



绿卡图书——走向成功的通行证

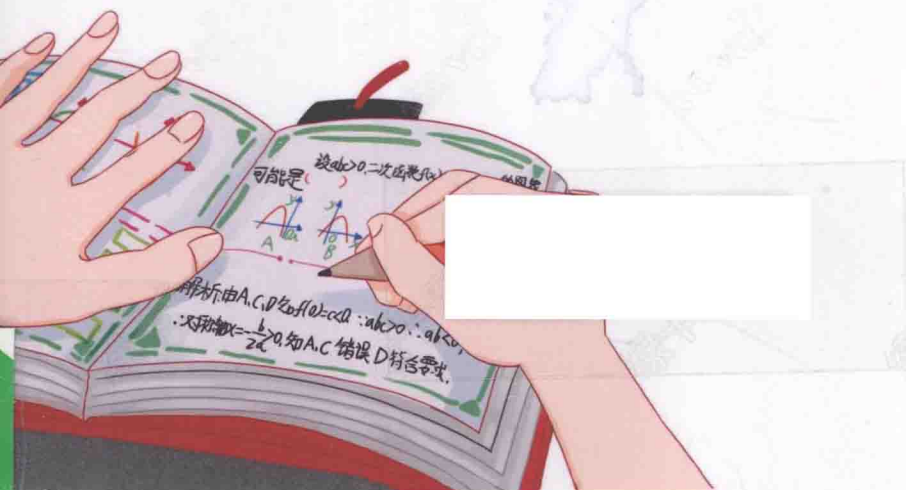
高中数学 万能解题模板

每天用得到，天天都可学



课本不会天天翻，补习班不会天天去，
每天用万能解题模板辅助做题，
才能天天学数学！

总主编：牛胜玉



用万能解题模板 明确高考考什么，怎么考。

用万能解题模板 抓住解题关键，学会破题技巧。

用万能解题模板 规范解题步骤，掌握得分法则。

用万能解题模板 让你审题有思路，解题有速度，答题有准度，轻松得高分！

176个解题模板+141个知识要点+782道高考真题，只要一本万能解题模板就能搞定高中数学！

模板
探究

模板
攻略

知识
要点

模板
演练

万
能

湖南师范大学出版社

PASS[®] 绿卡图书——走向成功的通行证

高中数学 万能解题模板

每天用得到，天天都可学



课本不会天天翻，补习班不会天天去，
每天用万能解题模板辅助做题，
才能天天学数学！

总主编：牛胜玉

本册主编：亢喜岱 侯培培

陈静 刘丽

徐光莹 吕艳君

湖南师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学万能解题模板 / 牛胜玉编. — 长沙: 湖南师范大学出版社, 2014.4

ISBN 978-7-5648-1614-8

I. ①高… II. ①牛… III. ①中学数学课—高中—题解 IV. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第063021号

高中数学万能解题模板

◇总主编: 牛胜玉

◇责任编辑: 张宇 颜李朝

◇责任校对: 刘丽

◇出版发行: 湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山

邮编/410081

电话/0731.88853867 88872751

传真/0731.88872636

网址/<http://press.hunnu.edu.cn>

◇经销: 全国新华书店

山东绿卡凯尔文化传媒有限公司

◇印刷: 肥城新华印刷有限公司

◇开本: 720mm × 1092mm 1/16

◇印张: 30

◇字数: 640千字

◇版次: 2014年4月第1版 2015年4月第2次印刷

◇书号: ISBN 978-7-5648-1614-8

◇定价: 42.80元

作为高中课程学习的常备工具书,本书以最新考试大纲和课程标准为依据,参照新课标各版本教材编写而成,包括新课标各版本教材必修和选修的高考常考题目,并根据题目的解题过程整理成一个个方便掌握的解题模板,以最新高考真题诠释对模板的运用,从而将高考常考的题目类型进行梳理和归纳,并浓缩成易于规范解题的综合性工具书,本书既适合学生高一、高二同步使用,又适合高三总复习使用,同时可供有关教师教学参考。

在初学阶段使用该书,可以系统掌握每一章知识所涉及的考试常考题目类型和特点,通过典型例题学会用模板解决问题的具体步骤及解题方法技巧。

在复习阶段使用该书,模板的重要程度和考查频率一目了然,可以准确把握考试内容和要求,将有限的时间用在突破高考核心考点上。

在高考冲刺阶段使用该书,能让学生明确高考考什么,破解高考怎么考,掌握考题怎么解。

本书具有以下特色:

