

怪波及其数学理论

郭柏灵 田立新 闫振亚 凌黎明 著

浙江科学技术出版社



怪波及其数学理论

郭柏灵 田立新

目振亚 凌黎明 著

浙江科学技术出版社



图书在版编目(CIP)数据

怪波及其数学理论 / 郭柏灵等著. — 杭州: 浙江科学技术出版社, 2015.4

ISBN 978-7-5341-6606-8

I. ①怪… II. ①郭… III. ①波-研究 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 079837 号

怪波及其数学理论

郭柏灵 田立新 闫振亚 凌黎明 著

出版发行 浙江科学技术出版社

地址: 杭州市体育场路 347 号 邮政编码: 310006

办公室电话: 0571-85176593

销售部电话: 0571-85176040

网址: www.zkpress.com

E-mail: zkpress@zkpress.com

印刷 浙江新华数码印务有限公司

经销 全国各地新华书店

开本	787 × 1092 1/16	印张	15.25
字数	397 000		
版次	2015 年 4 月第 1 版		2015 年 4 月第 1 次印刷
书号	ISBN 978-7-5341-6606-8	定价	128.00 元

版权所有 翻印必究

(图书出现倒装、缺页等印装质量问题, 本社负责调换)

责任编辑 莫沈茗 何晓嵘

责任校对 卢晓梅

责任印务 田文

责任美编 孙菁

封面设计 郭崇

前 言

20 世纪 60 年代以来, 海洋上出现大量由中国学者命名的怪波现象, 引发了研究者对“怪波”的兴趣。“怪波”的概念最早来源于海洋学。所谓怪波, 即一种出现在海洋上“来无影、去无踪”, 既有波峰又有波谷, 具有极大破坏性的波浪。起初人们不太明白这一现象的存在机制, 但是随着科学技术的发展, 一些海洋探测器观察到了这一现象, 如北海上探测到的“新年波”。如今怪波理论已在诸多领域中被提出, 如非线性光学、冷原子、金融系统、等离子体等。最近几年, 关于怪波的研究在应用物理领域取得了巨大进展, 研究者先后在实验室观察到“光学怪波”、“水槽怪波”和“等离子怪波”, 为怪波研究提供了有力的支撑。国际上著名的实验理论孤子专家 Akhmediev 及其团队成员先后在 *Nature Physics*, *Physics Review Letters* 等著名杂志发表一系列有关怪波的文章, 并且从实验和理论上分别证明了 1 维经典的非线性薛定谔方程的有理分式解为怪波解。在这一理论的推动下, 研究可积系统的怪波解变得火热起来。现在可积系统的方法 (反散射方法、Darboux 变换方法、双线性方法和代数几何解约化方法) 均被用于求解“怪波”解。此外, 在波色—爱因斯坦凝聚中具有变系数位势的方程在具体的物理系统中起着重要作用, 也和可积系统联系起来。研究变系数方程的一种行之有效的办法是相似变换方法。

基于上述事实, 本书的主要内容有: 在讲述怪波的基本物理背景的基础上, 重点介绍怪波解的求解方法, 包括利用极限技巧推广的 Darboux 变换方法、Schur 多项式—双线性方法、代数几何解极限法等, 以及在非自治系统中, 利用相似变换方法得到非自治怪波解的方法。应当指出, 这些最新成果也包括了本书作者及其合作者得到的一些研究成果。我们期望读者在阅读本书的基础上, 可以直接地、较快地开展一些怪波问题的研究。

由于作者水平和篇幅有限, 书中难免有一些不当和疏漏, 甚至出现某些错误之处, 敬请读者批评指正。

郭柏灵

2014 年 6 月 15 日于北京

目 录

第一章 怪波的研究进展	1
1.1 怪波现象的研究进展	1
1.2 怪波的重要实验	5
1.3 怪波的研究方法与物理机制	9
1.3.1 怪波的研究方法	9
1.3.2 怪波的物理机制	11
1.4 怪波的机制	12
1.4.1 怪波的线性机制	12
1.4.2 怪波的非线性机制	17
1.5 怪波形成的机理及特征	21
1.6 用实验、统计、数值模拟研究怪波	26
1.7 非线性偏微分方程的怪波解	34
1.8 光学怪波	41
1.9 金融怪波	43
1.10 非自治怪波解	43
第二章 怪波解构造方法——推广的 Darboux 变换方法	45
2.1 经典的 Darboux 变换	45
2.2 经典 KdV 方程推广的 Darboux 变换	47
2.3 N 分量聚焦 NLS 方程的 Darboux 变换	50
2.4 两分量 NLS 方程的怪波解及其明暗怪波解	53
2.4.1 两分量 NLS 方程的怪波解	53

