华职

全国高等教育自学考试创新型同步辅导系列

高等数学（工本）

同步辅导·同步训练

竹贝芬　编

课程代码 00023

- 本章考纲解读　深度分析考点
- 考点考频分析　数字解密真题
- 重点知识串讲　全局掌握内容
- 同步强化训练　详解提升能力

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

华职

全国高等教育自学考试创新型同步辅导系列

高等数学（工本）

同步辅导·同步训练

竹贝芬　编

课程代码 00023

- 本章考纲解读　深度分析考点
- 考点考频分析　数字解密真题
- 重点知识串讲　全局掌握内容
- 同步强化训练　详解提升能力

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(工本)同步辅导·同步训练/竹贝芬编.—天津:天津大学出版社,2014.4
(全国高等教育自学考试创新型同步辅导系列)
ISBN 978-7-5618-4995-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①竹… Ⅲ.①高等数学—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 078417 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨 欢
地 址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话	发行部:022-27403647
网 址	publish.tju.edu.cn
印 刷	北京市通县华龙印刷厂
经 销	全国各地新华书店
开 本	185 mm×260 mm
印 张	12
字 数	300 千
版 次	2014 年 5 月第 1 版
印 次	2014 年 5 月第 1 次
定 价	28.00 元

前言

Preface

本书是紧扣全国高等教育自学考试《高等数学（工本）》最新考试大纲及自考委指定教材，系统研究历年考试真题，并在结合多年教辅经验的基础上编写而成的，希望能够对广大学员有所帮助。

该书正文每章节均分为五部分：教材知识架构、本章考纲解读、考点考频分析、重难点知识串讲（含真题链接）、知识强化训练（含参考答案及解析）。下面将逐一进行介绍。

1. 教材知识架构

根据指定教材的内容分布，提炼出知识架构图，以便学员对该章内容进行整体把握，迅速摸清知识脉络、形成知识体系。

2. 考点考频分析

该部分中，笔者研究了 2010 年至 2013 年共 13 次考试的真题，对应于大纲要求的考核知识点进行提炼分析，并直观地显示于表格中。同时，该部分以"★"的数量表示了各知识点的"再考率"，有利于学员直观地把握重点。

考点考频分析表之后，结合笔者教辅经验和对真题的分析，给出了针对各考核知识点复习重要性及考试规律的分析预测。

3. 重难点知识串讲（含真题链接）

该部分与大纲考核知识点一一对应。其内容的框架是从指定教材提炼出来的纲领性内容，加上笔者总结的各种解题规律，十分有利于学员迅速把握重点、形成清晰的解题思路。后附的"真题链接"，是从历年真题中选出的典型例题，兼顾了题目类型、知识点和难易度的多样性，将促进学员快速掌握相应知识点。

4. 知识强化训练（含参考答案及解析）

该部分是在透彻地研究历年考试真题的前提下完成的，所出题目的题型和难易度与真题完全匹配，学员可以用来进一步稳固所学知识，并进行自查。后附的"参考答案及解析"中，对于选择题和填空题，不仅给出了答案，还列出了详细的解析，供学员参考。

预祝广大学员在考试中取得好成绩！

编　者

P备考指南

Preparation Guide

一、大纲解读

《高等数学(工本)》是高等教育自学考试本科段的必修科目(公共课)之一,是为培养和检验自考应考者高等数学(工本)的基本理论和应用能力而设置的基础课程。本课程介绍了高等数学(工本)涉及的基本理论和基本知识及其在实际应用中的具体理解和适用范围,本课程的任务是通过学习和考试,使学生掌握高等数学(工本)的基本理论和知识,为其他学科的学习和工作打下坚实基础。