- 1. 模板内容全面、系统:**本书根据国家教育部最新考试大纲和课程标准编写,融入我国现行所有高中新课标教材所规定的全部必修和选修内容。
- 2. 按步骤解题更规范、更快捷:**按照解题模板步骤解题能让你在最短的时间内学会破题技巧,规范解题步骤,掌握得分法则,轻松考得高分。
- 3. 标注考频:**精心研究最近五年高考真题,针对模板所涉及的题目类型,标注了模板的考查频率,让学生更清晰地了解题目的考查方式及模板的重要程度。
- 4. 精选高考真题:**本书精选实用性和针对性强的高考真题,对模板解决步骤进行强化与巩固,帮助学生加深对模板的运用,更好地掌握模板,同时方便学生提前感知高考。
- 5. 答案指引、方便查找:**针对模板演练中的典型练习题,相应地给出了答案所在的页码,让学生在练习完后更方便快捷地查阅答案。
- 6. 附录内容丰富:**针对高考所涉及的四思想方法进行解读,让学生掌握如何运用思想方法解题,进一步体会思想方法的妙用。

栏目介绍

模板探究

给出模板解决的问题类型,以母题的形式呈现此类型的一个例题,并写出相应的解题步骤,以此来引出“模板攻略”中的解决此类问题的一个通用步骤——模板解决步骤。

模板探究

母题呈现	模板引入
<p>(辽宁高考)若函数$y=(x+1)f(x-a)$为偶函数,则$a=(\quad)$.</p> <p>A. -2 B. -1 C. 1 D. 2</p> <p>解析:∵$f(x)=(x+1)f(x-a)$为偶函数, ∴$f(-x)=(-x+1)f(-x-a)$恒成立, 即$x^2+(a-1)x-a=x^2-(a-1)x-a$恒成立. ∴$a-1=0$,∴$a=1$.</p> <p>答案:C</p>	<p>本模板解决的是“已知含参数的函数$f(x)$是奇(或偶)函数,求其中参数的值”的问题.</p> <p>第一步 将解析式代入$f(-x)=f(x)$.</p> <p>第二步 得到关于a的方程.</p> <p>第三步 解出a的值.</p>

知识要点

把本模板所涉及的重要知识点进行归纳整理,让你在用模板解决问题的同时,加深对知识的理解,并进一步体会知识在解决问题时的作用。

知识要点

- 集合的含义
一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫作集合(简称集).
- 集合中元素的特征
(1)确定性:给定的集合,它的元素必须是确定的.这就是说,给定一个集合,那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了.如“高一(1)班的高个子同学”就不能构成一个集合,因为组成它的元素是不确定的.
- (2)互异性:一个给定集合中的元素是互不相同的(或说是互异的),也就是说,集合中

- 的元素是不重复出现的.
- (3)无序性:组成集合的元素不考虑顺序.如 $\{1,2,3\}$ 与 $\{3,2,1\}$ 表示同一个集合.只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是相等的.
- 元素与集合的关系
给定一个集合 A ,任何一个对象 a 是不是这个集合的元素就确定了.若 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$;若 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$.

模板攻略

先给出解决此类问题的思路,再给出解决此类问题的通用步骤,最后给出1~2道典型例题,并将“模板解决步骤”应用到例题中,让你掌握最快、最规范的解题方法技巧。

模板攻略

- 模板解决思路
求有限集合 M 的元素个数,一般是先将 M 求出,然后数出元素个数.
- 模板解决步骤
①第一步 采用树状图列出所有组合.
②第二步 计算 M 生成规则下每一组合的值.
③第三步 写出集合 M ,并检验.
④第四步 数出 M 中元素的个数.
- 典型例题
典例1 (山东高考)已知集合 $A=\{0,1,2\}$,则集合 $B=\{x-y \mid x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是 (\quad) .
A. 1 B. 3 C. 5 D. 9
解析:列树状图并计算:

0	→ 0	→ 1	→ 2
1	→ -1	→ 0	→ 1
2	→ -2	→ -1	→ 0

由集合的互异性知 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$.
即 B 中有5个元素.

答案:C

模板演练

精选出适合本模板的高考真题及典型习题,让你更熟练地运用“模板解决步骤”练习解题,以此来检测对模板的掌握程度。

模板演练

- (广东高考)设集合 $S=\{x \mid x^2+2=0, x \in \mathbb{R}\}$, $T=\{x \mid x^2-2x+0, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $S \cap T=(\quad)$.
A. $\{0\}$ B. $\{0,2\}$
C. $\{-2,0\}$ D. $\{-2,0,2\}$
- (北京高考)已知集合 $A=\{x \in \mathbb{R} \mid 3x+2>0\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-3)>0\}$, 则 $A \cap B=(\quad)$.
A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, -\frac{2}{3})$
C. $(-\frac{2}{3}, 3)$ D. $(3, +\infty)$
- (福建高考)已知集合 $M=\{1, 2, 3, 4\}$, $N=\{-2, 2\}$, 下列结论成立的是 (\quad) .
A. $N \subset M$ B. $M \cup N = M$
C. $M \cap N = N$ D. $M \cap N = \{2\}$
- (辽宁高考)已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, 集合 $A=\{0,1,3,5,8\}$, 集合 $B=\{2,4,5,6,8\}$, 则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)=(\quad)$.
A. $\{5,8\}$ B. $\{7,9\}$
C. $\{0,1,3\}$ D. $\{2,4,6\}$
- (四川高考)设全集 $U=\{a,b,c\}$, 集合 $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c,d\}$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)=\underline{\hspace{2cm}}$.
- (上海高考)若集合 $A=\{x \mid 2x+1>0\}$, $B=\{x \mid |x-1|<2\}$, 则 $A \cap B=\underline{\hspace{2cm}}$.