2.4.2	明暗呼吸子和明暗怪波解	56
2.5	NLS 方程推广的 Darboux 变换	59
2.5.1	推广的 Darboux 变换	60
2.5.2	高阶怪波解的行列式表示	64
2.5.3	标准形式 NLS 怪波解的数学性质	69
2.6	DNLS 推广的 Darboux 变换	72
2.6.1	Darboux 变换-I	73
2.6.2	Darboux 变换-II	76
2.6.3	约化	79
2.6.4	推广的 Darboux 变换	80
2.6.5	推广的 Darboux 变换-II	83
2.6.6	DNLS 的高阶孤子和怪波	86
第三章 怪波解的其他构造方法——双线性方法, 代数几何约化方法		101
3.1	Hirota 双线性方法	101
3.1.1	NLS 方程的怪波解	101
3.1.2	DS-I 方程的怪波解	118
3.2	KP 方程约化的方法	125
3.3	代数几何约化方法	130
3.3.1	Fredholm 行列式与 θ 函数的关系	131
3.3.2	朗斯基行列式形式解	132
3.3.3	怪波解的构造	136
第四章 非线性物理模型的怪波解与参数调控		139
4.1	怪波解简介	139
4.2	时空调制的 NLS 方程	140
4.2.1	1 维非线性物理模型	140
4.2.2	对称分析——相似变换及相似解	141
4.2.3	1 维自相似 (非自治) 光怪波 (怪子) 解及参数分析	143
4.3	(3+1) 维时空调制的 GP/NLS 方程	145
4.3.1	3 维非线性物理模型	145

4.3.2	对称分析——相似变换及约束系统	147
4.3.3	相似变量、约束条件及速度场	148
4.3.4	3 维自相似怪波解及参数调控	149
4.4	广义时空调制的高阶 NLS 方程	151
4.4.1	对称分析——变换和 Hirota 方程	153
4.4.2	相似变量和系数调控分析	155
4.4.3	Hirota 方程的 Darboux 变换	157
4.4.4	自相似光怪波解	158
4.5	2 维 BEC 中的二元混合模型	161
4.5.1	2 维两分量 GP 方程	161
4.5.2	对称约化类型分析	162
4.5.3	相似变量和参数的确定	164
4.5.4	非线性相互作用的类型	166
4.5.5	自相似向量怪波解	167
4.6	(2+1) 维非局部 NLS 方程	169
4.6.1	2 维非局部物理模型	169
4.6.2	2 维变量分离约化	169
4.6.3	2 维类怪波解	170
4.7	广义时空调制的离散 Ablowitz-Ladik-Hirota 格子	172
4.7.1	离散非线性物理模型	172
4.7.2	微分—差分相似变换、相位分析和约束条件	174
4.7.3	离散变换与调控系数的确定	175
4.7.4	离散自相似怪波解及其相互作用	176
参考文献		207

第一章 怪波的研究进展

1.1 怪波现象的研究进展

怪波 (rogue wave) 又称奇异波 (freak wave)、怪物波 (monster wave)、极端波 (extreme wave)、杀手波 (killer wave)、巨波 (giant wave) 等. 由于怪波的现象复杂, 难以精确地定义, 因此本书给出从互联网上搜索到的怪波图片 (图 1.1), 以使读者有形象的理解. 在海洋学上, 目前对怪波较为权威的说法是, 海洋中突然出现的一些怪异的大振幅波浪, 具有“来无影、去无踪”的基本特性. 现在这一非线性现象相继出现在非线性光学、Bose-Einstein 凝聚 (BEC)、大气科学、超流、金融学等领域. 英国科学家 Draper^[1] 于 1965 年首次在科学文献中提出怪波 (freak rogue waves) 的概念后, 这一现象引起了海洋学、物理学以及其他非线性科学领域研究者的关注.