根据《高等数学(工本)自学考试大纲》的规定,本课程主要内容为空间解析几何和向量代数、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程和无穷级数等。考纲中的重难点有:向量的各种运算,平面方程与直线方程,直线与直线、直线与平面以及平面与平面的关系,二元函数的极限、连续、偏导数、全微分、梯度,极值和最值的方法,偏导数的几何应用,二重积分的计算,二次积分交换积分次序,曲线积分和曲面积分,格林公式和高斯公式,一阶微分方程类型的判别及解法,二阶常系数线性微分方程的解法,非齐次方程特解的形式,数项级数的审敛准则等。

二、学习指导

学员应注意到该课程与一元函数微积分的密切关系,随时复习一元函数微积分有关知识。应注重学习方法和自学能力的培养,复习过程中应努力在掌握知识本身和做题训练细节之间寻求平衡,摸索适合自己的学习方法。

三、复习指导

考生在进行复习时,编者有如下建议。

(1)研读真题。通过研读真题,考生可以了解该门学科在自学考生中的考查方式,挖掘其中的考试要点,从而明确复习方向。本学科的重难点在往年的考试真题中考查率较高,因此考生对常考的重要知识点,需要重点掌握。

(2)通读指定教材。由全国高等教育自学考试指导委员会组编的《高等数学(工本)》教材是全国高等教育自学考试指定教材。教材是考试的命题依据,因此对于教材内容掌握的重要性是不言而喻的。进言之,对于教材内容的掌握,有两点需要注意:其一,对于历年的考查要点要继续识记,因为已经考查过的知识点依然有继续考查的可能性;其二,对于尚未考查的重要知识点也要努力掌握,否则在考场上遇到新的重要考点时会措手不及。总之,对于课本里的重要知识点要一网打尽,考前做好充分准备,这样在考场上才能旗开得胜。

(3)进行试题模拟训练。考生在阶段复习后,可以通过做一定数量的模拟题来检测自己的

学习成果。对于做错的试题要多做分析和总结，这样才能起到查漏补缺的作用。此外，通过做模拟题，考生可以从中总结答题方法，形成良好的答题思维。在做选择题时，考生可采用正选法、排除法、归谬法等多种方法来得出正确答案。在做计算题、证明题时，考生需要注意答题要点的完整性。

考生在充分准备好的基础上，要从以下几点进行，从而保证自己顺利过关。

(1)考试流程。在拿到试卷的时候，可以先把考卷大致地看一遍，然后再答题；也可以直接按先后顺序答题。但不论怎样，面对试卷都要冷静，不要紧张，对于容易的、会答的题，先把它们答出来；而对于那些比较困难的、一时还把握不准的问题，可以先放下来，等到把容易的题全部答出来之后，再去思考那些较难的题。一定要避免出现一味地去思考、琢磨那些难题，把时间都浪费在这些题上，等到考试时间结束的时候，真正会答的题反而没有时间答了。

(2)清晰答题。在答题时，一定要特别注意条理清楚，要点突出。对于问答题，应逐条答出。答题的时候还要注意卷面整洁、字迹工整、格式规范等。

(3)答题技巧。考前一定要充分利用自己的短期记忆，将重要的知识点强化记忆。遇到不会的题目先标示出来，也许后边其他题目会提醒自己想起答案。对于模糊的知识点作答时切忌瞎编，用你知道的相关的知识点去解答，或者将自己模糊的地方换种说法巧妙避开。要果断放弃确实不会做的考题，考场上的时间是很充足的，抽出点时间算算自己有把握的分数。

最后，祝各位考生马到成功！

Contents
目录

第一章
空间解析几何与向量代数

教材知识架构

- 空间解析几何与向量代数
  - 空间直角坐标系
    - 空间直角坐标系的建立
    - 空间中两点间的距离公式
  - 向量代数
    - 向量的概念
    - 向量的加法
    - 向量与数的乘法
    - 向量的投影
    - 向量的坐标
  - 数量积与向量积
    - 数量积
    - 向量积
  - 空间中的曲面和曲线
    - 曲面方程
    - 空间中的曲线方程
    - 空间曲线在坐标面上的投影
  - 空间中的平面与直线
    - 平面方程
    - 直线方程
  - 二次曲面
    - 椭球面
    - 椭圆抛物面
    - 椭圆锥面
    - 单叶双曲面
    - 双叶双曲面

