普通高等院校经济管理专业系列规划教材

管理运筹学

GUANLI YUNCHOUXUE

主编 王东生 李本庆

西南交通大学出版社

普通高等院校经济管理专业系列规划教材

管理运筹学

王东生　李本庆　主编

西南交通大学出版社
·成　都·

内容简介

本书讲述了管理运筹学的基本内容，包括线性规划与单纯形法、对偶理论与灵敏度分析、运输问题、整数规划、目标规划、动态规划、图论与网络分析、统筹方法、博弈论和决策论等。书中注重讲解各种运筹学模型的基本概念和求解思路，注重用实例说明各类模型的实质内容和实际意义；在原理方法的论述上，加强了对其经济意义与实际背景的描述，以此来提高学生解决实际问题的能力。

本书可供经管类专业本科生使用，也可作为相关专业师生的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

管理运筹学 / 王东生，李本庆主编. —成都：西南交通大学出版社，2015.8

普通高等院校经济管理专业系列规划教材

ISBN 978-7-5643-4198-5

Ⅰ. ①管… Ⅱ. ①王… ②李… Ⅲ. ①管理学－运筹学－高等学校－教材 Ⅳ. ①C931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 195875 号

普通高等院校经济管理专业系列规划教材

管 理 运 筹 学

王东生 李本庆 主编

责任编辑 孟秀芝

封面设计 何东琳设计工作室

印张 16 **字数** 400千

成品尺寸 185 mm × 260 mm

版本 2015年8月第1版

印次 2015年8月第1次

印刷 成都中铁二局永经堂印务有限责任公司

出版发行 西南交通大学出版社

网址 http://www.xnjdcbs.com

地址 四川省成都市金牛区交大路146号

邮政编码 610031

发行部电话 028-87600564 028-87600533

书号： ISBN 978-7-5643-4198-5

定价： 36.00元

课件咨询电话：028-87600533

前　言

“管理运筹学”是普通本科高校经管类专业学生的专业基础课，该课程教授的主要目的是为管理人员提供决策的科学依据，是实现有效管理、正确决策的重要方法之一。因此，该课程在整个本科学习阶段至关重要——无论是为了后续相关课程的学习，还是为了升学和工作的需要。

本书在内容编排上进行了较大改进：第一，用两个章节将线性规划的基本理论进行了集中梳理，为接下来的内容做好铺垫；第二，在管理运筹学的“传统知识体系”中去掉了“存储论”“排队论”和“预测”等内容，这是因为“存储论”与其他学科有明显的交叉痕迹，“排队论”涉及较复杂的概率论知识，而“预测”的部分内容在相关课程中也有阐述。

本书本着“实用、够用、有用”的原则，将内容划分为十章。

第 1 章　线性规划与单纯形法。本章通过例子归纳线性规划数学模型的一般形式，着重介绍有关线性规划的一些基本概念、基本理论及解线性规划问题的若干方法。

第 2 章　对偶理论与灵敏度分析。本章阐明了对偶问题的基本原理和基本性质，介绍了对偶单纯形法的原理和计算步骤，并介绍了灵敏度分析问题的类型和分析过程。

第 3 章　运输问题。本章介绍了一般运输问题的分析过程，即把某种产品从若干个产地调运到若干个销地，在每个产地的供应量与每个销地的需求量已知，并知道各地之间的运输单价的前提下，如何确定一个使得总的运输费用最小的方案。

第 4 章　整数规划。本章介绍了整数规划的模型、计算方法和求解过程，并介绍了指派问题的模型和求解。

第 5 章　目标规划。本章介绍了目标规划的数学模型、目标规划的图解法和单纯形法，并通过举例深化对模型和求解方法的理解。

第 6 章　动态规划。本章针对多阶段决策问题，介绍了动态规划的类型及其求解方法和过程，并着重介绍了动态规划在工程技术、经济管理等社会各个领域的应用。

第 7 章　图与网络模型。本章介绍了图与网络模型的基本问题，并介绍了其在经济管理、工业工程、交通运输、计算机科学与信息技术、通信与网络技术等诸多领域的应用，重点介绍了最短路问题、最大流问题、最小费用流问题和匹配问题等。