图 1.1 互联网上搜索到的怪波图片

几个世纪以来, 怪波一直是海洋传说和海洋民俗文化中的一部分. 在海洋中, 怪波像深海怪兽一样, 它的到来没有丝毫预兆, 吞噬着水手和船只, 引发了许多海上灾难.

1933 年, 美国 Ramapo 号军舰在北太平洋上遇到了一个巨大的冲击波, 船员们冷静

地测量了这个巨大的波,从船甲板上,它的波幅约为 34 m. 这是目前海洋上观察到有准确记录的最大怪波 [2].

自 1952 年后,在印度洋、近阿加勒斯海流和南非沿岸等至少发生了 12 起有记录的船舶遭遇怪波的事件. 其中比较惨重的是 1968 年 6 月 13 日 World Glory 号邮轮在南非沿岸被怪波击中,断为两截后沉入海底,如图 1.2 所示. 此次事件造成 22 名船员罹难 [3],可见怪波的破坏力非常巨大.



图 1.2 World Glory 号邮轮被怪波击中而沉入海底

1966 年,由意大利开往美国的米开朗基罗号游轮,在航行中突然遇到一个浪高大约 24 m 的巨大浪潮,这个浪潮像是将周围“撕了一个洞”,捣烂了沉重的玻璃,使得一名船员和两名乘客遇难.

1978 年,德国慕尼黑载驳船沉没在大西洋,扭曲的残骸说明它是被一个巨大的波浪摧毁的.

1980 年,Philippe Lijour 在南非 (阿扎尼亚) 东部港市德班海域的 Esso Languedoc 号邮轮上拍摄到了一个 25 m 高的怪波,如图 1.3 所示. 从图中可以看见一个明显的“水洞”.



图 1.3 Esso Languedoc 号邮轮上拍摄到的怪波

1984 年,北海挪威海域 Ekofisk 油田位于平均海面之上 20 m 的 2/4-A 采油平台因

受到怪波袭击而出现了一定的损毁. 在该事故中, 平台控制室的墙壁被波浪击毁, 致使生产停滞了 24 h [4].

1986 年, 美国 SS Spray 号军舰在查尔斯顿外海域遭遇了目测浪高约为 25 m 的三个连续突发海浪 [5], 图 1.4 是当时在军舰上拍到的画面, 图中可以清晰地看见怪波高度的不对称性.



图 1.4 SS Spray 号军舰上观察到的怪波

1969—1994 年的 26 年时间内, 太平洋和大西洋海域共有 22 艘巨轮因遭遇怪波而失事 [6], 造成了约 525 人伤亡, 发生灾难的具体情况参见文献 [6]. 此外, 据不完全统计, 从 1981—2000 年的 20 年间, 由于海况不佳和恶劣天气条件造成了 200 多艘大型货船的损失, 而此类船只的船员多次提到波高异常的单怪波或极值波组 [7].

1995 年 1 月 1 日, 怪波袭击了北海水深为 70 m 水域的 Draupner 采油平台, 对设备造成了一定的损坏. 该波即为著名的“新年波” [8], 是目前记录最完整的怪波, 其波高为 25.6 m, 波峰高度为 18.5 m, 周期约为 12.55 s, 而当时采油平台可抵抗的有效波高仅为 12 m. “新年波”的波高分布如图 1.5 所示.

2005 年 4 月 16 日, 在佐治亚州海岸, 出现了一些约 7 层楼高的巨大波浪. 这些波浪成弓形坠落, 冲碎了船的窗户, 落到高达 10 m 的甲板上, 淹没了 62 个客舱, 使得 4 名乘客受伤.

