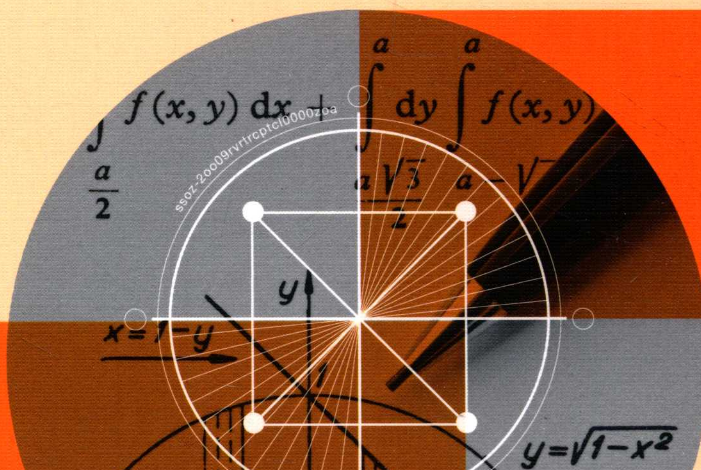
21世纪高等院校规划教材

高等数学

（上册）

主　编　何春江
副主编　张文治　张翠莲　翟秀娜



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪高等院校规划教材

高等数学

（上册）

主　编　何春江

副主编　张文治　张翠莲　翟秀娜

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书依据教育部最新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，结合应用型高等院校工科类各专业学生对学习高等数学的需要进行编写。

本书分上、下两册出版，内容覆盖工科类本科各专业对高等数学的需求。上册（第 1 章～第 7 章）内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程；下册（第 8 章～第 12 章）内容包括：空间解析几何与向量代数，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，级数。

本书强调理论联系实际，结构简练、合理，每章都给出学习目标、学习重点，还安排了大量的例题和习题；每章都有本章小结、复习题和自测题；书末还附有积分表与习题参考答案。

本教材可供高等院校工科类本科各专业的学生学习使用，也可供高校教师和科技工作者使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 何春江主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2015.9
21世纪高等院校规划教材
ISBN 978-7-5170-3567-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①何… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第206175号

策划编辑：雷顺加　　责任编辑：宋俊娥　　封面设计：李　佳

书　　名	21 世纪高等院校规划教材 高等数学（上册）
作　　者	主　编　何春江 副主编　张文治　张翠莲　翟秀娜
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　15.75 印张　316 千字
版　　次	2015 年 9 月第 1 版　2015 年 9 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	28.00 元

前　　言

我国高等教育正在快速发展，教材建设也要与之适应，特别是教育部关于“高等教育面向21世纪内容与课程改革”计划的实施，对教材建设提出了新的要求。本书的编写目的就是为了适应高等教育的快速发展，满足教学改革和课程建设的需求，体现工科类教育教学的特点。

本书是编者依据教育部颁布的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，根据多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神编写的。全书贯彻“掌握概念、强化应用”的教学原则，精心选择了教材的内容，从实际应用的需要（实例）出发，加强数学思想和数学概念与工程实际结合的特点，淡化了深奥的数学理论，强化了几何说明，每章都有学习目标、小结、复习题、自测题等，便于学生总结学习内容和学习方法，巩固所学知识。

本书分上、下两册出版，内容覆盖工科类本科各专业对高等数学的需求。上册（第1章～第7章）内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程；下册（第8章～第12章）内容包括：空间解析几何与向量代数，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，级数。书后附有积分表与习题参考答案。

本书可作为高等院校工科类本科高等数学教材。本书若讲授全部内容，参考学时为160学时；若只讲授基本内容，参考学时为130学时，打*号的为相关专业选用的内容。

根据我国高等教育从精英教育向大众化教育转变以及现代化教育技术手段在教学中广泛应用的现状，我们对这套教材进行了立体化设计，除了提供电子教案，将尽快推出与教材配套的典型例题分析与习题解答。希望能更好地满足高校教师课堂教学和学生自主学习及考研的需要，对教和学起到良好的作用。

本书由何春江主编，张文治、张翠莲、翟秀娜担任副主编。各章编写分工为：翟秀娜编写第1章、第6章；张文治编写第2章、第3章；张翠莲编写第4章、第5章及书后附录1；何春江编写第7章。本书框架结构、编写大纲及最终审稿定稿由何春江完成。参加本书编写讨论工作的还有郭照庄、曾大有、岳雅璠、毕亚军、邓凤茹、张京轩、赵艳、毕晓华、江志超、张静、孙月芳、陈博海、聂铭伟、戴江涛、霍东升等。

在本书的编写过程中，编者参考了很多相关的书籍和资料，采用了一些相关内容，汲取了很多同仁的宝贵经验，在此谨表谢意。

由于时间仓促及作者水平所限，书中错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正，我们将不胜感激。

编　者

2015 年 7 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

本章学习目标

- 理解函数的概念和基本初等函数、初等函数的概念
- 理解复合函数的概念，会分析复合函数的复合结构
- 理解极限的概念
- 掌握极限的运算法则
- 会用两个重要极限求极限
- 了解无穷大、无穷小的概念及其相互关系和性质
- 理解函数连续的概念及其性质