第 8 章　统筹方法。本章介绍了网络计划技术及其应用，重点介绍了网络图的绘制、双代号网络图时间参数的计算、计划评审技术，并介绍了网络计划优化的方法和步骤。

第 9 章　博弈论。本章介绍了博弈论的基本概念，阐明了博弈论的原理，介绍了矩阵博弈的最优策略和混合策略，并介绍了完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、二人无限非零和博弈、合作对策等问题。

第 10 章 决策论。本章介绍了决策的类型，并介绍了不确定型决策和风险型决策的准则和方法，在此基础上，介绍了效用决策的理论和方法、多目标决策的理论和方法、层次分析法。

每章后配有一定数量的习题供学生练习，并附有参考答案。力求框架内容丰富、学与用相结合，努力实现理论扎实严谨、行文深入浅出、用例通俗切实，以此来满足读者的需要。

本书由王东生和李本庆主编，具体编写分工如下：第 1 章、第 2 章由西京学院赵斌编写，第 4 章、第 7 章由安康学院李本庆编写，第 3 章、第 5 章、第 6 章由安康学院张亚晴编写，绪论、第 8 章、第 9 章、第 10 章由陕西理工学院王东生编写。

由于编者水平所限，难免有疏漏之处，恳请读者批评指正，不胜感激！

作 者

2015 年 6 月

目　录

0 绪 论

0.1 运筹学简史

运筹学是21世纪新兴的学科之一，它能帮助决策人解决那些可以用定量方法和有关理论来处理的问题。运筹学在工业、商业、农业、交通运输、政府部门和其他方面都有着重要的应用，现在已经成为经济计划、系统工程、现代管理等领域强有力的工具。

自从人类社会诞生以来，人们都一直在经历着运用和筹划的决策过程。而运筹学的一些朴素思想可以追溯到很久以前，历史上记载着很多巧妙的运用事例。例如，广为人知的战国时期齐王和大臣田忌赛马的故事：在谋士孙膑的策划下，田忌竟以逊色于齐王马匹的劣势获得比赛的胜利，赢得千金。又如，北宋真宗年间，皇城失火，皇宫被毁，朝廷决定重建皇宫，当时亟待解决“取土”“外地材料的储运”“处理瓦砾”等三项任务，在修建皇宫负责人丁渭的精心策划下，巧妙地解决了上述三项任务。三国时期的运筹大师诸葛亮，更是众所周知的风云人物。在国外人们常推崇阿基米德为运筹学的先驱人物，因为他筹划有方，在保卫叙拉古、抵抗罗马帝国的侵略中做出了突出贡献。

运筹学作为科学名词出现是在20世纪30年代末（第二次世界大战）。当时，英、美应对德国的空袭，雷达作为防空系统的一部分，从技术上是可行的，但实际运用时却并不好用。为此，一些科学家研究如何合理运用雷达开始对一类新问题进行研究。因为它与研究技术问题不同，就称之为“运用研究”（operational research）。为了进行运筹学研究，在英、美的军队中成立了一些专门小组，开展了针对护航舰队保护商船队的编队问题和当船队遭受德国潜艇攻击时如何使船队损失最少的问题的研究。在研究了反潜深水炸弹的合理爆炸深度后，德国潜艇被摧毁数增加到 400%；研究了船只在受敌机攻击时的行动策略，提出了大船应急转向和小船应缓慢转向的逃避方法。研究结果显示，船只在受到敌机攻击时，中弹数由47%下降到了29%。