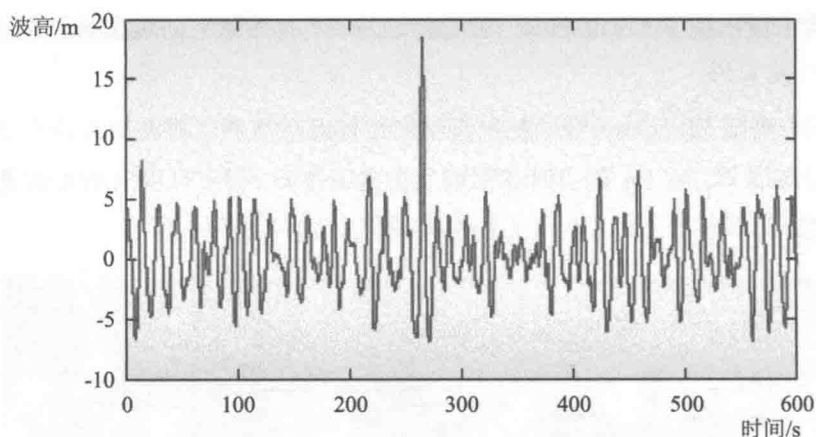


图 1.5 北海上观察到的“新年波”

美国国家海洋和大气局网站上刊登过从一艘舰艇上拍摄到的怪波图像 (图 1.6). 当时气候的条件是微风, 怪波的波高大约为 18 m, 图片是在怪波撞击这艘船数秒之后拍摄的.

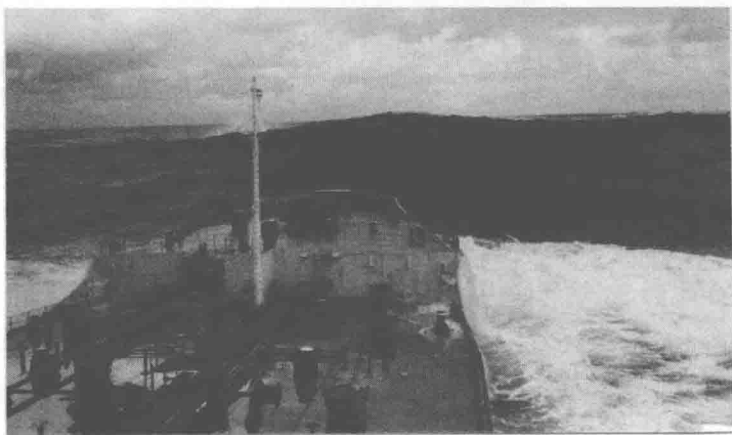


图 1.6 南加州海洋上观察到的怪波

通过对上述图片及其事件的分析, 不难发现怪波具有这样一些特征: 波峰非常陡、高度不对称、来无影去无踪.

人类一直怀疑怪波的存在, 认为怪波是神秘的, 往往把怪波、美人鱼和海怪放在一起讨论, 直到可直接观测的怪波出现才证实了其在现实中的存在性. 自 20 世纪六七十年代起, 海洋学家便开始相信怪波的存在. 科学家们与欧洲航天局、德国航空航天中心以及其他几个欧洲的研究机构合作, 在 1991 年和 1995 年发射雷达卫星, 雷达波束被看

作是潜在的、理想的测量波浪高度的工具, 基于雷达波束到海面 and 从海面返回到太空所用的时间可测量波高. 1995 年元旦, 北海中某岩石般稳定的石油平台承担了激光测量波浪高度的任务. 在狂风暴雨中, 它记录了一个波高约 26 m 的巨波, 为怪波存在提供了确凿的证据. 2000 年 2 月, 英国海洋调查船在苏格兰西部测到波高约 29 m 的巨波, 地球物理研究人员称这是通过科学仪器所记录到的最大的怪波. 研究证明, 怪波上升的高度至少有波高波高约 25 m, 约 8 层建筑的高度, 大的怪波平均浪高约 30 m. 科学家们于 2000 年在布雷斯特聚会, 急于在全球范围内追踪怪波现象, 他们制订了周密的计划, 使用雷达卫星进行怪波探测, 这一计划被称作 MaxWave. 2005 年, 穆勒等人在关于怪波的一次研讨会上报告说: “在空间和时间上对怪波的综合观测的缺乏, 极大地阻碍了我们对怪波的理解.” 毫无疑问, 全面、长期地对怪波进行测量是非常必要且迫切需要的.

海上观察者称怪波为“水墙”、“海洞”或几个连续的高波, 这种波没有任何预兆地出现在良性环境中, 伴随着很深的孔, 一般出现在最大波峰的前面或后面. 怪波对应于大振幅波, 突然出现在海面上 (不知从哪来的). 它们是出现在海洋中的振幅超过周围平均波峰的巨大单波.

