

21 世纪数学教育信息化精品教材

Math
高职高专数学立体化教材

概率论与数理统计 学习辅导与习题解答

(理工类·高职高专版·第二版)

· 吴赣昌 主编 ·

 中国人民大学出版社

 世纪数学教育信息化精品教材

高职高专数学立体化教材

概率论与数理统计 学习辅导与习题解答

(理工类·高职高专版·第二版)

· 吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

《概率论与数理统计》学习辅导与习题解答(理工类·高职高专版·第二版)
吴赣昌主编.

北京:中国人民大学出版社,2010

21世纪数学教育信息化精品教材.高职高专数学立体化教材

ISBN 978-7-300-12941-9

I. ①概…

II. ①吴…

III. ①概率论-高等学校:技术学校-教学参考资料

②数理统计-高等学校:技术学校-教学参考资料

IV. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第211121号

21世纪数学教育信息化精品教材

高职高专数学立体化教材

《概率论与数理统计》学习辅导与习题解答

(理工类·高职高专版·第二版)

吴赣昌 主编

Gailulun yu Shuli Tongji Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街31号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室)

010-62511398(质管部)

010-82501766(邮购部)

010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司)

010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com>(人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫霸印务有限公司

规 格 148 mm×210 mm 32开本

版 次 2010年12月第1版

印 张 7.625

印 次 2010年12月第1次印刷

字 数 281 000

定 价 15.00元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

前 言

人大版“21世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新性“立体化教材”。教材自出版以来，历经多次的升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育新时代的教育改革，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国600余所大专院校广泛采用。

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段。对于非数学专业的大学生而言，大学数学的教育，其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已。事实上，在大学生涯中，就提高学习基础、提升学习能力、培养科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力学习的课程。

为方便同学们使用“21世纪数学教育信息化精品教材”，学好大学数学，作者团队建设了与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”。该系列教辅书籍均根据教材章节顺序编排了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的主要知识归纳、典型例题分析与习题解答等内容，而每一章的设计中包括了该章的教学基本要求、知识点网络图与题型分析，上述设计有助于学生在课后自主研读时通过这些教辅书更好更快地掌握所学知识，在较短时间内取得好成绩。

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识。而在课后的自学与练习过程中，首先要反复、认真地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解。

与传统的教材和教辅建设不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者队伍，我们还为读者朋友打造了数苑网（www.math168.com），此网站为本系列教材与教辅的用户提供丰富的资源性与交互性的网络学习服务，其中最为直接相关的是数苑论坛中专门建设的“大学公共数学同步学习论坛”（建设中，

待投入使用), 该论坛的建设旨在为全国大学数学相关课程的教学双方提供一个基于网络进行学习辅导与交流讨论的平台; **其最大的特色**在于该论坛的编辑工具中集成了作者团队开发的、国际领先的网页公式编辑系统 Web-FES 与网页图形编辑系统 Web-GES, 使得论坛能支持文字、公式与图形的在线编辑、发布、复制、粘贴与修改, 从而使得该论坛能全面支持用户基于网络进行数学与科学知识的在线交流与讨论. 在该论坛中, 用户不仅可用跟帖方式对各类教学要点、例题与习题进行交流讨论, 还可用主动发帖方式将自己学习中遇到的困惑、问题或者获得的经验、心得发布到论坛上进行交流讨论. 大学公共数学同步学习论坛的建设有利于汇聚广大师生的智慧对课程教育与学习相关的各类问题进行深入的讨论, 而论坛中建设与积累的丰富教学资源又能进一步为参与交流讨论的师生创造良好的教学环境.

与“21 世纪数学教育信息化精品教材”配套建设的教辅书籍包含了面向普通本科理工类、经管类、农林类、医药类、医学类与纯文科类的 14 套共 16 本, 面向各类三本院校理工类与经管类的 6 套共 7 本, 面向高职高专院校的理工类、经管类与综合类的 7 套共 7 本, 总计 27 套 30 本. 此外, 该系列教辅书籍的内容建设与编排具有相对的独立性, 它们还可以作为相应大学数学课程教学双方的参考书.