虽然运筹学这一科学名词出现于第二次世界大战中，但在这之前已有许多蕴含运筹学思想和方法的书籍和论文出现。苏联数学家康托洛维奇的《生产组织与管理中的数学方法》（属于规划论的内容）出版于1939年，但是当时并未得到重视，直到1960年康托洛维奇再次发表了《最佳资源利用的经济计算》一书后，才受到国内外的广泛重视。为此康托洛维奇于1975年获得了诺贝尔经济学奖。冯·诺伊曼等所著《对策论与经济行为》一书（运筹学中对策论的创始作）成书前所发表的一系列论文在1928年起就开始刊出。排对论的先驱者丹麦工程师艾尔朗于1917年在哥本哈根电话公司研究电话通信系统时，率先提出了排对论的一些著名公式。

第二次世界大战后，美国等国家的军方仍保留一些运筹研究小组，其他多数人把运筹学研究转向转而将运筹学用于对和平时期的工商业的研究。美、德等国家的运筹学得以蓬勃发展，出现了应用研究和理论研究相互促进的局面。此后，运筹学得到了很快的发展。

20 世纪 50 年代中期，钱学森、许国志等教授将运筹学从西方引入中国。在 1956 年命名为“运用学”，1957 年正式更名为“运筹学”。他们结合我国的特点将运筹学在国内推广应用。在经济数学方面，特别是对投入产出表的研究和应用开展较早，对质量管理的应用也很有特色。在此期间以华罗庚教授为首的一大批数学家加入到运筹学的研究队伍中，使运筹学的许多分支很快达到当时的国际水平。1980 年我国的运筹学会成立，于 1982 年创办了运筹学杂志，1997 年改为运筹学学报。

0.2 运筹学的性质与特点

运筹学是涉及多种学科的综合性科学，也是最早形成的一门软科学。当人们把运筹学在第二次世界大战时的成功应用经验推广到和平时期时，面临着研究领域覆盖面过广的问题。在这一领域中，对于运筹学主要研究和解决什么问题有许多说法，至今争论不休，实际上形成了一个在争论中发展运筹学的局面。在争论的四五十年中，我们能看出运筹学所具有的一些特点。

（1）引进数学研究方法。运筹学是一门以数学为主要工具，寻求各种问题最优方案的学科，所以是一门优化科学。随着生产与管理规模的日益扩大，其间的数量关系也就更加复杂，通过数量关系来研究这些问题，即引进数学研究方法，是运筹学的一大特点。

（2）系统性。运筹学是从系统的观点出发，研究全局性的问题以及综合优化的规律，它是系统工程的主要理论基础。

（3）注重实际应用。在运筹学领域，有许多人强调运筹学的实用性和对研究结果的“执行”性，把“执行”看作运筹工作中的一个重要组成部分。有的运筹学教科书中，在讲述从理论上求得最优解之后，还要讲述根据实际情况对所得解进行进一步的考察，讲述对所得最优解如何进行灵敏度分析等。

（4）跨学科性。早期军事运筹研究的一个重要特点是通过由不同学科领域专家组成的运筹小组对实际问题进行集体研究。如第二次世界大战时英国在空军部门成立的防空运筹小组的成员包括数学家、物理学家、天文学家、生理学家和军事专家多名，共同探讨如何抵御敌人的空袭和潜艇。出于研究和解决实际问题的需要，这种组织及其跨学科性一直被一些地方或部门以不同的形式保留下来。从世界范围来看，运筹学的成败以及应用的广泛程度，无不与有这样的研究组织及其工作水平有关。

（5）理论和应用的发展相互促进。运筹学的各个分支学科，都是由于实际问题的需要或以一定的实际问题为背景逐渐发展起来的。初期一些老的学科方面的专家对运筹学做出了贡献。随后新的人才逐渐涌现，新的理论相继出现，这往往会开拓出新的领域。例如，Dantzig 发明了求解线性规划的单纯形方法之后，又相继出现了一批职业的线性规划工作者，由于他们从事大量的实践活动，反过来又进一步促进了线性规划方法的进一步发展，从而又出现了

