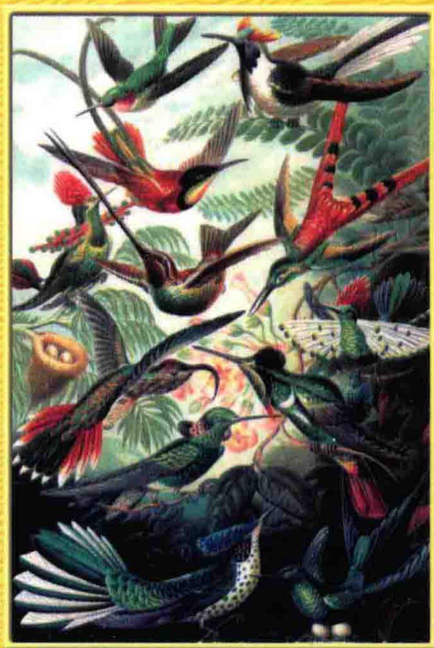
因式分解与圆锥曲线

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）



谢彦麟 编著

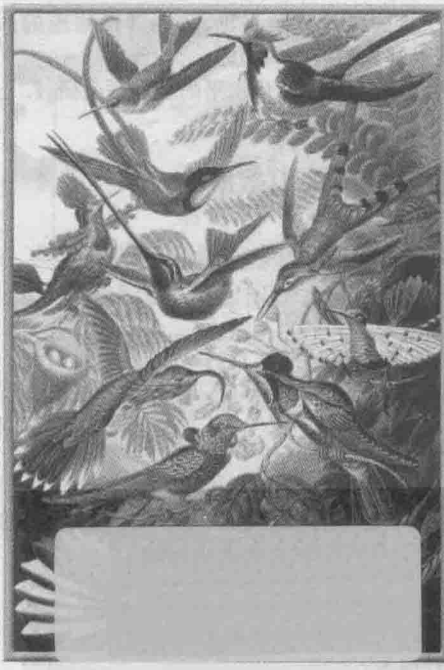
◎ 一元整系数多项式因式分解的一般方法
◎ 一些特殊的不可约判定定理
◎ 多元整系数多项式的因式分解理论
◎ 三种圆锥曲线的共性与个性
◎ 用仿射变换解关于椭圆的问题

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

因式分解与圆锥曲线

谢彦麟 编著



◎一元整系数多项式因式分解的一般方法

◎一些特殊的不可约判定定理

◎多元整系数多项式的因式分解理论

◎三种圆锥曲线的共性与个性

◎用仿射变换解关于椭圆的问题

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细地介绍了因式分解与圆锥曲线有关的知识. 全书共分四章，分别为：一元整系数多项式因式分解的一般方法，多元整系数多项式的因式分解理论，三种圆锥曲线的共性与个性，用仿射变换解关于椭圆的问题.

本书适合于大专以上文化水平的数学师生研读.

图书在版编目(CIP)数据

因式分解与圆锥曲线／谢彦麟编著. --哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.1

ISBN 978-7-5603-5005-9

Ⅰ.①因… Ⅱ.①谢… Ⅲ.①因子分解 ②圆锥曲线 Ⅳ.①O122.1 ②O123.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 263289 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘家琳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 6　字数 62 千字
版　　次　2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5005-9
定　　价　18.00 元

目录

第1章 一元整系数多项式因式分解的一般方法

众所周知,有理系数多项式的因式分解易转化为整系数多项式的因式分解,又据 Gauss 引理,整系数多项式在有理数域的因式分解必可在整系数多项式范围内进行. 但一般课本除阐述如何求一次因式及 Eisenstein 判定定理(在颇特殊情况判定多项式不可约,是充分条件)外未作更一般的论述.

笔者编译的文[1]介绍了 Kronecker 算法,它可用于分解任何 n 次整系数多项式的因式(或验证不可约,下同). 但属"试验法",计算颇繁琐,拙作[2]又介绍了一般四、五次整系数多项式的因式分解,虽亦为"试验法",但计算过程较 Kronecker 算法为简. 文[1]又介绍几个在特殊情况下判定 n 次整系数多项式不可约的定理,其条件易于检验. 但两文中的上述算法定理都无例题. 本章综合介绍了上述算法定理,补述如何减少试验次数,并举例子说明.

1.1 Kronecker 算法

设 n 次整系数多项式 $f(x)$ 无整系数一次因式，则对任何有理数 $s, f(s)\neq 0, r=\left[\frac{n}{2}\right]$，若 $f(x)$ 可约（在整系数多项式范围内，下同），则它有 r 次整系数多项式因式 $g(x)$. 显然对任何整数 $a, g(a)\mid f(a)$. 任意取定 $r+1$ 个互异整数 $x_0, x_1, \cdots, x_r$，考虑 $f(x_k)(k=0,1,\cdots,r)$. 因 $f(x_k)\neq 0, g(x_k)$ 必是 $f(x_k)$ 的某个因数. 对每个 k，列出 $f(x_k)$ 的所有正、负因数（不仅是素因数），分别取 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_r)$ 的一个因数组成因数列，尽取这样的所有因数列. 对每个这样的因数列 $c_0, c_1, \cdots, c_r$，有且只有一个不高于 r 次的多项式 $g^*(x)$ 适合

$$g^*(x_k)=c_k \quad (k=0,1,\cdots,r)$$

可用 Lagrange 插值多项式算出这个 $g^*(x)$

$$g^*(x)=\sum_{k=0}^{r} c_k\left(\prod_{\substack{0\leq j\leq r\\ j\neq k}}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right) \tag{1}$$

由此求得 $g^*(x)$ 若是 $f(x)$ 的因式，必须它的所有系数为整数（但反之不然）. 当 $g^*(x)$ 所有系数为整数，再检查 $g^*(x)$ 是否能整除 $f(x)$（用竖式除法）. 若能整除，则求出 $f(x)$ 的一个因式 $g^*(x)$；若对上述每个因数列求出的 $g^*(x)$ 都不合上述要求，则 $f(x)$ 不可约——因为 $f(x)$ 的任一因式 $g(x)$ 在 $x_1, \cdots, x_r$ 的值必分别整除 $f(x_1), \cdots, f(x_r)$，从而为上述的一个因数列，而 $g(x)$ 被这因数列所唯一确定.