经常登录作者团队倾力为你建设的“数苑网”(www.math168.com), 你会获得意想不到的收获. 在那里, 你不仅能进一步拓展自己的学习空间, 下载优秀的学习交流软件, 寻找到更多教材教辅之外的学习资源, 而且还能与来自全国各地的良师益友建立联系.

吴赣昌

2010 年 6 月 18 日

目 录

第 1 章 随机事件及其概率	1
§ 1.1 随机事件	1
§ 1.2 随机事件的概率	6
§ 1.3 条件概率	12
§ 1.4 事件的独立性	19
本章小结	25
第 2 章 随机变量及其分布	36
§ 2.1 随机变量	36
§ 2.2 离散型随机变量及其概率分布	38
§ 2.3 随机变量的分布函数	44
§ 2.4 连续型随机变量及其概率密度	48
§ 2.5 随机变量函数的分布	56
§ 2.6 多维随机变量及其分布	61
§ 2.7 二维随机变量函数的分布	73
本章小结	79
第 3 章 随机变量的数字特征	95
§ 3.1 数学期望	95
§ 3.2 方差	101
§ 3.3 大数定理与中心极限定理	108
本章小结	114
第 4 章 数理统计的基础知识	131
§ 4.1 数理统计的基本概念	131
§ 4.2 常用统计分布	135
§ 4.3 抽样分布	141
本章小结	148

第 5 章 参数估计	154
§ 5.1 点估计	154
§ 5.2 置信区间	163
本章小结	171
第 6 章 假设检验	181
§ 6.1 假设检验的基本概念	181
§ 6.2 单正态总体的假设检验	185
§ 6.3 双正态总体的假设检验	191
§ 6.4 分布拟合检验	198
本章小结	206
第 7 章 方差分析与回归分析	217
§ 7.1 单因素试验的方差分析	217
§ 7.2 一元线性回归	224

第 1 章 随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中的一类不确定现象（随机现象）及其规律性的一门应用数学学科。20 世纪以来，它已广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域。本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一。

本章教学基本要求：

- 1. 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算。
- 2. 了解概率、条件概率的定义，掌握概率的基本性质，会计算古典概型的概率。
- 3. 掌握概率的加法公式，乘法公式，会应用全概率公式和贝叶斯公式。
- 4. 理解事件独立性的概念，掌握应用事件独立性计算概率的方法。
- 5. 理解独立重复试验的概率，掌握计算有关事件概率的方法。

§ 1.1 随机事件

一、主要知识归纳

1. 随机试验及其特征（见表 1—1—1）

表 1—1—1 随机试验及其特征

定义	在一定条件下我们对事先无法准确预知其结果的现象（即随机现象）的观察，称为随机试验。随机试验的每一种可能的结果（样本点）组成的集合 S 称为样本空间。样本空间的子集称为事件。由样本空间的样本点构成的单元素子集称为基本事件。
特征	(1) 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行。 (2) 可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果。 (3) 不确定性：每次试验出现的结果事先不能准确预知，但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个。

2. 事件的关系与运算（见表 1—1—2）

表 1—1—2 事件的关系与运算

事件的关系	表示形式	意义
包含	$A \subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生。 特例： $\emptyset \subset A \subset S$ 。
相等	$A = B$	$A \subset B$ ，且 $B \subset A$ 。

续前表

事件的关系	表示形式	意义
互不相容	$A \cap B = \emptyset$	事件 A 与事件 B 不能同时发生.
对立	$A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$	事件 A 与 B 有且仅有一个发生. 显然: $\bar{A} = S - A$.
和 (或并)	$A \cup B = \{w w \in A \text{ 或 } w \in B\}$	事件 A 与 B 至少有一个发生.
积 (或交)	$A \cap B = \{w w \in A \text{ 且 } w \in B\}$	事件 A 与事件 B 同时发生.
差	$A - B = \{w w \in A \text{ 但 } w \notin B\}$	事件 A 发生, 但事件 B 不发生.

3. 事件的运算规律

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- (3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
- (4) 自反律: $\bar{\bar{A}} = A$.
- (5) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (又称德摩根公式).