椭球法、内点法等新的解线性规划的方法。目前运筹学家们仍在孜孜不倦地研究新技术、新方法，使运筹学这门年轻的学科不断向前发展。

0.3 运筹学的主要内容

运筹学发展到现在虽然只有四五十年的历史，但是内容丰富，涉及面广，应用范围大，已形成了一个相当庞大的学科。它的主要内容一般应包括线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划、网络分析、排队论、对策论、决策论、存储论、可靠性理论、模型论、投入产出分析等。它们中的每一个部分都可以独立成册，都有丰富的内容。

线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划这五个部分统称为规划论，它们主要解决两个方面的问题。第一，对于给定的人力、物力和财力，怎样才能发挥它们的最大效益；第二，对于给定的任务，怎样才能用最少的人力、物力和财力去完成它。

网络分析主要是研究解决生产组织、计划管理中的诸如最短路径问题、最小连接问题、最小费用流问题以及最优分派问题等。特别是在设计和安排大型复杂工程时，网络技术是重要的工具。

排队现象在日常生活中屡见不鲜，如机器等待修理、船舶等待装卸、顾客等待服务等。它们有一个共同的问题，就是等待时间过长，会影响生产任务的完成，或者顾客会自动离去而影响经济效益；如果增加修理工、装卸码头和服务台，固然能解决等待时间过长的问题，但又会蒙受修理工、码头和服务台空闲的损失。这类问题的妥善解决就是排对论的任务。

对策论是研究具有利害冲突的各方，如何制定出对自己有利从而战胜对手的斗争策略，战国时代田忌赛马的故事便是对策论的一个绝妙的例子。

决策问题是普遍存在的，凡属“举棋不定”的事情都必须做出决策。人们之所以举棋不定，是因为人们在着手实现某个预期目标时，出现了多种情况，又有多种行动方案可供选择。决策者如何从中选择一个最优方案，才能达到他的预期目标，这是决策论的研究任务。

人们在生产和消费过程中，都必须储备一定数量的原材料、半成品或商品。存储少了会因停工待料或失去销售机会而遭受损失，存储多了又会造成资金积压、原材料及商品的损耗。因此，如何确定合理的存储量、购货批量和购货周期至关重要，这便是存储论要解决的问题。

对于一个复杂的系统和设备，往往是由成千上万个工作单元或零件组成的，这些单元或零件的质量如何，将直接影响到系统或设备的工作性能是否稳定可靠。研究如何保证系统或设备的工作可靠性，便是可靠性理论的任务。

人们在生产实践和社会实践中遇到的事物往往是很复杂的，要想了解这些事物的变化规律，首先必须对这些事情的变化过程进行适当的描述，即建立模型，然后可通过对模型的研究来了解事物的变化规律。模型论就是从理论上和方法上来研究建立模型的基本技能。