特色“特”说

1 考频分析

标注每个模板在近五年高考中的考查频率，让你清晰把握高考重难点。

模板 1 求集合中元素的个数 [5年 12考]

模板 2 求特定子集的个数 [5年 6考]

2 误区警示

对解题过程中易出现的错误，加以分析和点拨，让你远离误区，轻松得高分。

! 误区警示

在使用判定定理和性质定理进行推理论证时要使条件完备，即要有充足的条件保证得出的结论准确，特别是面面平行的判定定理，其中有五个条件，在使用时要把这五个条件都列出。

3 特别提示

通过不同的角度对重要知识点剖析讲解，提醒易错点，点拨疑难点，深化对知识的理解，拓展思维，拓宽思路，让求知的道路更宽阔。

特别提示

(1) 分段函数是一个函数，而不是几个函数。

(2) 分段函数的定义域是各段自变量的取值集合的并集，分段函数的值域是各段函数的取值集合的并集。

4 答案指引

每个模板演练都对其下方的题目标注了所对应的答案页码，查找方便快捷。

模板演练

→ 答案详见 P375

模板演练

→ 答案详见 P382

5 凯尔微博

生活中多姿多彩的趣味数学知识让你拓宽视野，在紧张的学习之余放松心情。

数学笑话——减法 数学课上，教师对一位学生说：“你怎么连减法都不会？例如：你家里有 10 个苹果，被你吃了 4 个，结果是多少呢？”这个学生沮丧地说道：“结果是挨了 10 下打！”

磨练的人生，更懂得珍惜

在美国，有这样一个年轻人：他是个大学生，每逢学校过礼拜或放假，他都得到他父亲开设的工厂去上班。他用打工的工资来偿还父母为他垫付的学费和生活费。

当他终于熬到大学毕业，认为自己可以接管父亲的公司时，父亲不但不让他接管公司，反而对他更加苛刻。他想不如去外面另谋生路。

他用打工积累的一点资金开了家小店，小店生意不错，他又开了家小公司，小公司慢慢地变成了大公司。但令他万分痛心的是，公司因为经营管理不善倒闭了。他认真地思索了他的过去，思索自己为什么在打工和经商中屡遭惨败，他总结了自己的失败教训，他没有灰心丧气，决心咬紧牙关挺起胸膛从头再来。就在他振作精神准备再干一番的时候，他父亲找到了他，并决定让他来接管自己的公司。对于父亲的决定他非常不解，他说：“我现在是个一无所有甚至是个失败的人，你为什么还要我接管你的公司？”父亲说：“不，孩子，你虽然跟几年前一样依然没有钱，但你有了一段可贵的经历，这段经历对你来说是一场艰苦的磨练，然而它却是可贵的。现在你拥有了这段经历，你会珍惜它，而且会把公司管理好，还会不断地让它发展壮大。孩子，无论干什么事情，不经受一番磨练是干不好的。”

果然，他不负父亲的期望，将规模不大的公司发展成了一家令全球瞩目的大公司。他就是伯克希尔公司总裁，有着“美国股神”称号的沃伦·巴菲特。他的资产仅次于比尔·盖茨。

从沃伦·巴菲特的故事我们可以看出，历经苦难、磨练对一个人来说是多么重要。不是说不经历苦难、不经历磨练就不能成功成材，而是经历了苦难、经历了磨练至少使人积累了经验，增强了毅力，从而使人更懂得珍惜自己的事业和生活，也更懂得如何做人与处世。



必修 1

第一章 集合与函数概念

模板1	求集合中元素的个数	1
模板2	求特定子集的个数	3
模板3	集合的运算问题	4
模板4	求运算后的集合的元素个数	6
模板5	求集合中参数的值	8
模板6	求集合中参数的取值范围	9
模板7	求函数的定义域	11
模板8	求分段函数的函数值	13
模板9	求分段函数中参数的值	15
模板10	求函数的值域	16
模板11	求函数的解析式	18
模板12	函数的单调性问题	20
模板13	函数的最值问题	22
模板14	函数的奇偶性问题	24
模板15	解函数不等式	26
模板16	抽象函数的函数值问题	27