由于观测条件的限制, 人类至今还没有完全了解这种现象. 科学家们一直没有对怪波事件达成共识, 既不能给其定义, 也不能计算怪波发生的概率. 虽然怪波没有确切的定义, 但怪波的定义应该包含下列特征: 波很高、很不对称、很陡. 怪波振幅标准: 其幅度应该至少超过背景场 (显著) 高度的两倍以上. 海洋表面突然出现的大振幅波、振幅超过周围平均波峰两倍以上巨波通常称为怪波. 目前对怪波的研究状态基本上是初步的, 并且是欠深入的.

怪波可以被认为是自孤子^[9, 10, 11]之后, 在非线性科学领域掀起的又一场新的“非线性科学革命”. 从数学的角度看, 怪波解同孤子解存在本质区别. 孤子随着时间变化, 保持形状不变, 是一个稳定的波包. 即便对于某些非自治的系统, 非自治的孤子其形状也近乎一致. 然而, 怪波的形状是变化的、不稳定的, 且具有非常强的初值敏感性.

1.2 怪波的重要实验

2007 年, Solli, Ropers, Koonath 等人^[12]在 *Nature* 期刊上发表了研究成果, 他们率先在非线性光学中通过实验观察到光学怪波 (optical rogue waves). 光在非线性材料中的传播通过广义的非线性薛定谔方程 (以下称 NLS 方程)

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i \sum_{m=2} \frac{i^m \beta_m}{m!} \frac{\partial^m A}{\partial t^m} = i\gamma \left[|A|^2 A + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2 A) - T_g A \frac{\partial |A|^2}{\partial t} \right] \quad (1.2.1)$$

来调控, 这里 β_m 表示光纤的色散系数, γ 表示光纤的非线性系数, ω_0 表示场的中央载波频率, T_g 表示硅纤维迟滞参数, $A = A(t, z)$, z 表示传播变量, t 表示时间, $\frac{\partial}{\partial t}(|A|^2 A)$ 表示自陡项 (self-steepening), $A \frac{\partial |A|^2}{\partial t}$ 表示自频移动, $|A|^2 A$ 表示 Kerr 非线性项, $\frac{\partial^m A}{\partial t^m}$ 表示色散项. 通过重复的实验比对, 利用超连续谱加以随机扰动得到了光在非线性材料中传播时产生的怪波现象, 如图 1.7 所示.

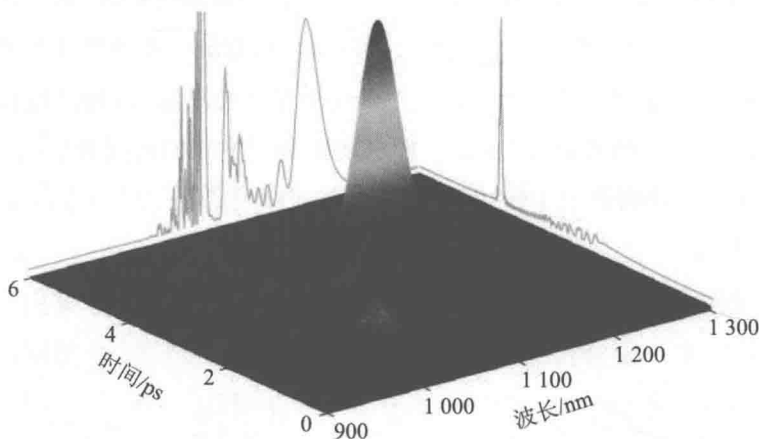


图 1.7 光学怪波的图像

2010 年, Kibler, Fatome, Finot 等人^[13]在 *Nature Physics* 期刊上发表了研究成果, 他们率先通过实验结合数值模拟, 观察到怪波解——Peregrine 孤子. 实验利用的模型是经典的 NLS 方程

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (1.2.2)$$

其中 τ 表示时间, ξ 表示距离. NLS 方程 (1.2.2) 具有如下形式的解:

$$\psi(\xi, \tau) = \left[1 - \frac{4(1 + 2i\xi)}{1 + 4\tau^2 + 4\xi^2} \right] e^{i\xi}.$$

从图 1.8 上可以看出, 实验结果和数值模拟与解析解比对非常类似, 这就从实验上说明了怪波解的存在性.

