高职高专测绘、计算机类公共数学教材

应用数学

教材辅导及习题解析

雷燕 杨蛟 主编

云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

高职高专测绘、计算机类公共数学教材

应用数学教材辅导及习题解析

主　审：王　跃
主　编：雷　燕　杨　蛟
副主编：杨　捷　牛立昆　王　缨

云南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

应用数学教材辅导及习题解析 / 雷燕，杨蛟主编
. - - 昆明 ：云南大学出版社，2011
ISBN 978 - 7 - 5482 - 0503 - 6

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①雷… ②杨… Ⅲ. ①应用数学 - 高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①o29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 124876 号

应用数学教材辅导及习题解析

雷 燕 杨 蛟 主编

策划编辑： 伍 奇 孙吟峰
责任编辑： 石 可
封面设计： 夏雪梅
出版发行： 云南大学出版社
印 装： 昆明理工大学印务包装有限公司
开 本： 787mm × 1092mm 1/16
印 张： 9.25
字 数： 213 千
版 次： 2011 年 7 月第 1 版
印 次： 2011 年 7 月第 1 次印刷
书 号： ISBN 978 - 7 - 5482 - 0503 - 6
定 价： 28 元

地 址： 云南省昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内（邮编：650091）
发行电话： 0871 - 5033244
网 址： http：//www. ynup. com E - mail：market@ ynup. com

前　　言

本书是针对高职高专测绘、计算机类公共数学教材《应用数学》而编写的辅导丛书《应用数学教材辅导及习题解析》。其目的是配合教材，方便教师教学，方便学生学习，为广大学生在学习高等数学时提供学习辅导和参考，帮助学生突破难点，抓住重点。本书主要内容包括：每章节所讲授的知识重点以及难点小结；疑难问题探究；典型例题解析；同步训练；应用拓展；每章总复习题和能力测试题以及近几年专升本试卷。本书编写具有高职高专特色，具体如下：

1、根据教育部高教司关于高职高专学校《高等数学课程教学基本要求》和《关于进一步加强职业教育工作的若干意见》（16 号文件）的精神编写而成，努力贯彻“拓展基础，强化能力，加强应用”原则。

2、突出重点难点。对各章节重要的概念、定理、公式进行归纳总结，增强学生对重要知识的理解和掌握。

3、对疑难问题进行探究，加深学生对基本概念、公式以及定理的正确把握和应用。

4、对有代表性的例题由浅入深详细剖析，总结解题方法、技巧，使学生有“法”可依，有“路”可“循”，做到思路畅通，有的放矢。

5、同步训练题型突出多样性、综合性和针对性。基本练习题 60%，难易适中练习题 30%，少量难度较大的练习题 10% 放在“应用拓展”里，一般为专升本或考研题型。

本书由雷燕、杨蛟任主编；王跃任主审；杨捷、牛立昆、王缨任副主编。

各章参编人员：			
	雷　燕（1－4、7 章）	牛立昆（5－7 章）	李　梦（第 1 章）
	杨　蛟（第 2 章）	王　缨（第 3 章）	杨　捷（第 2 章）
	刘　倩（第 4 章）	李庆芹（第 3 章）	李江云（第 5 章）
	余　燕（第 4 章）	丁世婷（第 5 章）	陈福亮（第 7 章）

全书由雷　燕、牛立昆统稿。

由于编者水平有限，书中不当及错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

2011 年 6 月 14 日

目　录

第一章　极限与连续

第一节　极限的概念

一、重点与难点

重点：掌握数列极限与函数极限定义，会计算一般的极限；理解函数左右极限概念及极限存在与左、右极限之间的关系．

难点：观察法求极限．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$$

几个常用极限：

$$\lim_{x\to x_0} C = C,\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0(|q|<1),\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

二、疑难问题探究

1. 左极限和右极限是考察自变量从某一确定方向趋于某一确定值时，函数的变化趋势．它的用途主要有两个方面：

（1）研究自变量趋于区间的端点时函数的极限问题．

（2）研究分段函数在分段点两侧表达式不相同的情形，考察在分段点处的极限问题．

2. 极限描述了在给定过程下函数的变化性态，而极限值则表示一个确定的常数，函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是否有极限与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义无关．

3. 下列模型的函数必须讨论左右极限：

（1）分段函数在分段点处的极限；

（2）含绝对值符号的函数；

（3）含 a^x，$a^{\frac{1}{x}}$ 的函数；

（4）含 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$ 的函数，含 $\arctan\frac{1}{x}$ 或 $\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$ 的函数；

(5) 含偶次方根，奇次方根的函数;
(6) 含取整函数的函数.