第二章 基本初等函数(I)

模板1	比较数的大小	29
模板2	对数式的化简求值	32
模板3	解指数(对数)方程或不等式	33
模板4	指数函数、对数函数、幂函数的性质	35
模板5	求参数的值或取值范围	37
模板6	求函数的反函数	38
模板7	函数图象的判断	40

第三章 函数的应用

模板1	判断函数的零点个数	42
-----	-----------	----

模板2	判断区间内是否有零点	43
模板3	利用零点求参数的取值范围	45
模板4	利用函数模型解应用题	47

必修 2

第一章 空间几何体

模板1	根据直观图计算原图形面积	50
模板2	由三视图求表面积或体积	52
模板3	求球的体积或表面积	55

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

模板1	共面问题的证明	57
模板2	证明线共点或点共线问题	59
模板3	求异面直线所成的角	61
模板4	线线平行的证明	63
模板5	线面平行的证明	65
模板6	面面平行的证明	67
模板7	线线垂直的证明	69
模板8	线面垂直的证明	71
模板9	面面垂直的证明	74
模板10	求直线与平面所成的角	76
模板11	求二面角	78

第三章 直线与方程

模板1	求斜率的取值范围	81
模板2	三点共线问题	83
模板3	求直线的方程	84
模板4	求两直线平行或垂直中参数的值	87

模板5	求距离中参数的值	89
模板6	对称问题	91

第四章 圆与方程

模板1	求圆的方程	94
模板2	求动点的轨迹方程	96
模板3	求直线与圆位置关系中的参数	97
模板4	求圆与圆位置关系中的参数	100
模板5	弦长或公共弦长问题	102
模板6	与圆有关的最值问题	103

必修 3

第一章 算法初步

模板1	根据程序框图写出运算结果	105
模板2	根据运算结果选择判断框内的内容	108
模板3	根据基本算法语句写出结果	110

第二章 统计

模板1	判断抽样方法	113
模板2	求系统抽样中抽取的编号	115
模板3	求分层抽样中各层样本个数	117
模板4	用频率分布直方图估计总体	119
模板5	根据样本求总体的数字特征	122
模板6	由茎叶图计算数字特征	124
模板7	由数字特征求参数	126
模板8	数字特征的实际应用	128
模板9	求线性回归方程	130
模板10	利用回归直线进行估计	132

第三章 概率

模板1	用频率估计概率	134
模板2	求古典概型的概率	138
模板3	求几何概型的概率	140
模板4	几何概型的实际应用	142

必修 4

第一章 三角函数

模板1	三角式的化简求值	144
模板2	三角等式的证明	146
模板3	求一个角的三角函数值	147
模板4	三角函数性质的应用	149
模板5	利用函数性质求参数	152
模板6	三角函数不等式的解法	154
模板7	求三角函数的周期或对称轴(中心)	156
模板8	由三角函数的周期性或对称性求参数	158
模板9	利用周期性求函数值	160
模板10	由函数变换求参数	162
模板11	由函数图象求解析式	164
模板12	三角函数模型的应用	167

第二章 平面向量

模板1	用已知向量表示其他向量	169
模板2	向量的数量积运算	172
模板3	求向量的坐标	175
模板4	求参数的值	177
模板5	求两向量的夹角	178
模板6	求向量运算的最值或取值范围	180
模板7	平面向量的实际应用	182

第三章 三角恒等变换

模板1	三角函数的给值求值问题	184
模板2	由三角关系式求三角函数值	186
模板3	三角函数式的化简求值	188
模板4	含多个角的三角函数的相关问题	190

必修 5

第一章 解三角形

模板1	运用正、余弦定理求边或角	193
模板2	已知边角关系解三角形	195
模板3	判断三角形的形状	197
模板4	三角形中的最值问题	199
模板5	与三角形面积有关的计算	201
模板6	解三角形的实际应用	203

第二章 数列

模板1	观察归纳法求数列的通项公式	206
模板2	数列的单调性的应用	209
模板3	由递推公式求通项公式	211
模板4	由前 n 项和求通项公式	214
模板5	等差或等比数列的给值求值问题	216
模板6	等差或等比数列的判定	218
模板7	由等差或等比数列性质求值	221
模板8	求成等差或等比数列的几个数	223
模板9	求等差或等比数列的前 n 项和	225
模板10	有关等差或等比数列前 n 项和性质的问题	227
模板11	等差数列前 n 项和的最值问题	229
模板12	等差、等比数列的综合性问题	231
模板13	用倒序相加法求前 n 项和	233

模板14	错位相减法求前 n 项和	235
模板15	裂项相消法求前 n 项和	238
模板16	分组求和法求前 n 项和	240

第三章 不等式

模板1	利用不等式的性质求代数式的取值范围	242
模板2	一元二次不等式的解法	244
模板3	求一元二次不等式中参数的值或取值范围	246
模板4	求解一元高次不等式	248
模板5	求平面区域的面积	250
模板6	求线性目标函数的取值范围(或最值)	252
模板7	利用基本不等式求最值	255