关于深水海洋上的模型研究, 这方面工作已经做得非常多, 本书引入近些年的最新的结果. 由于在深海中做实验非常危险, 而且难度极高, 2011 年, Chabchoub, Hoffmann

和 Akhmediev [14] 在一个波浪水槽中实验得到了怪波. 2012 年, Chabchoub, Hoffmann, Onorato 等人 [15] 通过实验得到了高阶怪波 (最高到五阶怪波). 这些实验都证实了有理怪波解的存在性. 不仅如此, 有理怪波解非常吻合怪波的特征. 所以本书后面的章节主要默认怪波的基本机制为调制不稳定性 and 有理函数解为怪波解.

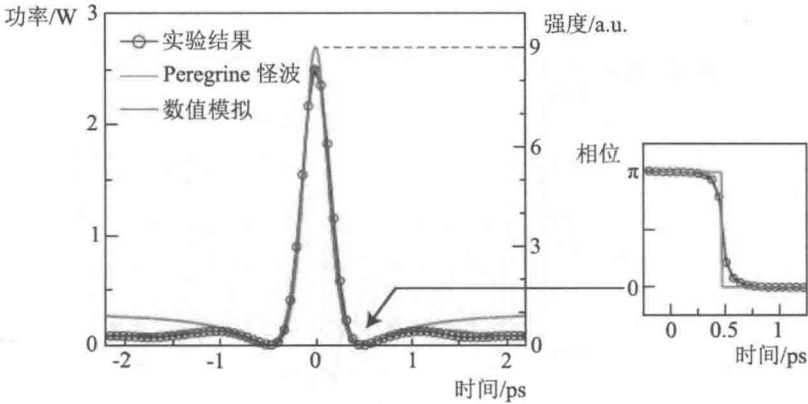


图 1.8 实验、数值以及精确解的比对 ($\xi = 2.5$)

深水波模型可以用 NLS 方程

$$i\left(\frac{\partial a}{\partial t} + c_g \frac{\partial a}{\partial x}\right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\omega_0 k_0^2}{2} |a|^2 a = 0 \tag{1.2.3}$$

来描述, 此模型首次由 Zakharov 导出, 这里 t 表示时间, x 表示长度坐标, k_0 和 $\omega_0 = \omega(k_0)$ 分别表示波数和载波的频率. ω_0 和 k_0 通过线性深水波理论的色散关系联系起来, $\omega_0 = \sqrt{gk_0}$, 这里 g 表示重力加速度. 对应地, 群速度为 $c_g = \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0} = \frac{\omega_0}{2k_0}$. 水面高度为 $\eta(x, t) = \text{Re}(a(x, t)e^{i(k_0 x - \omega_0 t)})$. 利用坐标变换 $T = -\frac{\omega_0}{8k_0^2} t$, $X = x - c_g t = x - \frac{\omega_0}{2k_0} t$, $q = \sqrt{2k_0^2} a$, 可以得到无量纲的 NLS 方程

$$iq_T + q_{XX} + 2|q|^2 q = 0. \tag{1.2.4}$$

它的一阶怪波解可以表示为

$$q(X, T) = \left(1 - \frac{4(1 + 4iT)}{1 + 4X^2 + 16T^2}\right) e^{2iT}.$$

为了描述实验结果, 应用下面的变换将其变为带参数的解 $X \rightarrow \sqrt{2k_0^2} a_0 (x - c_g t)$, $T \rightarrow -\frac{k_0^2 a_0^2 \omega_0}{4} t$. 那么解变为

$$q(x, t) = a_0 e^{-\frac{ik_0^2 a_0^2 \omega_0}{2} t} \left(1 - \frac{4(1 - ik_0^2 a_0^2 \omega_0 t)}{1 + [2\sqrt{2k_0^2} a_0 (x - c_g t)]^2 + k_0^4 a_0^4 \omega_0^2 t^2}\right).$$

利用解析解同实验数据进行比对, 如图 1.9 所示. 发现它们拟合得非常好, 进而证明怪波解在水模型中的合理性. 对于高阶怪波解, 实验的方式一致. 由于高阶怪波解的表达式非常复杂, 这里不详细讨论, 后面章节有专门的研究. 这里给出五阶怪波解同实验观察图像的对比, 如图 1.10 所示.