本章考纲解读

本章内容是后续课程的基础，有充分而广泛的应用．学习时，应特别注意运用向量建立平面、直线方程的方法，平面、直线与平面以及平面与平面的相互关系等知识点，这都是学习后续内容必需的基本知识．

根据大纲要求，现将各考核知识点的考核要求归纳如下．

了　解

柱面、旋转面、二次曲面的标准方程．

熟　悉

向量的概念，向量的集合表示与坐标表示．

掌　握

向量的各种运算，平面、直线方程，根据方程判断直线与直线、直线与平面以及平面与平面的相互关系．

其中，向量的各种运算，平面、直线、柱面、球面、圆锥面、旋转抛物面的标准方程及其图形是本章的重点；向量的运算和空间曲线在坐标平面上的投影是本章的难点．建议注重掌握重点，多做习题，逐个突破薄弱环节．

考点考频分析

序号	考点	题号	题型	分值	年份	再考率(用星号表示)
1	空间直角坐标系	1 1 6 6	选择题 选择题 填空题 填空题	3 3 2 2	2013年1月 2012年10月 2011年7月 2010年7月	★★★★
2	向量的概念及其线性运算	6 1	填空题 选择题	2 3	2011年4月 2011年1月	★★
3	向量的坐标	6 6 6 6 1	填空题 填空题 填空题 填空题 选择题	2 2 2 2 3	2012年10月 2012年7月 2012年4月 2011年10月 2010年7月	★★★★
4	向量的数量积	6 6 6	填空题 填空题 填空题	2 2 2	2013年1月 2010年10月 2014年4月	★★
5	向量的向量积	6 1 6	填空题 选择题 填空题	2 3 2	2012年1月 2011年4月 2010年10月	★★★

续表

序号	考点	题号	题型	分值	年份	再考率(用星号表示)
6	平面方程	11 11 11 6 11 11	计算题 计算题 计算题 填空题 计算题 计算题	5 5 5 2 5 5	2012 年 7 月 2011 年 7 月 2011 年 4 月 2011 年 1 月 2010 年 10 月 2014 年 4 月	★★★★★
7	直线方程	11 11 11 1 11 11 11 11	计算题 计算题 计算题 选择题 计算题 计算题 计算题 计算题	5 5 5 5 3 5 5 5	2013 年 1 月 2012 年 10 月 2012 年 4 月 2012 年 1 月 2011 年 10 月 2011 年 1 月 2010 年 7 月 2010 年 1 月	★★★★★
8	曲面方程	1 1	选择题 选择题	3 3	2012 年 7 月 2012 年 4 月	★★
9	曲线方程	11	计算题	5	2012 年 1 月	★
10	二次曲面	1 1 1 1	选择题 选择题 选择题 选择题	3 3 3 3	2011 年 7 月 2010 年 10 月 2010 年 4 月 2010 年 1 月	★★★★

由上表可以看出,"向量的坐标""向量的数量积""空间直角坐标系""二次曲面"多出现在选择题、填空题中,向量的坐标及相关运算几乎在每次考试中都会出现,应当熟练掌握该知识点;"平面方程""直线方程"是该章计算题的主要命题点,一般出现在第一个计算题,应当引起重视.

重难点知识串讲

1. 空间直角坐标系(P_1)

设空间中两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$,则它们之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

真 题 链 接

1. (2012 年 7 月)在空间直角坐标系中,点$(-1,2,4)$到 x 轴的距离为 ( )

A. 1　　B. 2

C. $\sqrt{20}$　　D. $\sqrt{21}$

【答案】 C

【解析】 空间点$(-1,2,4)$到 x 轴的距离为 $d=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$.

