公司，小公司慢慢地变成了大公司。但令他万分痛心的是，公司因为经营管理不善倒闭了。他认真地思索了他的过去，思索自己为什么在打工和经商中屡遭惨败，他总结了自己的失败教训，他没有灰心丧气，决心咬紧牙关挺起胸膛从头再来。就在他振作精神准备再干一番的时候，他父亲找到了他，并决定让他来接管自己的公司。对于父亲的决定他非常不解，他说："我现在是个一无所有甚至是个失败的人，你为什么还要我接管你的公司？"父亲说："不，孩子，你虽然跟几年前一样依然没有钱，但你有了一段可贵的经历，这段经历对你来说是一场艰苦的磨练，然而它却是可贵的。现在你拥有了这段经历，你会珍惜它，而且会把公司管理好，还会不断地让它发展壮大。孩子，无论干什么事情，不经受一番磨练是干不好的。"

果然，他不负父亲的期望，将规模不大的公司发展成了一家令全球瞩目的大公司。他就是伯克希尔公司总裁，有着"美国股神"称号的沃伦·巴菲特。他的资产仅次于比尔·盖茨。

从沃伦·巴菲特的故事我们可以看出，历经苦难、磨练对一个人来说是多么重要。不是说不经历苦难、不经历磨练就不能成功成材，而是经历了苦难、经历了磨练至少使人积累了经验，增强了毅力，从而使人更懂得珍惜自己的事业和生活，也更懂得如何做人与处世。

目录

Contents

第四章　圆与方程

必修 3

第一章　算法初步

第二章　统　计

第三章　概　率

必修 4

第一章　三角函数

第二章　平面向量

第三章 三角恒等变换

必修 5

第一章 解三角形

第二章 数 列

第三章 不等式

选修 2-1

第一章 常用逻辑用语

第二章 圆锥曲线与方程

第三章　空间向量与立体几何

选修 2-2

第一章　导数及其应用

第二章　推理与证明

第三章　数系的扩充与复数的引入

选修 2-3

第一章　计数原理

第二章　随机变量及其分布

第三章　统计案例

附录　思想方法篇

第一章 集合与函数概念

模板1 求集合中元素的个数【5年12考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(江西高考)若集合 $A=\{-1,1\}$,$B=\{0,2\}$,则集合 $\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$ 中的元素的个数为(　　). A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2	本模板解决的是“已知集合 A,B,且 M 是由 A,B 按某种规则生成的集合,求 M 中元素的个数”的问题.
解析:列树状图并计算: $-1\begin{cases}0\to -1\\2\to 1\end{cases}$　　$1\begin{cases}0\to 1\\2\to 3\end{cases}$ 显然 $\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}=\{-1,1,3\}$. 即有3个元素. **答案**:C	第一步　将 A,B 按树状图的形式写出所有组合. 第二步　按规则计算每一组组合的结果. 第三步　检查互异性,得到生成集合. 第四步　数出元素个数.

模板攻略

1. 模板解决思路

求有限集合 M 的元素个数,一般是先将 M 求出,然后数出元素个数. 而求集合 M,一般是采用列举法结合 M 的生成规则,一一写出 M 中的元素,然后检验其中的有效个数.而列举法一般选用树状图.

2. 模板解决步骤

①第一步　采用树状图列出所有组合.

②第二步　计算 M 生成规则下每一组组合的值.

③第三步　写出集合 M,并检验.

④第四步　数出 M 中元素的个数.

3. 典型例题

典例1　(山东高考)已知集合 $A=\{0,1,2\}$,则集合 $B=\{x-y\mid x\in A,y\in A\}$ 中元素的个数是(　　).

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 9

解析:列树状图并计算:

$0\begin{cases}0\to 0\\1\to -1\\2\to -2\end{cases}$　　$1\begin{cases}0\to 1\\1\to 0\\2\to -1\end{cases}$　　$2\begin{cases}0\to 2\\1\to 1\\2\to 0\end{cases}$　　①~②

由集合的互异性知 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$.　　③

即 B 中有5个元素.　　④

答案:C

典例2　定义集合运算:$A*B=\{z\mid z=xy,x\in A,y\in B\}$,设 $A=\{1,2\}$,$B=\{0,2\}$,则集合 $A*B$ 中元素个数为______.