三、典型例题解析

例 1 判定函数$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$,当$x\to 0$时的极限是否存在?

分析:$\because$ 当$x\to 0$时是指$x\to 0^+$和$x\to 0^-$,

$\therefore$ 应分别计算当$x\to 0$时$f(x)$的左右极限.

解:$\because$ 当$x\to 0^-$时,$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

$\therefore e^{\frac{1}{x}}\to 0$

当$x\to 0^+$时,$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$,则$e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$

故当$x\to 0$时,函数$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$的极限不存在.

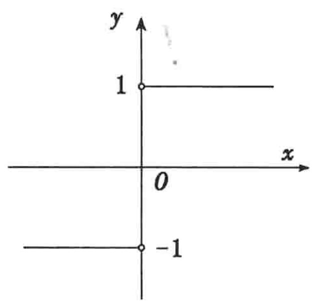
例 2 讨论当$x\to 0$时函数$f(x)=\frac{|x|}{x}$的极限,并作出图像.

分析:分段函数要讨论$f(x)$在分段点处的左右极限.

解:由图可知:

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}=\frac{|x|}{x}=1$$



$\because \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

四、同步训练

1. 选择题

(1)数列$\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)$当$n\to\infty$ 时的极限是( )

A. -1 B. 1 C. 0 D. 无极限

(2)数列$\left(5-\frac{1}{n^2}\right)$当$n\to\infty$ 时的极限是( )

A. 0 B. ∞ C. 5 D. 无极限

(3)函数$y=f(x)$在点x_0处有定义是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的( )

A. 充要条件 B. 无关条件

C. 必要但不充分条件 D. 充分但不必要条件

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$ 的极限是（　　）

A. ∞　　B. 0　　C. 1　　D. 无极限

(5)设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ \sin x & x\geqslant 0\end{cases}$，求当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限为（　　）

A. 1　　B. 0　　C. ∞　　D. 不存在

(6)下列极限存在的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|(x+1)}{x^2}$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x-1}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x^2)$

(7)设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x>-1\\ x+a & x<-1\end{cases}$，要使 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ 存在，则 $a=$（　　）

A. -2　　B. 2　　C. 0　　D. 1

2. 填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=$ ______　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x=$ ______

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=$ ______　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x=$ ______

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=$ ______

3. 求下列函数的左右极限，并判定 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在？

(1) $f(x)=\begin{cases}x+4, & x<1\\ 2x-1, & x\geqslant 1\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x<1\\ 1, & x=1\\ -1, & x>1\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}3x, & x<1\\ 2, & x=1\\ 3x^2, & x>1\end{cases}$

五、应用拓展

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}$

第二节　极限的运算

一、重点与难点

重点：设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = AB$

特别有：$\lim\limits_{x \to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = cA$（$c$ 为常数）

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B} \ (B \neq 0)$

(4) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n = A^n$

上述法则亦适用于 $x \to \infty$ 时的情形，还可推广到有限个具有极限函数的情形.

难点：掌握极限四则运算法则并会应用它们求极限.

二、疑难问题探究

极限式中常数的确定. 求解这类问题一般是从已知极限式成立的必要条件出发去寻找解答.

设 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$，若 $f(x)$ 是 n 次多项式，则 $g(x)$ 也必是 n 次多项式.

设 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则必有 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

设 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) g(x) = A$，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则必有 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

三、典型例题解析

例 1　已知 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + ax^2 + b}{x - 2} = 8$，求 a, b 的值.