2.（2007 年 10 月）在空间直角坐标系中，点 $P(-1,2,-3)$ 关于 yOz 坐标面的对称点是（　　）

A. $(1,-2,3)$　　B. $(1,2,-3)$

C. $(-1,2,3)$　　D. $(-1,-2,-3)$

【答案】 B

【解析】 本题考查空间直角坐标系中点的对称坐标的特征. 设点 $P(-1,2,-3)$ 关于 yOz 坐标面的对称点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则 $x_0=-x,y_0=y,z_0=z$，故 $x_0=1,y_0=2,z_0=-3$，故选 B.

2. 向量的概念及其线性运算（P_3）

(1)向量的概念

既有大小又有方向的量称为向量.

注：

1°向量的几何表示为有向线段，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的长度表示向量的大小；

2°向量的大小称为向量的模，向量 $\overrightarrow{AB}$ 可以简记为 $\boldsymbol{\alpha}$，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{\alpha}|$；

3°模为 1 的向量称为单位向量；

4°如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模为 0，即 $|\boldsymbol{\alpha}|=0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为零向量，记为 $\mathbf{0}$. 零向量的方向可以看做是任意的；

5°若两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的模相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 是相等的向量，记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$，不论模是否相等，只要两向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 的方向相同或相反，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 平行，记为 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$；

6°若干个向量，将它们的起点平移到同一个点以后，如果它们的起点和终点都位于同一条直线上，则称这些向量是共线的，如果它们的起点和终点都位于同一个平面上，则称这些向量是共面的.

(2)向量的加法

给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$，求向量之和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 的运算称为向量加法. 向量加法的逆运算称为向量减法. 给定向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$，如果存在 $\boldsymbol{\gamma}$，使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$，则称 $\boldsymbol{\gamma}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差，记为 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$.

a. 平行四边形法则

给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$，将它们的起点平移到同一个点 O，它们的终点分别设为 A 和 B，则 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\beta}$. 以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边可构造一个平行四边形 $OBCA$. 以 O 为起点、C 为终点的向量 $\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OC}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$，即 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

这种确定向量和的方法称为平行四边形法则，如图 1-1 所示.

b. 三角形法则

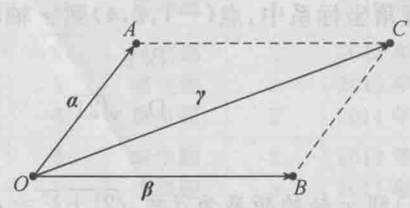

图 1-1

对给定的两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，如果将 $\boldsymbol{\beta}$ 平移，使其起点平移到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点，此时 $\boldsymbol{\beta}$ 的终点与用平行四边形法则确定的点 C 重合，从而 $\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{AC}$，于是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和也为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$. 这种确定两个向量的和的方法称为三角形法则，如图 1-2 所示.

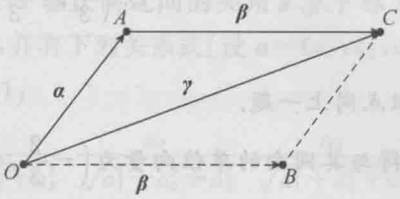

图 1-2

c. 运算律

交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

结合律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$.

(3)向量的数乘

a. 数乘的定义

给定实数 λ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}$，规定 λ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘法 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 是一个向量，它的模规定为 $|\lambda\boldsymbol{\alpha}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{\alpha}|$；其方向规定为：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 的方向与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 的方向与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向相反.

b. 数量乘法的运算律

结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=\mu(\lambda\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$.

对于数量加法的分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$.

对于向量加法的分配律：$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$.

注：

1°设向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 平行于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的充分必要条件是存在唯一实数 λ，使得 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$；

2°如果 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，记 $\boldsymbol{\alpha}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$，则称 $\boldsymbol{\alpha}^0$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的单位向量.

真题链接

1. (2011 年 4 月)已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,2,-1)$，则与 $\boldsymbol{\alpha}$ 反方向的单位向量是______.