1.1　函数

1.1.1　函数的概念

定义 1　设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的数集．如果有一个对应法则 f，使得对于每一个数值 $x\in D$，变量 y 都有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量．集合 D 称为函数的定义域，记为 D_f，即 $D_f=D$．

x 取数值 $x_0\in D_f$ 时，与 x_0 对应的数值 y 称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，函数值组成的数集称为函数的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

函数的定义域 D_f 和对应法则 f 是函数的两个要素，如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，则它们是相同的函数．

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可以用其他的英文字母或希腊字母表示，如 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等．

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义来确定，例如，球的体积 V 与半径 r 的函数关系为

$V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot r^3$，这个函数的定义域为 $r\in(0,+\infty)$；另一种是抽象的用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域为使算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域，在这种约定下，一般用算式表达的函数可用 $y=f(x)$ 表达，而不必再标出 D_f，例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域就是 $x\in[-1,1]$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域就是 $x\in(-1,1)$.

表示函数的方法主要有三种：表格法、图像法、解析法（公式法）.

下面举几个函数的例子.

例 1 某自动记录仪记录的某电容放电的电容情况，如图 1.1 所示的曲线．根据这条曲线，就能知道某电容随时间 t 的变化情况（图像法）.

例 2 某炼钢厂上半年生产的钢产量如下表，这里的时间 T（月）和产量 Q（吨）之间是两个相互依赖的变量．下表给出了 T 与 Q 之间的依赖关系（表格法）.

T（月）	1	2	3	4	5	6
Q（吨）	1032	1024	1027	1038	1057	1047

在实际问题中，有时会遇到一个函数在定义域的不同范围内，用不同的解析式表示的情形，这样的函数称为分段函数.

例 3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

就是一个分段函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，如图 1.2.

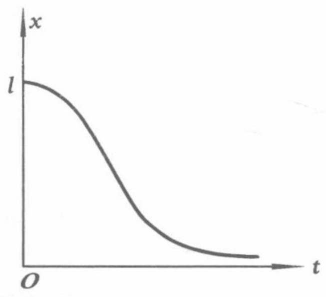


图 1.1

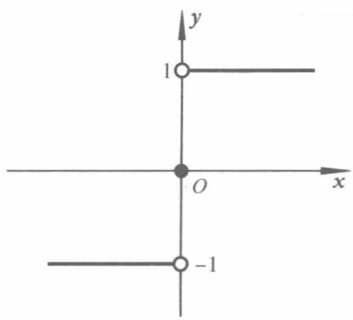


图 1.2

1.1.2 函数的性质

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D_f$，恒有 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），则称 $f(x)$ 为奇（或偶）函数.

例如 $f(x)=x^3$ 是奇函数，这是因为 $f(-x)=-x^3=-f(x)$；又如 $f(x)=x^2$ 是偶函数，这是因为 $f(-x)=x^2=f(x)$. 而 $y=x^3+x^2$ 既不是奇函数也不是偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

2. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对任意的 $x\in D_f$ 有 $x\pm T\in D_f$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们所说的周期是指函数 $f(x)$ 的最小正周期.

例如 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期为 2π， $\tan x$ 和 $\cot x$ 的周期为 π .

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（或单调减少）的. 单调增加（或单调减少）的函数又称为递增（或递减）函数，统称为单调函数，使函数保持单调性的自变量的取值区间称为该函数的单调区间.

例如函数 $y=x^2$，在区间 $[0,+\infty)$ 内单调增加，函数的图形是随着自变量的增加而上升；在 $(-\infty,0]$ 内单调减少，函数的图形是随着自变量的增加而下降.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正常数 M，使得对于区间 I 内的所有 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

例如 $y=\sin x$，对于一切 x 都有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，又如 $y=\arctan x$，对于一切 x 都有 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，所以函数 $y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，但是函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的.

1.1.3 反函数与复合函数

1. 反函数与隐函数

定义 2 设 $y=f(x)$ 是定义在 D_f 上的一个函数，其值域为 R_f. 如果对每一数值 $y\in R_f$，有唯一确定的且满足 $y=f(x)$ 的数值 $x\in D_f$ 与之对应，其对应法则记为 f^{-1}，则定义在 R_f 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$．若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一平面直角坐标系内，那么这两个图形关于直线 $y=x$ 对称．

例 4　求 $y=4x-1$ 的反函数．

解　由 $y=4x-1$ 得到 $x=\dfrac{y+1}{4}$，然后交换 x 和 y，得 $y=\dfrac{x+1}{4}$，即 $y=\dfrac{x+1}{4}$ 是 $y=4x-1$ 的反函数．

前面所介绍的函数，其因变量 y 是由含有自变量 x 的数学式子直接表示为 $y=f(x)$ 的形式，如 $y=\sqrt{1-\sin x}$，$y=\arcsin\dfrac{a}{x}$ 等．用这种方法表示的函数称为显函数．