投入产出分析是通过研究多个部门的投入产出所必须遵守的综合平衡原则来制定各个部门的发展计划，借以从宏观上控制、调整国民经济，以求得国民经济协调合理的发展。

0.4 运筹学的方法论

运筹学的方法论包括以下六个部分。

（1）提出问题。即提出需要解决的问题，确定目标，并分析问题所处的环境和约束条件。注意要抓住主要矛盾，舍弃次要因素。

（2）建立模型。选用合适的数学模型来描述问题，确定决策变量，建立目标函数、约束条件等，并据此建立相应的运筹学模型。

（3）求解模型。确定与数学模型有关的各种参数，选择求解方法，求出解。解可以是最优解、次优解、满意解。

（4）解的检验。首先检查求解步骤和程序有无错误，然后检查解是否反映现实问题。

（5）解的控制。通过灵敏度分析等方法，对所求的解进行分析和评价，并据此对问题的提出和建模阶段进行修正。

（6）解的实施。提供决策所需的依据、信息和方案，帮助决策者决定处理问题的方针和行动。

这六部分之间存在如图 0.1 所示的关系。

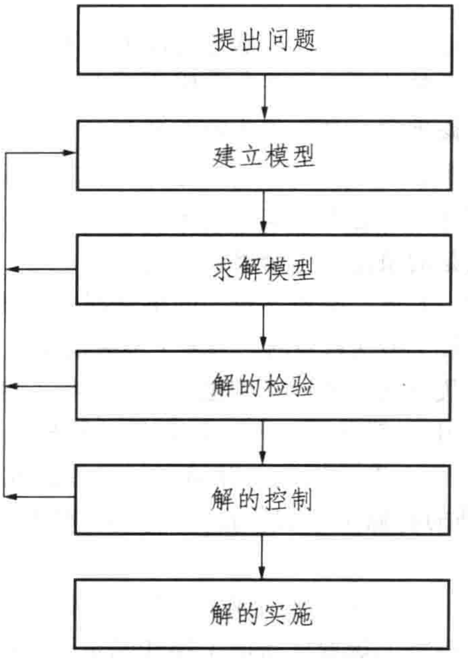


图 0.1 方法论六部分存在关系

0.5 运筹学的发展趋势

运筹学作为一门学科，在理论和应用方面，在广度和深度上，都有着无限广阔的前景。

它不是一门衰老过时的学科，而是一门处于发展时期的新兴学科，这从运筹学目前的发展趋势便可看出。

（1）运筹学的理论研究将会得到进一步系统的、深入的发展。数学规划是 20 世纪 40 年代末期才开始出现的。经过十多年的时间，到了 20 世纪 60 年代，它已成为应用数学中一个重要的分支，各种方法和各种理论纷纷出现。但是，数学规划也与别的学科类似，在各种方法和理论出现以后，自然要走上统一的途径。也就是说，用一种或几种方法和理论把现存的东西统一在某些系统之下进行研究。而目前这种由分散到统一、由具体到抽象的过程正在形成，而且将得到进一步的发展。

（2）运筹学向一些新的研究领域发展。运筹学的一个重要特点是应用十分广泛，近年来，它正迅速向一些新的研究领域或原来研究较少的领域发展，如世界性问题、国家决策或系统工程等的研究。

（3）运筹学分散融入其他学科，并结合其他学科一起发展。例如数学规划方法用于工程设计，常常叫作“最优化方法”，已成为工程技术中一个有力的研究工具；数学规划用于 Leontief 的投入产出模型，也成为西方计量经济学派常用的数学工具，等等。

（4）运筹学沿原有的各学科分支向前发展。比如规划论，从研究单目标规划到研究多目标规划，这当然可以看成是对事物进行深入研究的自然延伸。事实上，在实际问题中想达到的目标往往有多个，而且有些是互相矛盾的。再如从研究短期规划到研究长期规划，这种深入研究也是很自然的，因为对于不少实际问题，人们主要关心的是未来的结果。

（5）运筹学中建立模型的问题将日益受到重视。从事实际问题研究的运筹学工作者常常感到他们所遇到的困难是如何把一个实际问题变成一个可以用数学方法或别的方法来处理的问题。就目前来说，关于运筹学理论和方法的研究远远超过了对上述困难的研究，要使运筹学保持它的生命力，这种研究非常必要。

（6）运筹学的发展将进一步依赖于计算机的应用和发展。计算机的问世与广泛的应用是运筹学得以迅速发展的重要原因。在运筹学的实际问题中，计算量一般都是很大的。只是有了存储量大、计算速度快的计算机，才使得运筹学的应用成为可能，并反过来推动了运筹学的进一步发展。如算法复杂性这个学科就是运筹学与计算机相结合的产物。

总之，运筹学的发展速度是前所未有的，它必将加速我国的现代化建设。

0.6 运筹学与管理运筹学

管理运筹学是架构在运筹学基础上的学科，它借助运筹学的理论方法，针对现实中的系统，特别是经济系统进行量化分析，并以量化数据为支撑，去求得经济系统运行的最优化方案，以此来帮助系统运行的决策者做出科学的决策。由此可见，管理运筹学是一门以决策支持为目标的应用性学科，是运筹学体系的一个重要组成部分。