【答案】 $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

【解析】 该题目考查两个知识点：一是单位向量模为 1；二是实数 λ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$，规定 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 是一个向量，其大小 $|\lambda\boldsymbol{\alpha}|=|\lambda||\boldsymbol{\alpha}|$，其方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 反向.

由上述两个知识点，可得出所求答案 $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

2. (2011 年 1 月)已知点 $A(7,1,3)$ 及点 $B(5,-1,4)$，则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是 ( )

A. $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

【答案】 B

【解析】 该题目考查知识点同上一题.

$\overrightarrow{AB}=(-2,-2,1)$，可求得与其同向的单位向量为$\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，故选 B.

3. 向量的坐标（P_8）

(1)向量的分解式与坐标

若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别为 a、b、c，则

$$\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k},$$

称其为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式. 有序数 a、b、c 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c)=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}.$$

(2)向量线性运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$，$\lambda$ 为数量，则

$$\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3);$$

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3).$$

注：

1°$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$；

2°$\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$，其中 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$，若某分母为零，则对应的分子也为零.

(3)向量的夹角与投影

a. 向量的夹角

将非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的起点放在一起，它们之间的夹角 φ 记为$(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$，规定 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，如图 1-3 所示.

由于零向量的方向可以看做是任意的，规定零向量与任何向量的夹角 φ 可取$[0,\pi]$中的任何值. 给定数轴 u 及非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，在 u 上取与数轴 u 同向的非零向量 $\boldsymbol{\beta}$，规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 与数轴 u 的夹角为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角，记为$(\widehat{\boldsymbol{\alpha},u})$，如图 1-4 所示.

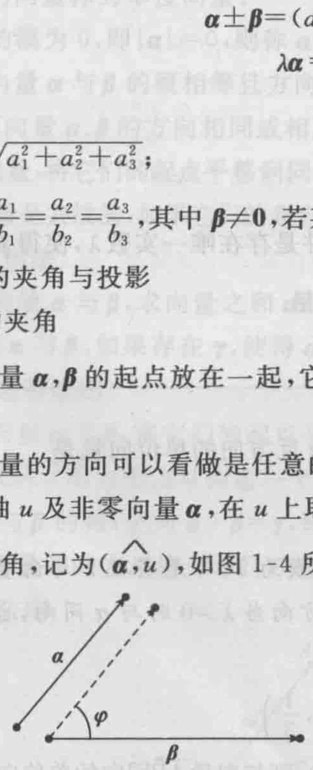

图 1-3

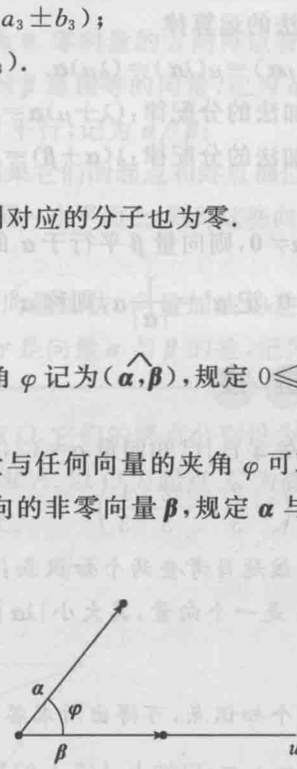

图 1-4

若非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=\frac{\pi}{2}$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 垂直. 规定零向量与任何向量均垂直.

b. 方向角

非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向之间的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向角；$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向余弦，并有下列关系式[设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$]：

①$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$；

②$\boldsymbol{\alpha}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

c. 投影定理

对任意非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{\alpha}|\cos\varphi$，其中 φ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与数轴 u 的夹角.

注：

1° $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{\beta}$；

2° 设 λ 为实数，则 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{\alpha}$.

真题链接

(2012 年 10 月)已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,-7,6)$ 与向量 $\boldsymbol{\beta}=(9,k,18)$ 平行，则常数 $k=$______.