通常表示变量 x,y 之间相互依赖关系的方法很多，显函数是其中的一种．有时变量 x,y 之间的相互依赖的关系是由某一个二元方程 $F(x,y)=0$ 给出的，如

$$x^3+y^3-xy+5=0,\quad \sin(xy)+\mathrm{e}^{x+y}=6 .$$

用这种方法表示的函数称为隐函数．

有些隐函数可以改写成显函数的形式．把隐函数改写成显函数，叫做隐函数的显化．而有些隐函数不能改写成显函数的形式，如 $\sin(xy)-2x^2y=1$．

在函数的定义中，规定了对于变量 x 的每一个数值，变量 y 有唯一确定的数值与之对应，这样定义的函数，又称为单值函数；如果对于变量 x，变量 y 有两个或更多个确定的数值与之对应，就称 y 是 x 的多值函数，本书主要讨论单值函数．

2. 复合函数

定义 3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$．如果对于 $\varphi(x)$ 的定义域中某些 x 值所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 有定义，则 y 通过 u 也成为 x 的函数，称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f\left[\varphi(x)\right]$，其中 u 称为中间变量．

根据定义可知，复合函数 $f\left[\varphi(x)\right]$ 的定义域或者与 $\varphi(x)$ 的定义域完全相同，或者只是 $\varphi(x)$ 的定义域的一部分．不是任意两个函数都能复合成一个函数．例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数，这是因为对于后一个函数的值域中的每一个 u 值，都不可能使前一个函数有定义．

例 5　问函数 $y=2^{\sqrt{x^2+1}}$ 是由哪些较简单的函数复合而成的？

解　它是由 $y=2^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 三个较简单的函数复合而成的．

把一个较复杂的函数分解成几个较简单的函数，这对于今后的许多运算是很有用的．

1.1.4 函数的运算

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域依次为 D_f, D_g， $D = D_f \bigcap D_g$，则我们可以定义这两个函数的下列运算：

和（差） $f \pm g$： $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$， $x \in D$；

积 $f \cdot g$： $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$， $x \in D$；

商 $\dfrac{f}{g}$： $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$， $x \in D$， $g(x) \neq 0$.

1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

幂函数： $y = x^{\mu}$ （ $\mu \in \mathbf{R}$ 是常数）；

指数函数： $y = a^x$ （ $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ）；

对数函数： $y = \log_a x$ （ $a > 0$ 且 $a \neq 1$，特别地，当 $a = \mathrm{e}$ 时，记为 $y = \ln x$ ）；

三角函数：如 $y = \sin x$， $y = \cos x$， $y = \tan x$， $y = \cot x$ 等；

反三角函数：如 $y = \arcsin x$， $y = \arccos x$， $y = \arctan x$， $y = \operatorname{arccot} x$ 等.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

2. 初等函数

由常函数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成，并可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如函数 $y = \sqrt{1 - \sin x}$， $y = \arcsin \dfrac{a}{x}$， $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 等都是初等函数.

工程技术中，常常用到一种由指数函数 e^x 和 e^{-x} 所组成的函数，称为双曲函数，它们的定义如下：

双曲正弦 $\operatorname{sh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲余弦 $\operatorname{ch} x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲正切 $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$；

双曲余切 $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$.

由定义可以证明，双曲函数具有类似于三角函数的一些恒等式：

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1；$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x；$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y；$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x\,;$$
$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x\,.$$

习题 1.1

1．求下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$；（2）$y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$；

（3）$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；（4）$y=\lg\sin x$．

（5）$y=\sin\sqrt{x}$；（6）$y=\tan(x+1)$；

（7）$y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；（8）$y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$．

2．下列各题中，$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否表示同一个函数，说明理由.

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$\varphi(x)=x+1$；（2）$f(x)=\lg x^2$，$\varphi(x)=2\lg x$；

（3）$f(x)=|x|$，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$；（4）$f(x)=\arccos x$，$\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$．

3．如果 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ x^2, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(0), f\left(-\dfrac{1}{2}\right), f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

4．判断下列函数的奇偶性.

（1）$y=\dfrac{x\cdot\sin x}{x^2+1}$；（2）$y=x\cdot\mathrm{e}^x$；

（3）$y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\in(-1,1)$．

5．下列函数哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

（1）$y=\cos(x-2)$；（2）$y=\cos 4x$；

（3）$y=1+\sin\pi x$；（4）$y=x\cos x$；

（5）$y=\sin^2 x$．

6．求下列函数的反函数.

（1）$y=\sqrt[3]{x+1}$；（2）$y=\dfrac{x-1}{x+1}$；

（3）$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$（$ad-bc\neq 0$）；（4）$y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

（5）$y=1+\ln(x+2)$；（6）$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$．

7．下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

（1）$y=\ln(2x+1)^2$；（2）$y=\sin^2(3x+1)$；

（3）$y=\arctan(x^3-1)$；（4）$y=\ln(\arcsin x)$．