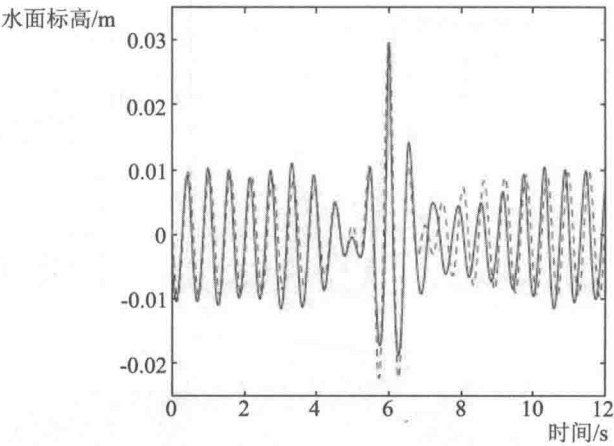


图 1.9 一阶怪波解同实验数据的对比

注: 此对比为在 $X = 0$ 时, 实验数据与解析解的拟合情况 (参数: $a_0 = 0.01\text{ m}$, $k_0 = 11.63\text{ m}^{-1}$, $\omega_0 = 10.7\text{ s}^{-1}$).

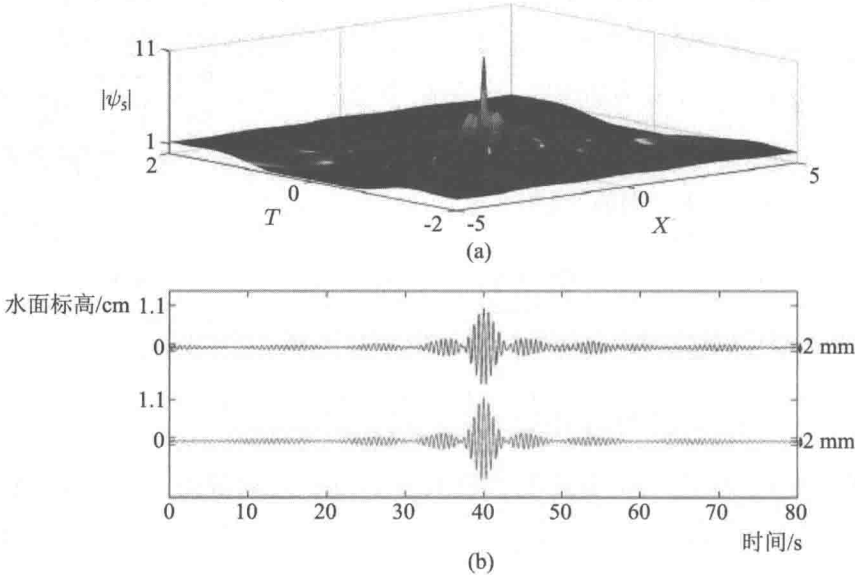


图 1.10 五阶怪波解同实验观察图像的对比

注: 图 (a) 所示为五阶怪波解的图像; 图 (b) 所示为实验观察五阶怪波在 $X = 0$ 时的图像 (参数 $a_0 = 1 \text{ mm}$, $\epsilon = a_0 k_0 = 0.01$). 图 (b) 中上面图形为实验观测数据, 下面图形为解析解的图像. 从图形可以看出, 实验观测数据和解析解拟合得非常好, 进而说明怪波解的合理性.

之所以介绍上面几个实验, 我们是有目的的. 怪波的观点繁多, 假说非常之多, 我们也有自己认同的观点, 基本假设就是调制不稳定性 and 有理怪波解. 从怪波的图形上看, 上面得到的有理解几乎吻合怪波的特征. 其中, 一个不吻合的特征就是一阶有理怪波解的对称性非常好, 同怪波高度不对称的特征似乎有矛盾之处. 事实上, 这是由于怪波的复杂性造成的, 我们亦可以构造出一些高度不对称的怪波解. 我们认为, 这些都不是问题的症结所在, 上述实验说明我们的观点是合理的.