选修 2-1

第一章 常用逻辑用语

模板1	求一个命题的逆命题或否命题或逆否命题	257
模板2	充分条件与必要条件的判断	259
模板3	复合命题真假的判断	261
模板4	求含有一个量词的命题的否定	264

第二章 圆锥曲线与方程

模板1	求轨迹方程	266
模板2	求椭圆的标准方程	269
模板3	求椭圆的离心率	271
模板4	求双曲线的标准方程	273
模板5	求双曲线的离心率或渐近线方程	275
模板6	求抛物线的标准方程及定义的应用问题	278

模板7	利用抛物线的性质求面积或长度	280
模板8	求直线与圆锥曲线相交时的弦长	282
模板9	求直线与圆锥曲线的位置关系问题	284

第三章 空间向量与立体几何

模板1	用向量法证明平行或垂直	288
模板2	用向量法求空间距离	291
模板3	用向量法求空间角	293

选修 2-2

第一章 导数及其应用

模板1	求函数在某点的导数	296
模板2	已知切线方程求参数的值	298
模板3	求函数的单调区间	300
模板4	求函数的极值	302
模板5	求函数的最值	304
模板6	求参数的值或取值范围	307
模板7	定积分求值	309
模板8	求曲边图形的面积	311

第二章 推理与证明

模板1	寻找规律问题	313
模板2	用反证法证明命题	315
模板3	用数学归纳法证明命题	317

第三章 数系的扩充与复数的引入

模板1	复数式的化简	320
模板2	求未知数的值	322
模板3	确定复数所在象限问题	324
模板4	复数的模的求法	326
模板5	求解未知复数	327

选修 2-3

第一章 计数原理

模板1	计数原理的应用	329
模板2	求特定条件下方法种数	331
模板3	特殊元素(位置)问题	333
模板4	相邻问题	335
模板5	不相邻问题	336
模板6	分组问题	338
模板7	求二项展开式中的特定项系数	339
模板8	求二项展开式中的常数项	341
模板9	求二项式中参数的值	342

第二章 随机变量及其分布

模板1	求离散型随机变量的分布列	344
模板2	利用条件概率公式求概率	346
模板3	求相互独立事件的概率	348
模板4	二项分布的概率问题	351
模板5	求随机事件的概率	353
模板6	求离散型随机变量的均值或方差	355
模板7	求正态分布下的概率	359

第三章 统计案例

模板1	求非线性回归方程	361
模板2	独立性检验	364

附录 思想方法篇

模板1	转化与化归思想	367
模板2	分类讨论思想	369
模板3	数形结合思想	371
模板4	函数与方程思想	373
参考答案		375

模板 1 求集合中元素的个数 [5年12考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(江西高考)若集合 $A=\{-1,1\}$, $B=\{0,2\}$, 则集合 $\{z z=x+y, x \in A, y \in B\}$ 中的元素的个数为(). A. 5 B. 4 C. 3 D. 2	本模板解决的是“已知集合 A, B , 且 M 是由 A, B 按某种规则生成的集合, 求 M 中元素的个数”的问题.
解析: 列树状图并计算: $\begin{array}{l} 0 \rightarrow -1 \\ -1 \swarrow \searrow \\ 2 \rightarrow 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \rightarrow 1 \\ 1 \swarrow \searrow \\ 2 \rightarrow 3 \end{array}$ 显然 $\{z z=x+y, x \in A, y \in B\} = \{-1, 1, 3\}$. 即有3个元素. 答案:C	第一步 将 A, B 按树状图的形式写出所有组合. 第二步 按规则计算每一组组合的结果. 第三步 检查互异性, 得到生成集合. 第四步 数出元素个数.

模板攻略

1. 模板解决思路

求有限集合 M 的元素个数, 一般是先将 M 求出来, 然后数出元素个数. 而求集合 M , 一般是采用列举法结合 M 的生成规则, 一一写出 M 中的元素, 然后检验其中的有效个数. 而列举法一般选用树状图.

2. 模板解决步骤

- ①第一步 采用树状图列出所有组合.
- ②第二步 计算 M 生成规则下每一组组合的值.
- ③第三步 写出集合 M , 并检验.
- ④第四步 数出 M 中元素的个数.

3. 典型例题

典例 1 (山东高考) 已知集合 $A=\{0,1,2\}$, 则集合 $B=\{x-y | x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是().

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

解析: 列树状图并计算:

$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow 0 \\ 0 \swarrow \searrow \\ 1 \rightarrow -1 \\ 2 \rightarrow -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \rightarrow 1 \\ 1 \swarrow \searrow \\ 1 \rightarrow 0 \\ 2 \rightarrow -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \rightarrow 2 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 0 \end{array} \quad \textcircled{1-2}$$

由集合的互异性知 $B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

即 B 中有5个元素.