注: 上述运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

二、典型例题分析

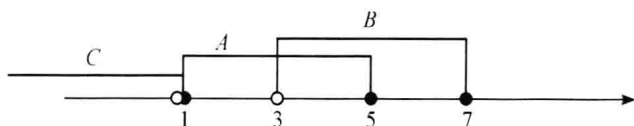
例 1 设 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | 3 < x \leq 7\}$, $C = \{x | x < 1\}$ 都是 $\mathbf{R} = \{x | -\infty < x < +\infty\}$ 中的集合, 试求下列各集合:

- (1) $A \cup B$; (2) $B \cap \bar{C}$; (3) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$; (4) $(A \cup B) \cap C$.

解 首先在坐标轴上标出集合 A, B, C 所包含的区间. 由例 1 图可知,

$$A \cup B = \{x | 1 \leq x \leq 7\}; \quad B \cap \bar{C} = B = \{x | 3 < x \leq 7\};$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C} = \{x | x > 7\}; \quad (A \cup B) \cap C = \emptyset.$$



例 1 图

小结: 概率论的任务之一是研究随机事件的规律, 通过对较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律, 因此, 熟练掌握事件的关系与运算是学习概率论的基础. 对于同一个集合可以有概率论和集合论两种解释, 要学会用概率论的语言解释集合间的关系及运算, 并能运用它们. 而数形结合是解决这类问题的一种

简便方法.

例 2 设 A, B, C 为三个随机事件, 试用 A, B, C 的运算关系表示下列事件:

- (1) $D = \text{"}A, B, C \text{ 至少有一个发生"}$;
- (2) $E = \text{"}A \text{ 发生, 而 } B \text{ 与 } C \text{ 都不发生"}$;
- (3) $F = \text{"}A, B, C \text{ 中恰有一个发生"}$;
- (4) $G = \text{"}A, B, C \text{ 中恰有两个发生"}$;
- (5) $H = \text{"}A, B, C \text{ 中不多于一个发生"}$.

解 (1) $D = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup ABC$
 $= A \cup B \cup C$;

(2) $E = A\bar{B}\bar{C}$;

(3) $F = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(4) $G = A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(5) $H = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

小结: 将复合事件用简单事件通过运算来表示, 是计算复合事件概率的关键. 基本的思路是: (1) 弄清楚所给随机试验有哪些基本事件, 所求复合事件由哪些简单事件复合而成; (2) 分析该复合事件与这些简单事件间的关系, 利用事件间的关系所对应的运算及事件的运算律, 将复合事件用简单事件表示出来.

例 3 指出下列关系中哪些成立, 哪些不成立:

- (1) $A \cup B = A\bar{B} \cup B$;
- (2) $\bar{A}B = A \cup B$;
- (3) $(AB)(\bar{A}\bar{B}) = \emptyset$;
- (4) 若 $AB = \emptyset$, 且 $C \subset A$, 则 $BC = \emptyset$;
- (5) 若 $A \subset B$, 则 $A \cup B = B$;
- (6) 若 $A \subset B$, 则 $AB = A$;
- (7) $(\overline{A \cup B})C = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

解 (1) 成立. 由分配律得

$$A\bar{B} \cup B = (A \cup B)(\bar{B} \cup B) = (A \cup B) \cap S = A \cup B.$$

(2) 不成立. 由于 $A \not\subset \bar{A}B$, 而 $A \subset A \cup B$.

(3) 成立. 由结合律得 $(AB)(\bar{A}\bar{B}) = A\bar{B}\bar{B} = A \cap \emptyset = \emptyset$.

(4) 成立. 由 $C \subset A$ 及 $AB = \emptyset$, 显然得 $CB = \emptyset$.

(5) 成立. 由并及包含的定义易证.

(6) 成立. 由交及包含的定义易证.

(7) 不成立. 由对偶律得 $(\overline{A \cup B})C = \bar{A}\bar{B}C \neq \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

例 4 从一批含有正品和次品的产品中, 任意抽取 5 件产品, 记

A_1 = “至少有一件次品”; A_2 = “至少有两件次品”;

A_3 = “至多有两件正品”; A_4 = “五件全是正品”.