解：$\because \lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0$

由已知条件一定有 $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + ax^2 + b) = 0 \Rightarrow$

$b = -4a - 8$

代入已知条件得 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + ax^2 - 4a - 8}{x - 2} = 8$，又

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+ax^2-4a-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+ax+4+2a)}{x-2}$$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+ax+4+2a)$ 得

$2^2+4+2a+4+2a=8$

$a=-1$ 代入 $b=-4a-8$ 得 $b=-4$

例 2　设 $a_n=\dfrac{2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

分析：求无限多项式的极限，先利用等差、等比数列求和公式，求出 n 项和的表达式，然后再求极限 .

解：$\because a_n=\left[2+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}\right]\div\left[\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1-\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{5}}\right]$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[2+\frac{1}{3}\times\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}\right]\div\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{5}\times\frac{1-\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{5}}\right]$$

$$=10$$

例 3　$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

解：分子、分母同时有理化得

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$=\frac{4}{3}$$

四、同步训练

1. 选择题

(1)极限 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+1)=$ (   )

A. 3   B. 2   C. 0   D. 1

(2)若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^{\alpha}}=\beta$，则 α、β 值为(   )

A. $\alpha=1$，$\beta=\dfrac{1}{5}$ B. $\alpha=1$，$\beta=\dfrac{1}{4}$

C. $\alpha=5$，$\beta=\dfrac{1}{4^5}$ D. $\alpha=5$，$\beta=4^5$

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=$ (   )

A. 0   B. $\dfrac{1}{2}$ C. 2   D. -1

(4) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+4}{5x^3+2x^2-1}=$ (   )

A. $\dfrac{1}{5}$ B. 5   C. $\dfrac{3}{5}$ D. 0

(5) 极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x-12}=$ (   )

A. $\dfrac{6}{7}$ B. $\dfrac{5}{7}$ C. 1   D. $\dfrac{1}{3}$

(6) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ (   )

A. 0   B. -1 C. 2   D. 1

(7) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}-ax-b\right)=0$，其中 a，b 是常数，则 (   )

A. $a=1$，$b=1$ B. $a=-1$，$b=1$

C. $a=1$，$b=-1$ D. $a=-1$，$b=-1$

2. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-2x+1}{3x^3-x+1}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^3-x}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}-1}{x^8+2x-3}$

(7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$　　(8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x^2-4x+3}$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^2(2x-3)^3}{(2x-20)^5}$

(11) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$　　(12) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{6x}{8-x^3}\right)$

(13) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,求 a、b

五、应用拓展

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$,求常数 a、b

2. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}})$

第三节　无穷小与无穷大、无穷小的比较

一、重点与难点:

重点: 掌握无穷小、无穷大概念与性质;掌握无穷小量的比较概念,理解无穷小的阶;会用等价无穷小求极限.

难点: 无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小;若 $f(x)\neq0$, $f(x)$ 为无穷小量 $\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量;

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha\ (\alpha\text{ 为 }x\to x_0\text{ 时的无穷小})$$

当 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$ 时, $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

记住: 当 $x\to x_0$ 时,常用的等价无穷小量有:

$\sin x\sim x$

$\tan x\sim x$　　$\ln(1+x)\sim x$

$\arcsin x\sim x$　　$a^x-1\sim x\ln a$

$e^x-1\sim x$　　$(1+ax)^{\frac{m}{n}}-1\sim\dfrac{m}{n}ax$

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

二、疑难问题探究

1. 无穷小量与无穷大量并不是表达量的大小，而是描述在某个变化过程中量的变化趋势，除了零之外，其他任何数，即使是绝对值为很小的数都不能认为是无穷小量，同样的即使是绝对值为很大的数，也不能认为是无穷大量.

2. 无穷小量的等价替换常用于极限运算中，但必须注意，无穷小量等价替换只能在极限表达式中的乘或除的因子中使用，不能在加减运算中使用.

三、典型例题解析

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x$

分析： 当 $x\to\infty$ ，$\frac{1}{x}\to 0$，$\sin x$ 的极限不存在，但 $\sin x$ 有界.