答案:C

典例 2 定义集合运算: $A * B = \{z | z = xy, x \in A, y \in B\}$, 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, 则集合 $A * B$ 中元素个数为_____.

解析: 列树状图并计算:

$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow 0 \\ 1 \swarrow \searrow \\ 2 \rightarrow 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \rightarrow 0 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 2 \rightarrow 4 \end{array} \quad \textcircled{1-2}$$

由集合的互异性知 $A * B = \{0, 2, 4\}$.

即 $A * B$ 中有3个元素.

答案:3

数学神童维纳的年龄(一) 20世纪著名的数学家诺伯特·维纳, 从小就智力超常, 三岁时就能读写, 十四岁时就大学毕业了. 几年后, 他又通过了博士论文答辩, 成为美国哈佛大学的科学博士. 在博士学位的授予仪式上, 执行主席看到一脸稚气的维纳, 颇为惊讶, 于是就当面询问起他的年龄来. 维纳不愧为数学神童, 他的回答十分巧妙.



知识要点

1. 集合的含义

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫作集合(简称为集).

2. 集合中元素的特征

(1)确定性:给定的集合,它的元素必须是确定的.这就是说,给定一个集合,那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了.如“高一(1)班的高个子同学”就不能构成一个集合,因为组成它的元素是不确定的.

(2)互异性:一个给定集合中的元素是互不相同的(或说是互异的).也就是说,集合中的元素是不重复出现的.

(3)无序性:组成集合的元素不考虑顺序.如 $\{1,2,3\}$ 与 $\{3,2,1\}$ 表示同一个集合.只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是相等的.

3. 元素与集合的关系

给定一个集合 A ,任何一个对象 a 是不是这个集合的元素就确定了.若 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$;若 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$.

特别提示

符号“ \in ”和“ \notin ”表示的是元素与集合间的关系,元素与集合间只有“ \in ”和“ \notin ”两种关系.

4. 集合的表示方法

(1)列举法

把集合的元素一一列举出来,并用花括号“ $\{ \}$ ”括起来表示集合的方法叫作列举法.

(2)描述法

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法.具体方法是:在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

(3)Venn图

用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种图称为Venn图.

特别提示

(1)用列举法表示集合时,注意:①元素间用逗号“,”隔开;②元素排列无固定顺序;③列举法也可以表示有明显规律的元素组成的无限集.
(2)用描述法表示集合时,①在不致发生误解时,元素的取值集合可以不写.例如,在实数集 \mathbf{R} 中取值,“ $\in \mathbf{R}$ ”常常省略不写.②“ $\{ \}$ ”本身已经暗含“所有”的意思,故在表示集合时,条件中不必再写“所有”二字.(3)Venn图必须是封闭曲线,常用椭圆、圆、矩形、正方形等表示.用Venn图表示的集合通常元素个数较少且为有限个,如果元素个数无限,如 $\{x|x>1\}$ 常借助于数轴表示.

模板演练

→ 答案详见 P375

1. (新课标全国高考)已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{(x,y)|x \in A,y \in A,x-y \in A\}$,则 B 中所含元素的个数为().

A. 3 B. 6 C. 8 D. 10

2. 设 P, Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b|a \in P,b \in Q\}$,若 $P=\{0,2,5\}$, $Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是().

A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

3. (宁夏高考)设集合 $P=\{3,4,5\}$, $Q=\{4,5,6,7\}$,若定义新集合 $P*Q=\{(a,b)|a \in P,b \in Q\}$,则集合 $P*Q$ 中元素的个数为().

A. 3 B. 4 C. 7 D. 12

4. (全国高考)设集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$, $M=\{x|x=a+b,a \in A,b \in B\}$,则 M 中元素的个数为().

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

2

凯尔微博



数学神童维纳的年龄(二) 他说:“我今年岁数的立方是个四位数,岁数的四次方是个六位数,这两个数,刚好把十个数字 $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 全都用上了,不重不漏.这意味着全体数字都向我俯首称臣,预祝我将来在数学领域里一定能干出一番惊天动地的大事业.”维纳此言一出,四座皆惊,大家都被他的这道妙题深深地吸引住了,整个会场上的人都在议论他的年龄问题.