本书主要致力于一些可积模型 (也包含近可积模型) 的怪波分析. 从理论上来说, 可积系统模型方程非常特殊, 不具有一般物理性质. 但是可积模型的一个优势是它可以寻找到一些解析表达式, 这是其他模型不一定能够做到的. 可积系统求解的经典方法有四种: 反散射方法、代数几何约化法、Darboux 变换方法、Hirota 双线性方法. 其中反散射方法和 Darboux 变换方法本质是相通的, 如果从构造精确解的角度分析, 利用 Darboux 变换方便、快捷; 代数几何约化方法依赖于构造 Baker 解析函数和谱分析; 双线性方法需要做相应的变换, 得到对应的双线性形式. 对于求解孤子解, 上述方法在可积系统中已经非常成熟, 然而对于怪波解的构造, 需要进行相应的修正. 第二章专门讨论 Guo, Ling 和 Liu 推广的 Darboux 变换. 第三章介绍其他求怪波解的方法——双线性方法、代数几何约化法. 第四章主要介绍 Yan 等人在非自治的非线性系统中的怪波研究, 利用的主要工具就是相似变换和参数调控, 这是研究变系数可积方程非常有效的工具之一.

为了方便读者了解有关怪波的其他观点, 下面客观列出一些文章, 以供读者全方位了解近些年怪波的研究进展.

1.3 怪波的研究方法与物理机制

1.3.1 怪波的研究方法

在过去的 30 年间, 研究怪波现象的各种物理模型发展迅速, 研究者在实验室对这些

模型进行了许多实验. 目前研究怪波的主要方法有:

(1) 实验、数值模拟、建立模型.

2001 年, M. Onorato, A.R. Osborne 等人^[16]研究了怪波在随机海洋状况中的产生, 从 NLS 方程的广义数值模拟中得出在随机的海洋状态中 Phillips 参数 α 和增益系数很大时, 怪波如何更有可能发生.

2002 年, A. Calini, C.M. Schober^[17]在深水波模型下, 用数值模拟的方法, 研究了 NLS 方程的色散扰动. 此外, 还观察到一个混沌区域形成怪波的现象.

2004 年, M.A. Tayfun^[18]通过实验及统计的方法, 在 N 波波峰的统计数据中, 每两个小时测量记录两个特大的巨浪. 这些波显示的特性显然符合出现的怪波, 但是它们是简单的异常值, 在极值统计背景下预测较好.

2009 年, Zhao, Sun 等人^[19]在一个实验室波箱中, 有限随机波列在波浪破碎的影响下, 对怪波进行研究. 实验研究结果表明, 在深水中怪波事件的发生几率远远大于在浅水中.

2011 年, A.N. Pisarchik, R. Jaimes-Reátegui, R. Sevilla-Escoboza 等人^[20]研究了光纤激光器的谐波泵调制驱动的实验, 发现多稳态系统中怪波存在的证据, 怪波是在多稳态确定性的动态随机过程的相互作用下形成的.

(2) 用非线性偏微分方程为模型研究怪波现象, 利用其解解释怪波.

怪波研究主要有列方程: NLS 方程、Korteweg-de Vries 方程 (以下简称 KdV 方程)、Kadomtsev-Petviashvili 方程 (以下简称 KP 方程)、Ablowitz-Ladik 方程、Hirota 方程、Davey-Stewartson 系统、Zakharov 方程组、ND 完全非线性势方程等. 利用 KP 方程的双孤子解的碰撞, 作为浅水波中的怪波模型.

2009 年, A. Ankiewicz, N. Devine, N. Akhmediev^[21]研究了怪波解是否具有较强的抗扰性.

2010 年, A. Ankiewicz, P. A. Clarkson, N. Akhmediev^[22]研究了聚集 NLS 方程的怪波解的相应多项式函数的积分关系, 本书后面的章节有详细的讨论和叙述.

2011 年, N. Akhmediev, A. Ankiewicz, J.M. Soto-Crespo 等人^[23]研究了 Peregrine 孤子和更高阶 NLS 方程有理解的谱, 依此建立怪波在光学和深海中的模型. 这些解具有特殊的三角形谱, 可在光学系统中轻松测量, 并且服从深海环境的特征. 由于解的三角形特征在演变的早期阶段显示, 这增加了早期发现的可能性, 也增加了怪波出现的局部警告的可能性. 怪波“预警谱”特征的研究将成为今后研究的一个重要领域.