解： $\because$ 当 $x\to\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，而 $|\sin x|\leqslant 1$ 是有界函数，据性质，

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$

2. 求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a}\xlongequal{令x-a=t}e^a\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}$

$\because e^t-1\sim t(t\to 0)$，$\therefore$ 原式 $=e^a$

3. 证明 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$（n 为正整数，$x\to 0$）

分析： 只须证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}}=1$ 即可

$\because$ 对 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}}$，

令 $\sqrt[n]{1+x}-1=t$，则 $x=(t+1)^n-1$

则上式左边 $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{n}[(t+1)^n-1]}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{n}[t^n+nt^{n-1}+\cdots+c_n^{n-2}t^2+c_n^{n-1}t]}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{n}{t^{n-1}+nt^{n-2}+\cdots+c_n^{n-2}t+n}$$

$=1=$右边

四、同步训练

1. 选择题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x\right)=$ (　　)

A. 0　　B. 1　　C. 不存在　　D. -1

(2) 当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{ax^2+bx+c}\sim\frac{1}{x+1}$，则 a、b、c 之值一定是 (　　)

A. $a=0$，$b=1$，$c=1$　　B. $a=0$，$b=1$，c 为任意常数

C. $a=0$，b，c 为任意常数　　D. a，b，c 为任意常数

(3) 当 $x\to 0$ 时，$\sin(2x+x^2)$ 与 x 比较是 (　　)

A. 较高阶的无穷小量　　B. 较低阶的无穷小量

C. 同阶的无穷小量　　D. 等价的无穷小量

(4) 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 与 $\frac{1}{x}$ 是等价无穷小，则 $\lim\limits_{x\to\infty}2xf(x)=$ (　　)

A. 1　　B. -2　　C. 2　　D. $f(x)$

(5) 下列变量中，为无穷小量的是(　　)

A. $\frac{1}{\ln(x+1)}(x\to 0)$　　B. $\frac{1}{x}\sin x(x\to\infty)$

C. $\frac{1}{x}\sin x(x\to 0)$　　D. $\cos x\sin\frac{1}{x}(x\to 0)$

(6) 设 $f(x)=e^{-x^2}-1$，$g(x)=x^2$，当 $x\to 0$ 时 (　　)

A. $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量.

B. $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小量

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小量，但非等价无穷小量

D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小量

2. 填空题：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}=$ ________

(2)当 $x\to 0$ 时，ax^2 与 $\tan\frac{x^2}{4}$ 为等价无穷小量，则 a = ________

(3)$y=\frac{1}{x+1}$当 $x\to$________时,y 为无穷大量;当 $x\to$________时,y 为无穷小量.

(4)$\sin\sqrt{x}$与 x 相比是________的无穷小量.

(5)设$f(x)=\frac{ax^2+bx+5}{x-5}$

①若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，则 $a=$________，$b=$________

②若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则 $a=$________，$b=$________

③若$\lim\limits_{x\to 5}f(x)=1$，则 $a=$________，$b=$________

(6) 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}=$ ________

3. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin x}{x^3+1}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)}{\sin 2x}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$(n、m 为正整数)

五、应用拓展

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{\tan x-\sin x}$

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\beta-(n-1)^\beta}{n^\alpha}=2003$,求 α,β 的值.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})$ $(a>0,b>0)$

第四节　两个重要极限

一、重点与难点

重点:掌握利用两个重要极限求极限的方法,并会利用它们求极限.

难点:换元法求极限.

$$\lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1;\ \lim_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e};\ \lim_{\mu\to 0}(1+\mu)^{\frac{1}{\mu}}=\mathrm{e}$$

二、疑难问题探究

用两个重要极限公式求极限时，最初是通过变量换元，将函数式化为公式的形式，待熟练后，可直接用推广变形后的公式．常用公式：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a(a>0)$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

三、典型例题解析

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$$=\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi}{2}x\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求 a

解：$\because\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[\left(1+\frac{2a}{x}\right)^{\frac{x}{2a}}\right]^{2a}}{\left[\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right]^{-a}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{-a}}=\mathrm{e}^{3a}$

$\therefore\ \mathrm{e}^{3a}=8$，$\therefore\ a=\ln 2$

四、同步训练

1. 选择题

(1)已知 $\lim\limits_{x\to 0}(1-kx)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{e}$，则常数 $k=$（　　）

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=$（　　）