模板 2 求特定子集的个数 [5年6考]

模板探究

母题呈现	模板引入
<p>(湖北高考)已知集合 $A=\{x x^2-3x+2=0, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{x 0 < x < 5, x \in \mathbf{N}\}$, 则满足条件 $A \subseteq C \subseteq B$ 的集合 C 的个数为 ().</p> <p>A. 1 B. 2 C. 3 D. 4</p>	<p>本模板解决的是“已知集合 A, 求其满足特定条件 p 的子集个数”的问题.</p>
<p>解析: 集合 $B=\{1, 2, 3, 4\}$, 有4个元素, 集合 $A=\{1, 2\}$, 则集合 C 的个数问题可转化为 $\{3, 4\}$ 的子集个数问题, 即 $2^2=4$.</p> <p>答案:D</p>	<p>第一步 先将集合 B 表示出来, 确定 C 最多包含元素个数.</p> <p>第二步 将集合 A 表示出来, 确定 C 必须包含元素.</p> <p>第三步 从 B 中去掉 A 的元素, 转化为无限制条件的集合的子集个数问题.</p> <p>第四步 求出子集个数.</p>

模板攻略

1. 模板解决思路

求子集个数的关键是确定其中元素的个数, 因此, 要将所给条件 p 转化为必须包含或不能包含的元素的集合, 然后问题可转化为无限制条件的集合的子集问题.

2. 模板解决步骤

① **第一步** 求出子集被包含集合的元素, 确定元素个数.

② **第二步** 将子集应满足条件 p 转化为必须包含的元素.

③ **第三步** 在被包含集合中去掉子集必须包含的元素, 将问题转化为一个集合无限制条件的子集个数问题.

④ **第四步** 求出子集个数.

3. 典型例题

典例 1 (新课标全国高考)已知集合 $M=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $N=\{1, 3, 5\}$, $P=M \cap N$, 则 P 的子集共有 ().

A. 2个 B. 4个 C. 6个 D. 8个

解析: 由题意 $M \cap N = \{1, 3\}$,

即 $P = \{1, 3\}$, 共有2个元素.

所以 P 的子集个数为 $2^2=4$ (个).

答案:B

典例 2 (安徽高考)设集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$, 则满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 的个数为 ().

A. 57 B. 56 C. 49 D. 8

思路分析: 令 $C = \{4, 5, 6\}$. 则 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 与 $S \subseteq A$ 且 $S \cap C \neq \emptyset$ 等价, 而 $S \cap C = \emptyset$ 可用模板方法求之.

解析: 令 $C = B \cap A = \{4, 5, 6\}$,

而 A 共有子集 $2^6=64$ (个),

$S \subseteq A$ 且 $S \cap C = \emptyset$, 等价于 $S \subseteq \{1, 2, 3\}$.

即这样的 S 有 $2^3=8$ (个),

所以 $S \subseteq A$ 且 $S \cap C \neq \emptyset$ 的集合个数为 $64-8=56$ (个),

即 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合个数为 56.

答案:B

数学神童维纳的年龄(三) 其实这个问题不难解答, 但是需要一点数字“灵感”, 不难发现, 21的立方是四位数, 而22的立方已经是五位数了, 所以维纳的年龄最多是21岁; 同样道理, 18的四次方是六位数, 而17的四次方则是五位数了, 所以维纳的年龄至少是18岁. 这样, 维纳的年龄只能是18, 19, 20, 21这四个数字中的一个. 剩下的工作就“一一筛选”了.



知 识 要 点

1. 子集

一般地,对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素(若 $a \in A$, 则 $a \in B$), 那么集合 A 称为集合 B 的子集, 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

根据子集的定义, 我们知道 $A \subseteq A$. 也就是说, 任何一个集合是它本身的子集. 对于空集 \emptyset , 我们规定 $\emptyset \subseteq A$, 即空集是任何集合的子集.

2. 真子集

如果 $A \subseteq B$, 但存在元素 $x \in B$, 且 $x \notin A$, 那么集合 A 称为集合 B 的真子集, 记为 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

特别提示

(1) 空集是任何非空集合的真子集.

(2) 若 $A \subseteq B$, 则 $A=B$ 或 $A \subsetneq B$.

(3) 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

(4) 含有 $n(n \geq 1)$ 个元素的集合有 2^n 个子集, 有 $2^n - 1$ 个真子集, 有 $2^n - 2$ 个非空真子集.

模 板 演 练

→ 答案详见 P375

1. 集合 $\{x \in \mathbf{N}^+ \mid \frac{12}{x} \in \mathbf{Z}\}$ 的子集个数为().

A. 4 B. 6 C. 16 D. 64

2. (山东高考) 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的子集的个数是().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x = 2a, a \in A\}$, 则集合 $\complement_U(A \cup B)$ 的子集个数为_____.

4. 数集 A 满足条件: 若 $a \in A$, 则 $\frac{1-a}{1+a} \in A (a \neq 1)$.

若 $\frac{1}{3} \in A$, 则集合 A 至少有 _____ 个子集.

模板 3 集合的运算问题 [5年75考]

模 板 探 究

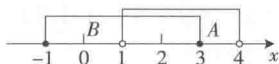
母 题 呈 现

(浙江高考) 设集合 $A = \{x \mid 1 < x < 4\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$ ().