解析:列树状图并计算:

$1\begin{cases}0\to 0\\2\to 2\end{cases}$　　$2\begin{cases}0\to 0\\2\to 4\end{cases}$　　①~②

由集合的互异性知 $A*B=\{0,2,4\}$.　　③

即 $A*B$ 中有3个元素.　　④

答案:3

数学神童维纳的年龄(一)　20世纪著名的数学家诺伯特·维纳,从小就智力超常,三岁时就能读写,十四岁时就大学毕业了. 几年后,他又通过了博士论文答辩,成为美国哈佛大学的科学博士. 在博士学位的授予仪式上,执行主席看到一脸稚气的维纳,颇为惊讶,于是就当面询问起他的年龄来. 维纳不愧为数学神童,他的回答十分巧妙.

必修1

知识要点

1. 集合的含义

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫作集合(简称为集).

2. 集合中元素的特征

(1)确定性:给定的集合,它的元素必须是确定的.这就是说,给定一个集合,那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了.如“高一(1)班的高个子同学”就不能构成一个集合,因为组成它的元素是不确定的.

(2)互异性:一个给定集合中的元素是互不相同的(或说是互异的).也就是说,集合中的元素是不重复出现的.

(3)无序性:组成集合的元素不考虑顺序.如$\{1,2,3\}$与$\{3,2,1\}$表示同一个集合.只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是相等的.

3. 元素与集合的关系

给定一个集合A,任何一个对象a是不是这个集合的元素就确定了.若a是集合A的元素,就说a属于集合A,记作$a\in A$;若a不是集合A中的元素,就说a不属于集合A,记作$a\notin A$.

特别提示

符号“$\in$”和“$\notin$”表示的是元素与集合间的关系,元素与集合间只有“$\in$”和“$\notin$”两种关系.

4. 集合的表示方法

(1)列举法

把集合的元素一一列举出来,并用花括号“$\{\ \}$”括起来表示集合的方法叫作列举法.

(2)描述法

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法.具体方法是:在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

(3)Venn 图

用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种图称为 Venn 图.

特别提示

(1)用列举法表示集合时,注意:①元素间用逗号“,”隔开;②元素排列无固定顺序;③列举法也可以表示有明显规律的元素组成的无限集.(2)用描述法表示集合时,①在不致发生误解时,元素的取值集合可以不写.例如,在实数集$\mathbf{R}$中取值,“$\in\mathbf{R}$”常常省略不写.②“$\{\ \}$”本身已经暗含“所有”的意思,故在表示集合时,条件中不必再写“所有”二字.(3)Venn图必须是封闭曲线,常用椭圆、圆、矩形、正方形等表示.用Venn图表示的集合通常元素个数较少且为有限个,如果元素个数无限,如$\{x|x>1\}$常借助于数轴表示.

模板演练

➡ 答案详见 P375

1. (新课标全国高考)已知集合$A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{(x,y)|x\in A,y\in A,x-y\in A\}$,则$B$中所含元素的个数为(　　).

A. 3　　B. 6　　C. 8　　D. 10

2. 设P,Q为两个非空实数集合,定义集合$P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$,若$P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则$P+Q$中元素的个数是(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

3. (宁夏高考)设集合$P=\{3,4,5\}$,$Q=\{4,5,6,7\}$,若定义新集合$P*Q=\{(a,b)|a\in P,b\in Q\}$,则集合$P*Q$中元素的个数为(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 12

4. (全国高考)设集合$A=\{1,2,3\}$,$B=\{4,5\}$,$M=\{x|x=a+b,a\in A,b\in B\}$,则$M$中元素的个数为(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

凯尔微博

数学神童维纳的年龄(二)　他说:“我今年岁数的立方是个四位数,岁数的四次方是个六位数,这两个数,刚好把十个数字0,1,2,3,4,5,6,7,8,9全都用上了,不重不漏.这意味着全体数字都向我俯首称臣,预祝我将来在数学领域里一定能干出一番惊天动地的大事业.”维纳此言一出,四座皆惊,大家都被他的这道妙题深深地吸引住了,整个会场上的人都在议论他的年龄问题.