【答案】 -21

【解析】 两向量平行，则 $\frac{3}{9}=\frac{-7}{k}=\frac{6}{18}$，得 $k=-21$.

4. 向量的数量积(P_{11})

(1)数量积的定义

给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，定义它们的数量积为 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\varphi$，其中 φ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.

注：

1°数量积与投影的关系为 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\beta}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}$；

2°两向量数量积的几何意义为其中一个向量的模与另一个向量在这个向量上的投影的乘积.

3°数量积在做功方面的物理意义为物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下由点 A 沿直线移动到点 B 所做的功 W 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\overrightarrow{AB}$ 的数量积，即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

(2)数量积的运算律

交换律：$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$.

结合律：$\lambda(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})=(\lambda\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\cdot(\lambda\boldsymbol{\beta})$.

分配律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}$.

(3)数量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}};$$

$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$

真题链接

(2013 年 1 月)已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\beta}=(-2,C,-2)$，并且 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$，则常数 $C=$______.

【答案】 -4

【解析】 该题目考查的知识点如下.

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$，若 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

于是 $1\times(-2)+(-1)\times C+1\times(-2)=0$，求得 $C=-4$.

5. 向量的向量积(P_{12})

(1)向量积的概念

给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，它们的向量积规定为一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$，它由下述方式确定：

a. $\boldsymbol{\gamma}$ 的长度为 $|\boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sin\varphi$，其中 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$；

b. $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 所确定的平面(即 $\boldsymbol{\gamma}$ 既垂直于 $\boldsymbol{\alpha}$，又垂直于 $\boldsymbol{\beta}$)，$\boldsymbol{\gamma}$ 的指向按照右手法则由 $\boldsymbol{\alpha}$ 转到 $\boldsymbol{\beta}$ 来确定，如图 1-5 所示.

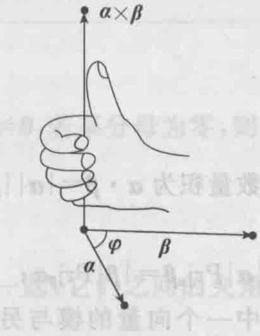

图 1-5

则向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 叫做向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的向量积，记作 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$.

(2)向量积的几何意义

$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|$ 表示了以 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(3)向量积的运算律

反交换律：$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=-(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})$.

结合律：$\lambda(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})=(\lambda\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\times(\lambda\boldsymbol{\beta})$.

分配律：$\boldsymbol{\gamma}\times(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta}$，$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}$.

(4)向量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

注：

1°$\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$；

2°可以根据向量积的模的几何意义求面积(如图 1-6 所示)：

①$S_{\square ABDC}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$；

②$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

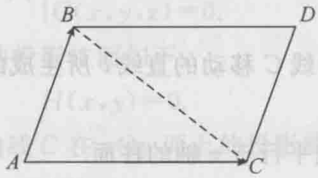

图 1-6

真题链接

1. (2012 年 1 月)已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,2)$，则$(-2\boldsymbol{a})\times(3\boldsymbol{b})=$______.

【答案】 $(-6,6,6)$

【解析】 $-2\boldsymbol{a}=(-4,2,-6)$，$3\boldsymbol{b}=(3,-3,6)$，则

$$(-2\boldsymbol{a})\times(3\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -4 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=-6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}=(-6,6,6).$$

2. (2011 年 4 月)已知 $\boldsymbol{a}=(-1,1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,3)$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$ ( )

A. $(-7,-1,3)$　　B. $(7,-1,-3)$

C. $(-7,1,3)$　　D. $(7,1,-3)$

【答案】 D

【解析】 同上一题目，该题目考查的知识点如下.

向量积的坐标表示：设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

代入题中数据可知选 D.

6. 曲面方程(P_{16})

(1)曲面方程的定义

若曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系：

a. 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程；

b. 方程 $F(x,y,z)=0$ 的解所对应的点都在曲面 S 上，

则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 S 的方程，曲面 S 为方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面.