A. (1, 4) B. (3, 4)
C. (1, 3) D. (1, 2) \cup (3, 4)

解析: 由题意知, $B = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$.

将 A, B 表示在数轴上如图:



显然, $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$.

$A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x \mid 3 < x < 4\} = (3, 4)$.

答案: B

模 板 引 入

本模板解决的是“已知集合 A, B , 求 A, B 经过交、并、补等相关运算后的集合”的问题.

第一步 将集合 B 也表示成最简形式.

第二步 将集合 A, B 在数轴上表示出来.

第三步 从数轴上运算出 $\complement_{\mathbf{R}} B$ 和 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$.

第四步 将数轴上的运算结果用集合或区间表示出来.

4

凯尔微博



数学神童维纳的年龄(四) 20的立方是8 000, 有三个重复数字0, 不合题意. 同理, 19的四次方等于130 321, 21的四次方等于194 481, 都不合题意. 最后只剩下一个18, 是不是正确答案呢? 18的立方是等于5 832, 四次方等于104 976, 恰好“不重不漏”地用完了十个阿拉伯数字! 这个年仅18岁的少年博士, 后来果然成就了一番大事业: 他成为信息论的前驱和控制论的奠基人.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决本模板问题首先要将 A, B 表示成最简形式, 然后按照 A, B 的几何意义, 将对应的图形画出来, 然后在图形上进行相关运算, 最后, 将运算的结果再转化为集合或区间形式.

2. 模板解决步骤

①第一步 将集合化成最简形式.

②第二步 确定集合表示的几何意义, 将对应的图形表示出来.

③第三步 利用图形进行运算, 求出运算结果.

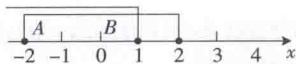
④第四步 将运算结果表示成集合或区间形式.

3. 典型例题

典例 1 (天津高考) 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ ().

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[1, 2]$
C. $[-2, 2]$ D. $[-2, 1]$

解析: $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$, ①
在数轴上表示如下



则 $A \cap B = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$, 故选 D. ②

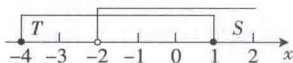
答案: D ③~④

典例 2 (浙江高考) 设集合 $S = \{x \mid x > -2\}$, $T = \{x \mid -4 \leq x \leq 1\}$, 则 $S \cap T =$ ().

- A. $[-4, +\infty)$ B. $(-2, +\infty)$
C. $[-4, 1]$ D. $(-2, 1]$

解析: $S = \{x \mid x > -2\}$, $T = \{x \mid -4 \leq x \leq 1\}$, ①

在数轴上表示如下



所以 $S \cap T = \{x \mid -2 < x \leq 1\}$. ②

答案: D ③~④

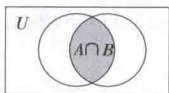
① 误区警示

在数轴上表示集合时, 要注意实心点和空心圈的区别: 实心点表示包含这个点, 空心圈表示不包含这个点.

知识要点

1. 交集

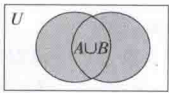
一般地, 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$ (读作“ A 交 B ”), 即 $A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$.



$A \cap B$ 可用图中的阴影部分来表示.

2. 并集

一般地, 由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$ (读作“ A 并 B ”), 即 $A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$.



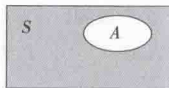
$A \cup B$ 可用图中的阴影部分来表示.

3. 补集、全集

设 $A \subseteq S$, 由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的补集, 记为 $\complement_S A$ (读作“ A 在

S 中的补集”), 即 $\complement_S A = \{x \mid x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}$. $\complement_S A$ 可用图中的阴影部分表示.

如果集合 S 包含我们所要研究的各个集合, 这时 S 可以看作一个全集, 全集通常记作 U .



特别提示

对任意的集合 A, B , 有

(1) $A \cap B = B \cap A, A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B, A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.

(2) $A \cup B = B \cup A, A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B, A \cup A = A, A \cup \emptyset = A$.

(3) $\complement_U (\complement_U A) = A, \complement_U U = \emptyset, \complement_U \emptyset = U, A \cap (\complement_U A) = \emptyset, A \cup (\complement_U A) = U$.

(4) $\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B, \complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$.

数学家卡当(一) 卡当 1501 年出生于意大利的帕维亚, 在文艺复兴时期是一位举足轻重的数学家, 也是一位典型的人文主义者, 除了数学他也专注于组织、研究、评论希腊和罗马的成果. 卡当有个不幸的童年, 在 40 岁之前, 他穷得一无所有, 个性孤僻, 自负、缺乏幽默感、不能自我反省, 并且往往在言谈中表现得冷漠无情.



