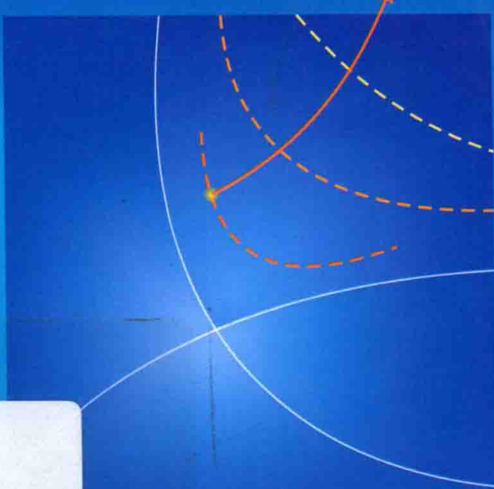
新世纪高等院校精品教材

常微分方程

（第二版）

蔡燧林　编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

新世纪高等院校精品教材·数学类

常微分方程

第二版

蔡燧林　编

浙江大學出版社

内 容 提 要

本书系第二版，可供高等院校工科类、经济管理类以及大部分理科(例如力学、信息与科学计算专业)作为常微分方程教材或供准备参与数学建模竞赛的学生参考．全书共分五章：初等积分法，线性微分方程，线性微分方程组，稳定性与定性理论初步，差分与差分方程．各章配有习题并附答案，个别习题还有提示，书末有两个附录：常微分方程组初值问题解的存在唯一性定理，常系数线性方程的算子解法，可供读者选用．

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程／蔡燧林编．2版．—杭州：浙江大学出版社，1988.4(2012.10重印)
ISBN 978-7-308-00057-4

Ⅰ.常… Ⅱ.蔡… Ⅲ.常微分方程－高等学校－教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第002996号

常微分方程(第二版)
蔡燧林 编

出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路148号 邮政编码310007) (网址：http://www.zjupress.com)
责任编辑	傅百荣
排 版	杭州中大图文设计有限公司
印 刷	浙江省良渚印刷厂
开 本	850mm×1168mm 1/32
印 张	8.25
字 数	207千
版 印 次	2008年11月第2版 2012年10月第24次印刷
书 号	ISBN 978-7-308-00057-4
定 价	15.00元

第二版前言

本书第一版已印刷发行6万余册,深受使用的教师学生欢迎.在第一版的基础上,征求了部分任课教师的意见,修改成第二版.浙江大学将常微分方程作为一门基础课,单独设课至今已有20年,在提高学生的常微分方程水平,加深微积分训练,加强与其他数学课的横向联系方面,均起到了良好的作用.修改后的本书,可作为工科类、经济管理类以及大部分理科(例如力学,信息与科学计算专业)的常微分方程教材,也可供准备参与数学建模竞赛的学生参考.

修改后的全书共分五章,第一章初等积分法,介绍了5种一阶方程及3种可降阶的二阶方程的解法,其中贯穿了求解一阶方程的两个基本方法——变量变换法与积分因子法.为了使读者一开始就对常微分方程的全貌有所了解,在第一章中还介绍了常微分方程的基本概念、基本思想以及一阶和n阶常微分方程初值问题解的存在和唯一性定理(证明放在附录中).本章第二版中删去了不是普遍都要的奇解与包络.第二章线性微分方程,详细论述了n阶线性微分方程的通解结构理论,以使读者有一清晰的了解.对于具体求解,则着重于二阶常系数线性齐次与某些特殊自由项的非齐次方程.该章中用极少的篇幅介绍了将变系数线性方程经变量变换转化为常系数或降阶,力求突出思想而淡化技巧.本章还简单介绍了常数变易法.第一版中推导了n阶常系数线性齐次方程的通解公式,而在本版中删去了推导,只保留了结论及方法.教育部考试中心颁布的考研数学大纲,从2009年开始,撤销了数学(四),将原应考数学(四)的考生(主要是经济类),改考数学(三),并且明

确提出了常微分方程在经济上的应用.如此一来,强化并扩大了经济类、管理类学生对常微分方程与差分方程的要求.有鉴于此,本书第二版增添了常微分方程在经济中的应用(放在第一章),并且增设第五章,介绍了差分及一阶、二阶常系数线性差分方程及其解法以及在经济上的应用,以扩大本书的使用面.以上三章是本书的基本部分,涵盖了硕士研究生入学数学统考中常微分方程与差分方程的要求.