试求 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$ 各表示什么事件.

解 由题意知, 抽得的次品数可能为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 则样本空间为 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(1) A_1 = “至少有一件次品” = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 故

$$\bar{A}_1 = \Omega - A_1 = \{0\} = \text{“次品数为 0”} = \text{“全是正品”}.$$

(2) A_2 = “至少有两件次品” = $\{2, 3, 4, 5\}$, 故

$$\bar{A}_2 = \Omega - A_2 = \{0, 1\} = \text{“至多有一件次品”} = \text{“至少有四件正品”}.$$

(3) A_3 = “至多有两件正品” = “至少有三件次品” = $\{3, 4, 5\}$, 故

$$\bar{A}_3 = \Omega - A_3 = \{0, 1, 2\} = \text{“至多有两件次品”} = \text{“至少有二件正品”}.$$

(4) A_4 = “五件全是正品” = “没有次品” = $\{0\}$, 故

$$\bar{A}_4 = \Omega - A_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \text{“至少有一件次品”} = \text{“至多有四件正品”}.$$

小结: 一般地, 不难得到

(1) A_i = “ n 件产品中至少有 i 件次品” 有对立事件 $\bar{A}_i$ = “ n 件产品中至多有 $(i-1)$ 件次品” = “ n 件产品中至少有 $[n-(i-1)]$ 件正品” ($i=0, 1, 2, \dots, n$).

(2) B_i = “ n 件产品中至多有 i 件次品” 的对立事件 $\bar{B}_i$ = “ n 件产品中至少有 $(i+1)$ 件次品” = “ n 件产品中至多有 $[n-(i+1)]$ 件正品” ($i=0, 1, 2, \dots, n$).

三、习题 1—1 解答

1. 试说明随机试验应具有的三个特点.

解 (1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 将一枚均匀的硬币抛两次, 事件 A, B, C 分别表示 “第一次出现正面”, “两次出现同一面”, “至少有一次出现正面”. 试写出样本空间及事件 A, B, C 中的样本点.

解 设试验的样本空间为 S , 则 S, A, B, C 可表示为

$$S = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\};$$

$$A = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反})\};$$

$$B = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\};$$

$$C = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正})\}.$$

3. 掷一颗骰子, 观察其出现的点数, 事件 A = “偶数点”, B = “奇数点”, C =

“点数小于 5”， D = “点数为小于 5 的偶数”。讨论上述事件的关系。

解 易知样本空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，则

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{1, 2, 3, 4\}, D = \{2, 4\}.$$

从而 $D \subset A$, $D \subset C$, $\bar{A} = B$, $B \cap D = \emptyset$.

4. 设某人向靶子射击三次，用 A_i 表示“第 i 次射击击中靶子”($i=1, 2, 3$)，试用语言描述下列事件：

$$(1) \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3; \quad (2) \overline{A_1 \cup A_2};$$

$$(3) (A_1 A_2 \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 A_2 A_3).$$

解 (1) $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$ 表示三次射击至少有一次没击中靶子；

(2) $\overline{A_1 \cup A_2}$ 表示前两次射击都没有击中靶子；

(3) $(A_1 A_2 \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 A_2 A_3)$ 表示恰好连续两次击中靶子。

5. 判断下列各式哪个成立，哪个不成立，并说明为什么。

$$(1) \text{若 } A \subset B, \text{ 则 } \bar{B} \subset \bar{A}; \quad (2) (A \cup B) - B = A;$$

$$(3) A(B - C) = AB - AC.$$

解 (1) 成立。否则 B 不发生不导致 A 不发生，换言之， B 不发生导致 A 发生，即 $\bar{B} \subset A$ ，又因为 $A \subset B$ ，则 $\bar{B} \subset B$ ，矛盾。

(2) 利用事件运算的分配律，有

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B} \cup \emptyset = A\bar{B} = A - AB \subset A,$$