管理运筹学是数学、管理学、经济学、社会学、政治学、计算机科学等的交叉学科，主要涉及经济管理中的最优规划及决策方法等问题。因此，从定性分析向定量分析过渡，分析整理系统的有关信息并去建立相应的定量分析模型，从而掌握有关的求解定量模型的数学方

法，是本课程的一个基本学习路径。

本书引用的运筹学的理论主要包括线性规划与对偶原理、整数规划、目标规划和动态规划原理、运输模型、图论、博弈论和决策分析等。

0.7 管理运筹学的应用重点

（1）市场营销。在广告预算和媒体的选择、竞争性定价、新产品开发、销售计划的制订等方面。如美国杜邦公司在 20 世纪 50 年代起就非常重视将作业研究用于如何做好广告工作、产品定价和新产品的引入。又如通用电力公司对某些市场进行模拟研究。

（2）生产计划。在总体计划方面，主要是从总体确定生产、储存和劳动力的配合等计划以适应变动的需求计划，主要用线性规划和仿真方法等。此外，既可用于生产作业计划、日程表的编排等，也可用于合理下料、配料问题、物料管理等。

（3）库存管理。存货模型将库存理论与计算机的物料管理信息系统相结合，主要应用于多种物料库存量的管理，确定某些设备的能力或容量，如工厂的库存、停车场的大小、新增发电设备容量的大小、计算机的主存储器容量、合理的水库容量等。

（4）运输问题。这里涉及空运、水运、公路运输、铁路运输、捷运、管道运输和厂内运输等，包括班次调度计划及人员服务时间安排等问题。

（5）财政和会计。这里涉及预算、贷款、成本分析、定价、投资、证券管理、现金管理等。用得较多的方法是统计分析、数学规划、决策分析，此外还有盈亏点分析法、价值分析法等。

（6）人力资源管理。这里涉及人员的获得和需求估计；人才的开发，即进行教育和训练；人员的分配，主要是各种指派问题；各类人员的合理利用问题；人才的评价，其中有如何测定一个人对组织、社会的贡献；薪资和津贴的确定等六个方面。

（7）设备维修、更新和可靠度、项目选择和评价。涉及电力系统的可靠度分析、核能电厂的可靠度以及风险评估等。

（8）工程最优化设计。在土木、建筑、水利、信息、电子、电机、光学、机械、环境和化工等领域皆有作业研究的应用。

（9）计算器和讯息系统。可将作业研究应用于计算机的主存储器配置，研究等候理论在不同排队规则对磁盘、磁鼓和光盘工作性能的影响。有人利用整数规划寻找满足一组需求档案的寻找次序，利用图论、数学规划等方法研究计算器和讯息系统的自动设计。

（10）城市管理。包括各种紧急服务救难系统的设计和运用，如消防队救火站、救护车、警车等分布点的设立。美国曾用等候理论方法来确定纽约市紧急电话站的值班人数。加拿大亦曾研究一城市警车的配置和负责范围，事故发生后警车应走的路线等。此外，诸如城市垃圾的清扫、搬运和处理；城市供水和污水处理系统的规划，等等。

1 线性规划与单纯形法

数学规划的研究对象是计划管理工作中有关安排和估值的问题，解决的主要问题是在给定条件下，按某一衡量指标来寻找安排的最优方案。数学规划可以表示成求函数在满足约束条件下的极大极小值问题。线性规划是运筹学中应用最广泛的方法之一，也是运筹学的最基本的方法之一，网络规划、整数规划、目标规划和多目标规划都是以线性规划为基础的。线性规划是解决稀缺资源最优分配的有效方法，使付出的费用最小或获得的收益最大。线性规划是运筹学的一个基本分支，其应用极其广泛，其作用已为越来越多的人所重视。从线性规划诞生至今的几十年中，随着计算机的逐渐普及，它越来越急速地渗透于工农业生产、商业活动、军事行动和科学研究的各个方面，为社会节省的财富、创造的价值无法估量。最近十多年来，线性规划无论在深度还是在广度上都取得了重大进展。本章先通过例子归纳线性规划数学模型的一般形式，然后着重介绍有关线性规划的一些基本概念、基本理论及求解线性规划问题的若干方法。