模板 2　求特定子集的个数【5年6考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(湖北高考)已知集合 $A=\{x\|x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\|0<x<5,x\in\mathbf{N}\}$,则满足条件 $A\subseteq C\subseteq B$ 的集合 C 的个数为(　　). A. 1　B. 2　C. 3　D. 4	本模板解决的是"已知集合 A,求其满足特定条件 p 的子集个数"的问题.
解析:集合 $B=\{1,2,3,4\}$,有4个元素, 集合 $A=\{1,2\}$, 则集合 C 的个数问题可转化为$\{3,4\}$的子集个数问题,即$2^2=4$. **答案:**D	第一步　先将集合 B 表示出来,确定 C 最多包含元素个数. 第二步　将集合 A 表示出来,确定 C 必须包含元素. 第三步　从 B 中去掉 A 的元素,转化为无限制条件的集合的子集个数问题. 第四步　求出子集个数.

模板攻略

1. 模板解决思路

求子集个数的关键是确定其中元素的个数,因此,要将所给条件 p 转化为必须包含或不能包含的元素的条件,然后问题可转化为无限制条件的集合的子集问题.

2. 模板解决步骤

①第一步　求出子集被包含集合的元素,确定元素个数.

②第二步　将子集应满足条件 p 转化为必须包含的元素.

③第三步　在被包含集合中去掉子集必须包含的元素,将问题转化为一个集合无限制条件的子集个数问题.

④第四步　求出子集个数.

3. 典型例题

典例 1　(新课标全国高考)已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$,$N=\{1,3,5\}$,$P=M\cap N$,则 P 的子集共有(　　).

A. 2个　B. 4个　C. 6个　D. 8个

解析:由题意 $M\cap N=\{1,3\}$,　①~②

即$P=\{1,3\}$,共有2个元素.　③

所以P的子集个数为$2^2=4$(个).　④

答案:B

典例 2　(安徽高考)设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$,$B=\{4,5,6,7,8\}$,则满足$S\subseteq A$且$S\cap B\neq\varnothing$的集合 S 的个数为(　　).

A. 57　B. 56　C. 49　D. 8

思路分析:令$C=\{4,5,6\}$. 则$S\subseteq A$且$S\cap B\neq\varnothing$与$S\subseteq A$且$S\cap C\neq\varnothing$等价,而$S\cap C=\varnothing$可用模板方法求之.

解析:令$C=B\cap A=\{4,5,6\}$,

而A共有子集$2^6=64$(个),　①

$S\subseteq A$且$S\cap C=\varnothing$,等价于 $S\subseteq\{1,2,3\}$.　②

即这样的S有$2^3=8$(个),　③

所以 $S\subseteq A$ 且 $S\cap C\neq\varnothing$的集合个数为 $64-8=56$(个),

即 $S\subseteq A$ 且 $S\cap B\neq\varnothing$的集合个数为 56.　④

答案:B

数学神童维纳的年龄(三)　其实这个问题不难解答,但是需要一点数字"灵感",不难发现,21的立方是四位数,而 22 的立方已经是五位数了,所以维纳的年龄最多是 21 岁;同样道理,18 的四次方是六位数,而 17 的四次方则是五位数了,所以维纳的年龄至少是 18 岁. 这样,维纳的年龄只可能是 18,19,20,21 这四个数字中的一个. 剩下的工作就"一一筛选"了.

知识要点

1. 子集

一般地，对于两个集合 A,B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素（若 $a\in A$，则 $a\in B$），那么集合 A 称为集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

根据子集的定义，我们知道 $A\subseteq A$. 也就是说，任何一个集合是它本身的子集. 对于空集$\varnothing$，我们规定$\varnothing\subseteq A$，即空集是任何集合的子集.

2. 真子集

如果 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，那么集合 A 称为集合 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

特别提示

(1)空集是任何非空集合的真子集.

(2)若 $A\subseteq B$，则 $A=B$ 或 $A\subsetneqq B$.

(3)若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

(4)含有 $n(n\geqslant 1)$ 个元素的集合有2^n 个子集，有2^n-1个真子集，有 2^n-2 个非空真子集.

模板演练

➡ 答案详见 P375

1. 集合$\left\{x\in \mathbf{N}^* \mid \dfrac{12}{x}\in \mathbf{Z}\right\}$的子集个数为(　　).