显然， $A - AB$ 一般不等于 A ，故结论 $(A \cup B) - B = A$ 不一定成立，只当 A, B 互不相容时，等式成立。

$$(3) \text{右边} = AB\bar{A}\bar{C} = AB(\bar{A} \cup \bar{C}) = \emptyset \cup AB\bar{C} = A(B\bar{C}) = A(B - C) = \text{左边}.$$

以上等式关系是可逆的，所以又可以证明左边 = 右边。因此

$$A(B - C) = AB - AC$$

是正确的。

$$6. \text{证明: } (A \cup B) - B = A - AB = \bar{A}B = A - B.$$

证 由定义 $A - B = A\bar{B}$ ，又

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{B} = A\bar{B} \cup \emptyset = A\bar{B},$$

$$\text{而 } A - AB = A\bar{A}\bar{B} = A(\bar{A} \cup \bar{B}) = A\bar{A} \cup A\bar{B} = A\bar{B}.$$

7. 两个事件互不相容与两个事件对立有何区别？举例说明。

解 事件 A, B 互不相容，是说事件 A, B 不同时发生，即 $A \cap B = \emptyset$ ；事件 A, B 互为对立事件，是说事件 A, B 有且仅有一个发生，即 $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \cup B = S$ 。

因此，对立事件与互不相容事件的区别与联系是：

(1) 若两事件对立，则必定互不相容，但两事件互不相容未必对立；

(2) 互不相容可用于多个事件, 而互为对立事件仅适用于两个事件;

(3) 两个事件互不相容只是说明两个事件不能同时发生, 即至多发生其中一个事件, 但可以都不发生, 而两事件对立说明两事件有且仅有一个发生.

例如, 习题3中, B 与 D 互不相容, 但不是对立事件; 而 B 与 A 既是互不相容又是对立事件.

若令 $E = \{6\}$, 则事件 B 、 D 、 E 互不相容, 且 $B \cup D \cup E = S$.

§ 1.2 随机事件的概率

一、主要知识归纳

表 1—2—1 频率及其性质

定义	若在相同的条件下进行 n 次试验, 事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$, 则称 $f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$ 为事件 A 发生的频率.
性质	(1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$; (2) $f_n(S) = 1$; (3) 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容的事件, 则 $f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_n).$

表 1—2—2 概率

统计定义	在相同条件下重复进行 n 次试验, 若事件 A 发生的频率 $f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$ 随着试验次数 n 的增大而稳定地在某个常数 p 附近摆动, 则称 p 为事件 A 的概率, 记为 $P(A)$. 显然, 概率与频率有相同的性质: (1) $0 \leq P(A) \leq 1$; (2) $P(S) = 1$; (3) 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容的事件, 则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$
性质	(1) 对任一事件 A, 有 $0 \leq P(A) \leq 1$. (2) $P(S) = 1$, $P(\emptyset) = 0$. (3) 有限可加性: 设 A, B 是两个互不相容的事件, 则有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B).$ (4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. (5) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$, 特别地, 若 $B \subset A$, 则 (a) $P(A - B) = P(A) - P(B)$; (b) $P(A) \geq P(B)$. (6) 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 注: 性质 (3)、(6) 可推广到任意有限个事件的并的情形.

续前表

古典概型	具有下列特征的随机试验模型称为古典概型: (1) 随机试验只有有限个可能的结果; (2) 每一个可能结果发生的可能性相同. 若随机试验模型为古典概型, 则事件 A 发生的概率为 $P(A) = \frac{A \text{ 包括的基本事件数}}{S \text{ 中基本事件的总数}}.$
------	---

二、典型例题分析

例 1 设 $AB = \emptyset$, $P(A) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.8$, 求事件 B 的逆事件的概率.

解 由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B)$, 得

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.8 - 0.6 = 0.2,$$

故 $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.2 = 0.8$.

小结: 概率的性质 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 可以推广到 n 个事件的情形: 一般地, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

例 2 设 A 和 B 为两随机事件, A 和 B 至少有一个发生的概率为 $\frac{1}{4}$, A 发生且 B 不发生的概率为 $\frac{1}{12}$, 求 $P(B)$.