第三章线性微分方程组,在布局上几乎与第二章平行,给出了常系数齐次线性方程组的通解定理及其证明,并介绍了它的循环列解法.本章用了向量与矩阵的记号,但只要求读者知道它们的意义、简单运算以及线性代数方程组基础解系的知识,并不涉及线性代数其他更多的内容.本章第二版与第一版一致,未作改动.第四章非线性系统的分析,简单介绍了稳定性概念及一次近似理论.至于在相平面上奇点邻域内轨线的性态分析,本版中作了彻底的改写,删去了第一版中过细的推导,突出了典型类型.无论是在专业课中还是在数学建模中,掌握典型类型就可以了.本章还删去了摄动法整节.全书篇幅第二版基本与第一版持平.

全书各章配有习题并附有答案,题量比第一版有所减少.书末有两个附录:初值问题解的存在唯一性定理,算子解法,可供读者参考或教学中选用.

本书承浙江大学出版社出版,作者对此表示衷心的感谢!

对书中不足和错误之处,恳切地希望读者批评指正.

编　者
于浙江大学理学院数学系
2008 年 9 月

目　录

第一章　初等积分法

§1　基本概念

在研究自然现象和工程技术问题时，常需要找出所研究的变量 x 和 y 之间形如 $F(x,y)=0$ 的关系. 有时找不到这种直接的关系式，可以根据具体问题所具有的客观规律，建立起这些变量和它们的导数或微分之间的关系，从而得到包含有未知函数的导数或微分的方程. 于是建立并研究这些方程，就成为寻找变量之间的函数关系的一个重要方面.

一般，在一个(组)方程中，如果未知量是一个(组)函数，而且该方程中含有此未知函数的导数，则称这种方程为**微分方程(组)**. 微分方程是微积分的进一步发展. 为更好地阐述有关微分方程的一些基本概念，我们先看几个例子.

例 1　设温度为 T_0 的物体放置在温度为 $\tau(\tau<T_0)$ 的空气中. 实验表明，物体温度对时间 t 的变化率与当时物体和空气的温度之差成正比，比例常数 $k(>0)$ 依赖于所给物质(该物体和空气)的性质，可由实验确定. 若空气的温度保持不变，求从实验开始时算起，在时刻 t 物体的温度.

解　设时刻 t 时物体的温度为 T，则有

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-\tau). \tag{1.1}$$

因为当温差 $(T-\tau)$ 为正时，物体的温度 T 随时间 t 的增加而减小，故系数 k 前添负号.

显然方程(1.1)就是一个微分方程.

由题意,未知函数 T 除了要满足微分方程(1.1)外,还要满足条件:

$$T|_{t=0} = T_0. \tag{1.2}$$

现在我们要由微分方程(1.1)求出未知函数 T. 为此,改写(1.1)为

$$\frac{\mathrm{d}T}{T-\tau} = -k\mathrm{d}t.$$

两边积分得

$$\ln(T-\tau) = -kt + c_1,$$

这里 c_1 是任意常数. 于是得到

$$T - \tau = \mathrm{e}^{-kt+c_1} = \mathrm{e}^{c_1}\mathrm{e}^{-kt},$$

命 $\mathrm{e}^{c_1} = c$,这里 c 是一个新的任意常数,则有

$$T = \tau + c\mathrm{e}^{-kt}. \tag{1.3}$$

由(1.2),当 $t=0$ 时 $T=T_0$,代入(1.3)得 $c = T_0 - \tau$. 这样,(1.3)中的任意常数 c 就被确定了,于是时刻 t 时物体的温度

$$T = \tau + (T_0 - \tau)\mathrm{e}^{-kt}, \tag{1.4}$$

这就是所求物体的温度 T 与时间 t 的函数关系. 它满足微分方程(1.1)及条件(1.2).

(1.4)表示的是初始温度为 T_0 的某一物体的温度 T 随时间 t 变化的规律. (1.3)中含有任意常数 c,因而刻画的是在各种不同初始温度下,某一物体温度 T 随时间 t 变化的共同规律.

例 2 在离地面高度为 s_0 处,以初速 v_0 垂直上抛一物体. 设坐标原点 O 取在地面上;Os 轴向上为正向(如图 1-1). 若不计空气阻力,求物体的运动规律.