A. 4　　B. 6　　C. 16　　D. 64

2.（山东高考）满足 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$的集合 M 的子集的个数是(　　).

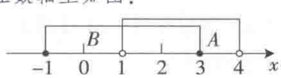
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x=2a,a\in A\}$，则集合$\complement_U(A\cup B)$的子集个数为______.

4. 数集 A 满足条件：若 $a\in A$，则 $\dfrac{1-a}{1+a}\in A\ (a\neq 1)$. 若$\dfrac{1}{3}\in A$，则集合 A 至少有 ______ 个子集.

模板3　集合的运算问题【5年75考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
（浙江高考）设集合 $A=\{x\mid 1<x<4\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$(　　). A. (1,4)　　B. (3,4) C. (1,3)　　D. (1,2)∪(3,4)	本模板解决的是“已知集合 A,B，求 A,B 经过交、并、补等相关运算后的集合”的问题.
解析：由题意知，$B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$. 将$A,B$表示在数轴上如图：  显然，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x<-1或x>3\}$. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid 3<x<4\}=(3,4)$. **答案：**B	第一步　将集合 B 也表示成最简形式. 第二步　将集合 A,B 在数轴上表示出来. 第三步　从数轴上运算出$\complement_{\mathbf{R}}B$和$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$. 第四步　将数轴上的运算结果用集合或区间表示出来.

数学神童维纳的年龄(四)　20 的立方是 8 000，有三个重复数字 0，不合题意. 同理，19 的四次方等于 130 321，21 的四次方等于 194 481，都不合题意. 最后只剩下一个 18，是不是正确答案呢？18 的立方是等于 5 832，四次方等于 104 976，恰好“不重不漏”地用完了十个阿拉伯数字！这个年仅 18 岁的少年博士，后来果然成就了一番大事业：他成为信息论的前驱和控制论的奠基人.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决本模板问题首先要将 A, B 表示成最简形式,然后按照 A, B 的几何意义,将对应的图形画出来,然后在图形上进行相关运算,最后,将运算的结果再转化为集合或区间形式.

2. 模板解决步骤

①第一步　将集合化成最简形式.

②第二步　确定集合表示的几何意义,将对应的图形表示出来.

③第三步　利用图形进行运算,求出运算结果.

④第四步　将运算结果表示成集合或区间形式.

3. 典型例题

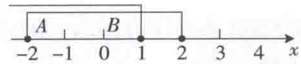
典例 1　(天津高考)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x|\leqslant 2\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\leqslant 1\}$,则 $A\cap B=($　　$)$.

A. $(-\infty,2]$　　B. $[1,2]$

C. $[-2,2]$　　D. $[-2,1]$

解析:$A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,-2\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\leqslant 1\}$,　①

在数轴上表示如下



　②

则 $A\cap B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,-2\leqslant x\leqslant 1\}$,故选 D.　③~④

答案:D

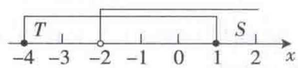
典例 2　(浙江高考)设集合 $S=\{x\,|\,x>-2\}$, $T=\{x\,|\,-4\leqslant x\leqslant 1\}$,则 $S\cap T=($　　$)$.

A. $[-4,+\infty)$　　B. $(-2,+\infty)$

C. $[-4,1]$　　D. $(-2,1]$

解析:$S=\{x\,|\,x>-2\}$, $T=\{x\,|\,-4\leqslant x\leqslant 1\}$,　①

在数轴上表示如下



　②

所以 $S\cap T=\{x\,|\,-2<x\leqslant 1\}$.　③~④

答案:D

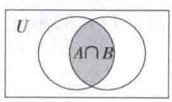
误区警示

在数轴上表示集合时,要注意实心点和空心圈的区别:实心点表示包含这个点,空心圈表示不包含这个点.

知识要点

1. 交集

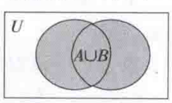
一般地,由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$(读作"A 交 B"),即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$,且 $x\in B\}$.



$A\cap B$ 可用图中的阴影部分来表示.

2. 并集

一般地,由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$(读作"A 并 B"),即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$,或 $x\in B\}$.

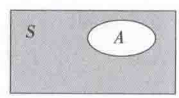


$A\cup B$ 可用图中的阴影部分来表示.