解 由题意知 $P(A \cup B) = \frac{1}{4}$, $P(A\bar{B}) = \frac{1}{12}$. 而 $B \cap (A\bar{B}) = \emptyset$, 故由概率的有限可加性得

$$P(A \cup B) = P(B \cup A\bar{B}) = P(B) + P(A\bar{B}).$$

$$\text{从而 } P(B) = P(A \cup B) - P(A\bar{B}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

小结: 要求 $P(B)$, 需要根据已知事件的概率利用概率的性质求解. 概率的 6 条性质要熟练掌握, 并能够根据需要灵活变形.

例 3 设 A, B 是两个事件, $P(A) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$.

(1) 当 A, B 互不相容时, 求 $P(B)$;

* (2) 当 A, B 相互独立时, 求 $P(B)$.

解 (1) 若 A, B 互不相容, 即 $A \cap B = \emptyset$, 由概率的性质

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B),$$

故 $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.7 - 0.4 = 0.3$.

(2) 若 A, B 相互独立, 即 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, 由概率的性质

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B),$$

故

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{0.7 - 0.4}{0.6} = 0.5.$$

小结: 事件互不相容与事件独立是两个完全不同的概念.

A, B 互不相容 $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$; A, B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

当 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 时, 若 A, B 相互独立, 则 $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$, 而若 A, B 互不相容, 则 $P(A \cap B) = 0$, 这说明: 在 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 的情况下, 相互独立的事件不能同时互不相容.

例 4 一个箱子中, 有 n 双不同型号的鞋子, 从中随机取出 $2k$ ($0 < 2k < n$) 只, 求事件 $A = \{\text{至少有两只配对}\}$ 的概率.

解 样本空间的基本事件总数为从 $2n$ 只鞋子中取 $2k$ 只鞋子, 共 C_{2n}^{2k} 种取法.

$A = \{\text{至少有两只配对}\}$, 其对立事件 $\bar{A} = \{\text{所有的鞋子都不配对}\}$, 而 $\bar{A} = \{2k \text{ 只鞋子都不配对}\} \Leftrightarrow \{2k \text{ 只鞋子是从 } 2k \text{ 双鞋子中分别取一只}\}$, 即先从 n 双鞋子中取 $2k$ 双鞋子, 对取出的 $2k$ 双鞋子, 再从每双中分别取一只, 共 $\underbrace{C_n^{2k} \cdot C_2^1 \cdot \dots \cdot C_2^1}_{2k} = C_n^{2k} \cdot 2^{2k}$ 种取法, 这是事件 $\bar{A}$ 包含的基本事件数. 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_n^{2k} \cdot 2^{2k}}{C_{2n}^{2k}}.$$

小结: 这是一个古典概型问题. 求解至少发生其一的事件的概率, 一般考虑先求其对立事件的概率. 这实际上是一个配对问题.

例 5 某油漆公司发出 17 桶油漆, 其中白漆 10 桶, 黑漆 4 桶, 红漆 3 桶, 在搬运中所有标签脱落, 交货人随意将这些油漆发给顾客, 问一个订货 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客, 能按所给定颜色如数得到订货的概率是多少?

解 由题意知, 这是一个古典概型, 设 $A = \{\text{订货 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆}\}$, 则 A 的基本事件数为 $C_{10}^4 C_4^3 C_3^2 = 2\,520$, 基本事件总数为 $C_{17}^{4+3+2} = 24\,310$, 则所求概率为

$$P(A) = \frac{2\,520}{24\,310} \approx 0.1037.$$

小结: 对古典概型问题, 关键是找出其基本事件总数, 以及所求事件包含的基本事件件数. 同时要注意, 两者要在同一个样本空间中计算所求事件的概率.

三、习题 1—2 解答

1. 设 $P(A)=0.1$, $P(A \cup B)=0.3$, 且 A 与 B 互不相容, 求 $P(B)$.

解 因为 A 与 B 互不相容, 利用概率的有限可加性, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

于是 $P(B) = P(A \cup B) + P(AB) - P(A) = 0.3 + 0 - 0.1 = 0.2$.