解 设在时刻 t,物体位于坐标 s 处. 由于物体在运动过程中,只受重力 $F = -mg$ 的作用,其中负号是因为引力方向与选定的坐标轴正向相反. 因此根据牛顿第二定律 $ma = F$(其中 a 为运动

的加速度，$a=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$)，有

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-mg,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-g. \tag{1.5}$$

方程(1.5)也是一个微分方程. s 除了要满足微分方程(1.5)外，还要满足条件：

$$s\big|_{t=0}=s_0,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=v_0. \tag{1.6}$$

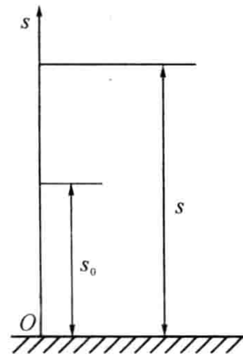


图 1-1

将(1.5)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)=-g,$$

积分两次，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-gt+c_1, \tag{1.7}$$

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2, \tag{1.8}$$

其中 c_1,c_2 是两个任意常数.

把条件(1.6)用于(1.8)，得

$$c_2=s_0,\qquad c_1=v_0.$$

于是

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0. \tag{1.9}$$

这就是所求的运动规律. 它满足微分方程(1.5)及条件(1.6).

(1.9)表示的是初始位置为 s_0，初始速度为 v_0 的垂直上抛物体的运动规律. (1.8)含有两个任意常数 c_1 和 c_2，刻画的是在各种不同初始位置和初始速度下，垂直上抛物体运动的共同规律.

下面介绍微分方程的一些基本概念.

如果在微分方程里，出现的未知函数是单个自变量的函数，我

们称这一类微分方程为**常微分方程**. 例如(1.1) 和(1.5) 都是常微分方程. 如果在微分方程里,所出现的未知函数是两个或两个以上自变量的函数,则称该类方程为**偏微分方程**. 如$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$,$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$都是偏微分方程. 本书仅研究常微分方程. 以下简称常微分方程为微分方程或方程.

在微分方程中出现的未知函数的导数的最高阶数,称为微分方程的**阶**. 例如(1.1) 是一阶微分方程,(1.5) 是二阶微分方程,又如$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$也是二阶微分方程.

一阶微分方程的一般形式是

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{1.10}$$

其中 F 是 x,y 和$\frac{dy}{dx}$的已知函数,且一定要含有$\frac{dy}{dx}$. x 是自变量,y 是未知函数.

已经解出导数的一阶微分方程的一般形式是

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{1.11}$$

其中 $f(x,y)$ 是 x 和 y 的已知函数.

设函数 $y=\varphi(x)$ 在某区间 $a<x<b$ 内连续并有连续的一阶导数,并且在该区间内恒有 $F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\equiv 0$(或 $\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x))$),则称 $y=\varphi(x)$ 是(1.10)(或(1.11)) 的一个**解**,区间 $a<x<b$ 是解 $y=\varphi(x)$ 的定义区间.

如果从关系式 $\Phi(x,y)=0$ 所能确定的函数 $y=\varphi(x)$ 是(1.10)(或(1.11)) 的解,则称 $\Phi(x,y)=0$ 是(1.10)(或(1.11)) 的一个**积分**. 求得了微分方程的一个积分,就认为求得了它的一个解. 所以一般非数学专业的教科书上不区分解与积分的差别. 方程的解或积分在(x,y) 平面上的图形称为该方程的**积分曲线**.

在直角坐标系中，我们可以给微分方程以如下的几何解释：对于给定的微分方程(1.11)，其中 $f(x,y)$ 是 (x,y) 平面上某区域 G 内定义的函数，对 G 内的每一点 (x,y)，作斜率为 $f(x,y)$ 的小直线段，则说在 G 内确定了一个**方向场**. 给定一个形如(1.11) 的微分方程，就相当于在相应的区域内给定一个方向场. 微分方程(1.11) 的积分曲线是这样的曲线，在它上面的每一点 (x,y) 处的切线斜率都等于 $f(x,y)$，即在每一点都与方向场的方向相切.

确定了一个微分方程之后，主要的问题是求该方程的解. 这里包含两个问题：一是是否存在解？二是如何具体求出解？只有存在解，才有可能去求解的精确表达式或近似表达式.

现在我们来讲第一个问题. 首先要指出，由于一个微分方程的解可以有很多，因此为了要确定其中某一个特定的解，还需要附加一定的条件. 这种附加条件与方程(1.11) 同样重要. 关于方程(1.11) 的解的存在性，有下述定理.