1.1 线性规划模型

线性规划（linear programming，LP）问题研究的是在一组线性约束条件下一个线性函数的最优问题。

1.1.1 线性规划问题举例

例 1.1 某工厂用 3 种原料 P_1,P_2,P_3 生产 3 种产品 Q_1,Q_2,Q_3。已知单位产品所需原料数量如表 1.1 所示，试制订出利润最大的生产计划。

表 1.1

单位产品所需原料数量（kg） 产品 / 原料	Q_1	Q_2	Q_3	原料可用量（kg）
P_1	2	3	0	1 500
P_2	0	2	4	800
P_3	3	2	5	2 000
单位产品的利润（千元）	3	5	4	

分析 设产品Q_j的产量为x_j个单位，$j=1,2,3$，它们受到一些条件的限制。首先，它们不能取负值，即必须有$x_j \geqslant 0, j=1,2,3$。

根据题设，三种原料的消耗量分别不能超过它们的可用量，即它们又必须满足：

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \leqslant 1\ 500 \\ 2x_2+4x_3 \leqslant 800 \\ 3x_1+2x_2+5x_3 \leqslant 2\ 000 \end{cases}$$

我们希望在以上约束条件下，求出x_1,x_2,x_3，使总利润$z=3x_1+5x_2+4x_3$达到最大，故求解该问题的数学模型为

$$\max \quad z=3x_1+5x_2+4x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1+3x_2 \leqslant 1\ 500 \\ 2x_2+4x_3 \leqslant 800 \\ 3x_1+2x_2+5x_3 \leqslant 2\ 000 \\ x_j \geqslant 0, j=1,2,3 \end{cases}$$

1.1.2 线性规划模型

以上例子具有这样的特征：

（1）问题中要求有一组变量（决策变量），这组变量的一组定值就代表一个问题中的具体方案；

（2）存在一定的限制条件（约束条件），这些限制条件可以用一组线性等式或不等式来表示；

（3）有一个目标要求（目标函数），可以表示为决策变量的线性函数，并且要求这个目标函数达到最优（最大或最小）。

将这三个条件归结在一起，就得到线性规划问题。线性规划问题的标准形式是具有如下形式的问题

$$\min \ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

如果令$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$a_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$，$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则上述标准线性规划问题可以用矩阵形式表示为

$$\min \ cx$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax=b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

或

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = b \\ x_j \geqslant 0 \ (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

除了线性规划问题的标准形式之外，还有其他形式的线性规划问题，但这些问题都可以通过一些简单代换化为标准线性规划问题。

（1）极大化问题。

对于目标函数为极大化问题，如 $\max z=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$，可以等价地化为极小化问题，因为 $\max \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j = -\left(\min\left(-\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j\right)\right)$。

（2）不等式约束问题。

对于形如 $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n \leqslant b_j$ 的不等式约束，可以通过引入“松弛变量 r_j”化为等式约束 $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n+r_j=b_j$（其中 $r_j \geqslant 0$）；而对于形如 $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n \geqslant b_j$ 的不等式约束，可以通过引入“剩余变量 s_j”化为等式约束 $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n-s_j=b_j$（其中 $s_j \geqslant 0$）。

（3）决策变量无非负约束条件问题。

对于变量 x_j 无非负约束条件问题，可以定义 $x_j = x_j^{(1)} - x_j^{(2)}, x_j^{(1)} \geqslant 0, x_j^{(2)} \geqslant 0$，从而将无非负约束化为非负约束。因此，本章主要讨论标准形式的线性规划问题（1.1）的性质和求解方法。