2. 设 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, 求 $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

解 利用概率的性质, 有

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cup B)] = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

3. 10 把钥匙中有 3 把能打开门, 今任取两把, 求能打开门的概率.

解 方法一 要想把门打开, 取出的两把钥匙应至少有一把从能开门打开的三把钥匙中获得, 从而“能把门打开”这一事件所包含的样本点数为 $m = C_3^2 + C_7^1 C_3^1 = 24$, 故所求概率为 $P = \frac{m}{n} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15} \approx 0.53$.

方法二 随机试验是从 10 把钥匙中任取两把, 从而样本空间 S 的样本点总数为

$$n = C_{10}^2 = 45.$$

记事件 A 为“能把门打开”, 则 $\overline{A}$ 为“不能把门打开”, 从 7 把不能把门打开的钥匙中任取 2 把, 共有 $C_7^2 = 21$ 种取法, 即事件 $\overline{A}$ 共包含 21 个样本点, 从而

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{21}{45} = \frac{24}{45} \approx 0.53.$$

4. 两封信随机地投入四个邮筒, 求前两个邮筒内没有信的概率及第一个邮筒内只有一封信的概率.

解 样本空间的样本点总数为 $4 \times 4 = 16$, 记事件 A 为“前两个邮筒内没有信”, 此时两封信投在后两个邮筒中, 从而事件 A 所包含的样本点数为 $m_1 = 2 \times 2 = 4$, 于是

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{4}{16} = 0.25.$$

记事件 B 为“第一个邮筒内只有一封信”，此时，需将两封信中的一封放入第一个邮筒，共有 2 种放法，剩下的一封信放入其它三个邮筒中的一个，共有 3 种放法，从而事件 B 包含的样本点数为 $m_2 = 2 \times 3 = 6$ ，故

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{6}{16} = 0.375.$$

5. 从 0, 1, 2, ..., 9 中任意选出 3 个不同的数字，试求下列事件的概率：

$$A_1 = \{\text{三个数字中不含 0 与 5}\}, A_2 = \{\text{三个数字中不含 0 或 5}\}.$$

解 从 0, 1, 2, ..., 9 中任意选出 3 个不同的数字，共有 C_{10}^3 种取法。

若三个数字中不含 0 与 5，也就是从 8 个数字中取 3 个数字，共有 C_8^3 种取法。若三个数字中不含 0 或 5，则共有 $2C_9^3 - C_8^3$ 或 $C_{10}^3 - C_8^3$ 种取法。

故所求概率分别为

$$P(A_1) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15};$$

$$P(A_2) = \frac{2C_9^3 - C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{14}{15} \quad \text{或} \quad P(A_2) = 1 - \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{14}{15}.$$

6. 从一副扑克牌 (52 张) 中任取 3 张 (不重复)，计算取出的 3 张牌中至少有 2 张花色相同的概率。

解 因从 52 张牌中任取 3 张不重复的牌共有 C_{52}^3 种取法，而至少有 2 张花色相同的取法共有 $C_4^1 C_{13}^3 + C_4^1 C_{13}^2 C_{13}^1$ 或 $C_{52}^3 - C_4^1 C_{13}^1 C_{13}^1 C_{13}^1$ 种取法，故所求概率为

$$P = \frac{C_4^1 C_{13}^3 + C_4^1 C_{13}^2 C_{13}^1}{C_{52}^3} \approx 0.602$$

$$\text{或} \quad P = 1 - \frac{C_4^1 C_{13}^1 C_{13}^1 C_{13}^1}{C_{52}^3} \approx 0.602.$$

7. 袋中装有 5 个白球，3 个黑球，从中一次任取两个。

(1) 求取到的两个球颜色不同的概率；

(2) 求取到的两个球中有黑球的概率。

解 (1) 设 A = “取到的两个球颜色不同”，则

$$P(A) = \frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}.$$

(2) 设 A_i = “取到 i 个黑球”， $i = 1, 2$ ， B = “取到黑球”，则由题意有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) \\ &= \frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2} + \frac{C_3^2 C_5^0}{C_8^2} = \frac{9}{14}. \end{aligned}$$