定理 1.1 考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \tag{1.11}$$

及条件

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{1.12}$$

设 $f(x,y)$ 在区域

$$D:\quad |x-x_0| \leqslant a,\quad |y-y_0| \leqslant b$$

内连续，且有连续的偏导数 $f'_y(x,y)$，则在区间

$$|x-x_0| \leqslant h$$

内存在唯一的 $y=\varphi(x)$ 满足方程(1.11) 及条件(1.12). 其中

$$h = \min(a, b/M),\quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|.$$

（证明见附录）

定理 1.1 中，条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 称为一阶方程的**初值条件**. 求方程(1.11) 满足初值条件(1.12) 的解称为**初值问题**. 定理 1.1 称为

一阶方程初值问题解的存在唯一性定理. 方程(1.11) 满足初值条件(1.12) 的解称为**特解**. 由上面的例 1 可见,满足微分方程(1.1) 的解可以含有一个任意常数. 一般,如果含有一个任意常数 c 的函数 $y=\varphi(x,c)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x,c)}{\mathrm{d}x}\equiv f(x,\varphi(x,c)),$$

并且对于区域 G 内的任意一点 (x_0,y_0),总存在相应的 c 值,使 $\varphi(x_0,c)=y_0$,则称 $y=\varphi(x,c)$ 是方程(1.11) 在区域 G 内的**通解**. 如例 1 中,条件(1.2) 是初值条件,(1.4) 是微分方程(1.1) 满足初值条件的(1.2) 特解,(1.3) 是(1.1) 的通解. 与积分的定义类似,可以定义通积分.

通常,讲通解时,不提“区域 G 内的”几个字.

下面我们来看 n 阶微分方程的情况.

n 阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{1.13}$$

其中 F 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的已知函数,且一定要含有 $y^{(n)}$. x 是自变量,y 是未知函数.

已经解出未知函数的最高阶导数的 n 阶方程的一般形式是

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{1.14}$$

其中 f 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 的已知函数.

设函数 $y=\varphi(x)$ 在某区间 $a<x<b$ 内连续并有直至 n 阶的连续导数,而且在该区间内恒有 $F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$(或 $\varphi^{(n)}(x)\equiv f(x,\varphi(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x))$),则称 $y=\varphi(x)$ 是(1.13)(或(1.14))在区间 $a<x<b$ 内的一个**解**. 类似地可以定义(1.13)(或(1.14))的积分和积分曲线.

n 阶方程的**初值条件**是

$$y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0{}^{(n-1)}, \tag{1.15}$$

其中 $y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 和 x_0 是 $n+1$ 个给定的数. 求方程(1.14)满足初值条件(1.15)的解称为 n 阶方程的**初值问题**.

定理 1.2 设函数 $f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 在区域

$$D: |x - x_0| \leqslant a, |y^{(i)} - y_0^{(i)}| \leqslant b \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{1.16}$$

内连续(这里及以后 $y^{(0)} \equiv y$), 并且分别对 $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 有连续偏导数, 则在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 内存在唯一的 $y = \varphi(x)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), & (1.14) \\ y^{(i)}|_{x=x_0} = y_0^{(i)} \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1). & (1.15) \end{cases}$$

其中

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$
$$M = \max_{(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \in D} |f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})|.$$

(证明见附录)

方程(1.14)满足条件(1.15)的解称为**特解**. 由例 2 可见, 满足 2 阶方程的解可以含有两个任意常数. 一般, 如果含有 n 个任意常数 $c_1, \cdots, c_n$ 的函数 $y = \varphi(x, c_1, \cdots, c_n)$ 满足

$$\varphi^{(n)}(x, c_1, \cdots, c_n) \equiv f(x, \varphi(x, c_1, \cdots, c_n), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x, c_1, \cdots, c_n)),$$

并且对于 $n+1$ 维区域 G 内的任意一点 $(x_0, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)})$, 总存在相应的 $c_1, \cdots, c_n$ 值, 使

$$\varphi^{(i)}(x_0, c_1, \cdots, c_n) = y_0^{(i)} \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1),$$

则称 $y = \varphi(x, c_1, \cdots, c_n)$ 是方程(1.14)在区域 G 内的**通解**. 如例 2 中, 条件(1.6)是初值条件, (1.9)是微分方程(1.5)满足初值条件(1.6)的特解, (1.8)是(1.5)的通解. 类似地可以定义通积分.