3. 补集、全集

设 $A\subseteq S$,由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的补集,记为 $\complement_S A$(读作"A 在 S 中的补集"),即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$,且 $x\notin A\}$. $\complement_S A$ 可用图中的阴影部分表示.

如果集合 S 包含我们所要研究的各个集合,这时 S 可以看作一个全集,全集通常记作 U.



特别提示

对任意的集合 A, B,有

(1) $A\cap B=B\cap A$, $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$, $A\cap A=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$.

(2) $A\cup B=B\cup A$, $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$, $A\cup A=A$, $A\cup\varnothing=A$.

(3) $\complement_U(\complement_U A)=A$, $\complement_U U=\varnothing$, $\complement_U\varnothing=U$, $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$, $A\cup(\complement_U A)=U$.

(4) $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$, $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

数学家卡当(一)　卡当 1501 年出生于意大利的帕维亚,在文艺复兴时期是一位举足轻重的数学家,也是一位典型的人文主义者,除了数学他也专注于组织、研究、评论希腊和罗马的成果. 卡当有个不幸的童年,在 40 岁之前,他穷得一无所有,个性孤僻,自负、缺乏幽默感、不能自我反省,并且往往在言谈中表现得冷漠无情.

模板演练

➡ 答案详见 P375

1. (广东高考)设集合 $S=\{x|x^2+2x=0,x\in\mathbf{R}\}$,$T=\{x|x^2-2x=0,x\in\mathbf{R}\}$,则 $S\cap T=$(　　).

A. $\{0\}$　　B. $\{0,2\}$

C. $\{-2,0\}$　　D. $\{-2,0,2\}$

2. (北京高考)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|3x+2>0\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}|(x+1)(x-3)>0\}$,则 $A\cap B=$(　　).

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-1,-\frac{2}{3})$

C. $(-\frac{2}{3},3)$　　D. $(3,+\infty)$

3. (福建高考)已知集合 $M=\{1,2,3,4\}$,$N=\{-2,2\}$,下列结论成立的是(　　).

A. $N\subseteq M$　　B. $M\cup N=M$

C. $M\cap N=N$　　D. $M\cap N=\{2\}$

4. (辽宁高考)已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,集合 $A=\{0,1,3,5,8\}$,集合 $B=\{2,4,5,6,8\}$,则$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$(　　).

A. $\{5,8\}$　　B. $\{7,9\}$

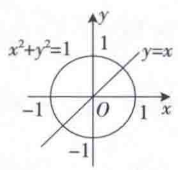
C. $\{0,1,3\}$　　D. $\{2,4,6\}$

5. (四川高考)设全集 $U=\{a,b,c,d\}$,集合 $A=\{a,b\}$,$B=\{b,c,d\}$,则$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$________.

6. (上海高考)若集合 $A=\{x|2x+1>0\}$,$B=\{x||x-1|<2\}$,则 $A\cap B=$________.

模板 4　求运算后的集合的元素个数【5年10考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(广东高考)已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数,且 $x^2+y^2=1\}$,$B=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数,且 $y=x\}$,则 $A\cap B$ 的元素个数为(　　). A. 0　B. 1　C. 2　D. 3	本模板解决的是"已知两个集合 A,B,M 是A,B 经运算后得到的集合,求 M 中元素的个数"的问题.
解析:由题意,集合 A 表示一个圆,集合B表示一条直线,如图所示.  显然,圆与直线有两个交点, 即$A\cap B$的元素个数为2. **答案:**C	第一步　确定两个集合的几何意义,A 表示圆,B 表示直线. 第二步　将直线和圆在同一坐标系中表示出来. 第三步　观察图形,有两个交点. 第四步　交点个数即 $A\cap B$ 的元素个数.

数学家卡当(二)　他为了逃避穷困、病痛、诽谤和不公平的待遇,曾每天玩骰子,并天天玩棋达40年之久.青年时代,他也受聘在意大利的多所大学.1570年,因丢掷耶稣的天宫图,被视为异教徒而被捕入狱.不过,令人称奇的是,主教随即以占星术士来聘用他.卡当的著作涵盖了数学、天文学、占星学、物理学、医学以及关于道德方面的语录.