1.2 线性规划问题的可行域及最优性条件

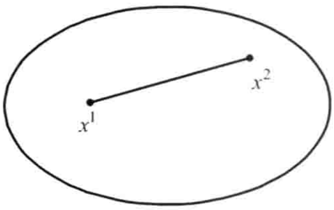
1.2.1 线性规划问题的可行域

1. 凸组合与凸集

定义 1.1 设 $S \subset \mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间中的一个点集，$x \in S$，$y \in S$，$\lambda \in [0,1]$，称 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ 为 x 和 y 的凸组合。

定义 1.2 设 $S \subset \mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间中的一个点集，若对任何 $x \in S, y \in S$ 与任何 $\lambda \in [0,1]$，都有 $\lambda x+(1-\lambda)y \in S$，就称 S 是一个凸集。

凸集与非凸集如图 1.1 所示。



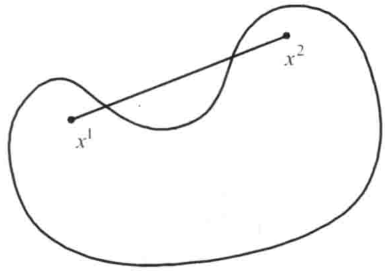


图 1.1　凸集与非凸集

2. 线性规划问题的可行域与凸集

对于标准线性规划问题（1.1），令 $D=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid Ax=b, x\geqslant 0\}$ 表示它的可行域。

定理 1.1　线性规划问题（1.1）的可行域 $D=\{x\in\mathbf{R}^n \mid Ax=b, x\geqslant 0\}$ 是凸集。

定义 1.3　给定 $b\in\mathbf{R}^1$ 及非零向量 $a\in\mathbf{R}^n$，称集合

$$H=\{x\in\mathbf{R}^n \mid a^{\mathrm{T}}x=b\}$$

是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个超平面。

定理 1.2　由超平面 H 产生的两个闭半空间

$$H^+=\{x\in\mathbf{R}^n \mid a^{\mathrm{T}}x\geqslant b\},\quad H^-=\{x\in\mathbf{R}^n \mid a^{\mathrm{T}}x\leqslant b\}$$

都是凸集。

定义 1.4　称集合

$$S=\{x\in\mathbf{R}^n \mid a_i^{\mathrm{T}}x=b_i, i=1,\cdots,p; a_i^{\mathrm{T}}x\geqslant b_i, i=p+1,\cdots,p+q\}$$

为多面凸集。非空有界的多面凸集称为**凸多面体**。

因此，线性规划问题（1.1）的可行域 $D=\{x\in\mathbf{R}^n \mid Ax=b, x\geqslant 0\}$ 是**多面凸集**。

3. 极点和极方向

定义 1.5　设 S 为凸集，$x\in S$。若对任何 $y\in S$，$z\in S$，$y\neq z$，以及任何 $0<\lambda<1$，都有

$$x\neq\lambda y+(1-\lambda)z$$

则称 x 为凸集 S 的一个**极点**。

按定义 1.5，平面上长方形的四个角点就是长方形区域的全部极点。平面图形中每个顶点至少是两条线的交点。一般对标准形式线性规划问题（1.1），当可行区域非空时，可以证明其可行域 D 一定有极点，每个极点至少是 $n-m$ 个超平面的交点。至于多面凸集 D 的极点个数的有限性，下面我们给出了顶点的代数结构后，结论将会更清楚。

定义 1.6　设 $S\subset\mathbf{R}^n$ 为凸集，$d\in\mathbf{R}^n$，$d\neq 0$。若存在 $x\in S$ 以及所有 $\lambda>0$，都有

$$x+\lambda d\in S$$

则称 d 为凸集 S 的一个方向。