定理 1.1 和定理 1.2 的意义是很重要的. 因为只有解存在, 才

有可能去寻求它的精确表达式或近似表达式. 也只有在一定的条件下解才唯一,才有可能去求出确定的解.

从微分方程作为解决实际问题的工具这一要求来说,我们研究微分方程的主要步骤是:

(1) 根据实际问题,建立起反映变量间内在联系的微分方程并列出初值条件(一般称此步骤为建立数学模型);

(2) 求出满足微分方程并适合初值条件的解或研究解的性质;

(3) 再结合实际问题,研究解的实际意义.

本书侧重于按照微分方程的类型特点介绍几种常见的微分方程及其解法;第一章 §6 与第二章 §2 与 §3 中分别介绍一些有代表性的建模例子及建模方法;第四章中介绍讨论解的性质的某些定性方法. 这里后两部分内容,是数学建模竞赛中必需的一些基本知识点.

§2 可分离变量方程·齐次方程

一、可分离变量方程

我们首先讨论已解出导数的一阶微分方程(1.11)的一种特殊形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x)\psi(y) \tag{1.17}$$

的方程,其特点是,右边是一个 x 的函数与一个 y 的函数的乘积. 我们称这类方程为**可分离变量的微分方程**. 以下讨论这类方程的两种解法(变限定积分和不定积分),并设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 都是连续函数.

(1) 设 $\psi(y)\neq 0$,我们改写方程(1.17),使等号一边仅含 y 的

函数和 y 的微分 $\mathrm{d}y$，另一边仅含 x 的函数和 x 的微分 $\mathrm{d}x$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{1.18}$$

设 $y=y(x)$ 是(1.17) 满足初值条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的解，则

$$\frac{\mathrm{d}(y(x))}{\psi(y(x))}\equiv\varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{1.18}$$

两边从 x_0 到 x 积分，得

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}(y(\zeta))}{\psi(y(\zeta))}\equiv\int_{x_0}^{x}\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{1.19}$$

对左式作变量变换，命 $\eta=y(\zeta)$. 则当 $\zeta=x_0$ 时，$\eta=y(x_0)=y_0$，$\zeta=x$ 时，$\eta=y(x)$，于是有

$$\int_{y_0}^{y(x)}\frac{\mathrm{d}\eta}{\psi(\eta)}\equiv\int_{x_0}^{x}\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{1.20}$$

即 $y=y(x)$ 满足方程

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}\eta}{\psi(\eta)}=\int_{x_0}^{x}\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{1.21}$$

反之，设 $y=y(x)$ 是方程(1.21) 满足 $y|_{x=x_0}=y_0$ 所确定的隐函数，则(1.20) 成立. 将(1.20) 两边对 x 求导数，得

$$\frac{1}{\psi(y(x))}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=\varphi(x),$$

故知 $y=y(x)$ 是(1.17) 的解.

于是，当 $\psi(y)\neq 0$ 时，可分离变量方程(1.17) 的求解步骤是：先将变量 x 和 y(以及 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$) 分离于等号两边，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

然后将两边分别对 x 和 y 积分，得

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

显然它就是(1.17) 的满足 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的积分. 易知

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\int\varphi(x)\mathrm{d}x+c \tag{1.22}$$

是(1.17)的通积分，其中$\int \frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}$和$\int \varphi(x)\mathrm{d}x$分别是两个确定的原函数，$c$是任意常数. 以后，在本书中，凡用不定积分表示的都是指任意一个但为确定的原函数.

(2) 设有y^*使$\psi(y^*)=0$，则易知$y=y^*$也是(1.17)的一个解. 在求(1.17)的解时，不要忘了这种解. 这个解，有时可认为包含在(1.22)中，有时并不包含在(1.22)中. 一般要单独去做.

例 1 解方程$\tan x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=1$.

解 此方程可改写为

$$\tan x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y,$$

这是一个可分离变量的微分方程. 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y}=\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$\ln|1+y|=\ln|\sin x|+\ln|c|.$$

将任意常数写成$\ln|c|$的形式是为了方便. 由此得到通解

$$y=c\sin x-1.$$

此外，$y=-1$也是解. 它可以被认为是包含在上述表达式($c=0$)中.

例 2 解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x-y}$，$y|_{x=0}=0$.

解 将方程写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{-y},$$

$$\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x.$$

两边积分，得通积分

$$\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+c.$$