例 1

$$f(x)=(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+1$$

$$=x^6-3x^5-5x^4+15x^3+4x^2-12x+1$$

这里 $n=6,\left[\frac{n}{2}\right]=3$. 取 $x_k=0,1,-1,2$,则

$$f(0)=1,f(1)=1,f(-1)=1,f(2)=1$$

它们的所有因数都是 $1,-1$,可配成 16 个因数列

$$1,1,1,1$$
$$1,1,1,-1$$
$$1,1,-1,1$$
$$1,1,-1,-1$$
$$1,-1,1,1$$
$$1,-1,1,-1$$
$$1,-1,-1,1$$
$$1,-1,-1,-1$$
$$-1,1,1,1$$
$$-1,1,1,-1$$
$$-1,1,-1,1$$
$$-1,1,-1,-1$$
$$-1,-1,1,1$$
$$-1,-1,1,-1$$
$$-1,-1,-1,1$$
$$-1,-1,-1,-1$$

但第 1,16 列各数分别为相反数,易见按式(1)求得的 $g^*(x)$ 的各对应项系数互为相反数,即两 $g^*(x)$ 有倍数 -1 的关系,实际只需取其中一个因数列即可,同样第 2,15 列;第 3,14 列;第 4,13 列;第 5,12 列;第 6,11 列;第 7,10 列;第 8,9 列亦然. 可以只取第 1,15,3,13,5,11,7,9 列,即只取 $f(2)$ 的正因数 1(只取 $f(0)$,$f(-1)$ 或 $f(2)$ 的正因数亦可),按式(1)求得 8 个

$g^*(x)$（其中 ± 号可任意配搭）

$$g^*(x)=\pm\frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(0-1)(0+1)(0-2)}\pm\frac{x(x+1)(x-2)}{1(1+1)(1-2)}\pm$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{-1(-1-1)(-1-2)}+\frac{x(x-1)(x+1)}{2(2-1)(2+1)}$$

$$=\pm\frac{1}{2}(x^3-2x^2-x^2+2)\pm\frac{1}{-2}(x^3-x^2-2x)\pm$$

$$\frac{1}{-6}(x^3-3x^2+2x)+\frac{1}{6}(x^3-x)$$

第 3,4 项中$\frac{1}{6}$前的符号必须相反（否则合并后，3 次项的系数（最简分数）分母为 3，再与另两个 3 次项合并不能得整系数），即第 3 项括号外只需取 $-\frac{1}{6}$，得

$$g^*(x)=\pm(\frac{1}{2}x^3-x^2-\frac{1}{2}x+1)\pm$$

$$(-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+x)+(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x)$$

$$=1,x^3-x^2-2x+1,-x^3+2x^2+x-1,x^2-x-1$$

第一个 $g^*(x)$ 为常数，不合因式要求. 其余三式分别试除 $f(x)$，余式均不为 0，故 $f(x)$ 不可约.

1.2 任意四次整系数多项式的因式分解

设整系数多项式

$$f(x')=a_0'x'^4+a_1'x'^3+a_2'x'^2+a_3'x'+a_4'$$

则

$$a_0'^3f(x')=(a_0'x')^4+a_1'(a_0'x')^3+a_2'a_0'(a_0'x')^2+$$
$$a_3'a_0'^2(a_0'x')+a_4'a_0'^3$$

令 $x=a_0'x'$ 得

$$a_0'^3 f(x') = x^4 + a_1'x^3 + a_2'a_0'x^2 + a_3'a_0'^2 x + a_4'a_0'^3$$

若能分解最后的整系数多项式

$$x^4 + a_1'x^3 + a_2'a_0'x^2 + a_3'a_0'^2 x + a_4'a_0'^3 = g(x)h(x)$$

则

$$f(x') = \frac{1}{a_0'^3} g(a_0'x')h(a_0'x')$$

即亦已分解 $f(x')$；若 $x^4 + a_1'x^3 + a_2'a_0x^2 + a_3'a_0'^2 x + a_4'a_0'^3$ 不可约，则 $f(x')$ 亦然. 故不妨设整系数多项式

$$f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

若它可约，显然必有(整系数)一次或二次因式；若不能求出一次因式，则有二次因式

$$x^2 + \alpha x + \beta, \beta \mid a_4$$

用 $f(x)$ 除以 $x^2 + \alpha x + \beta$(带余除法)，得商式为

$$x^2 + (a_1 - \alpha)x + (a_2 - \beta - \alpha a_1 + \alpha^2) \tag{2}$$

余式为

$$(a_3 - a_1\beta + 2\alpha\beta - a_2\alpha + \alpha^2 a_1 - \alpha^3)x +$$
$$(a_4 - a_2\beta + \beta^2 + \alpha\beta a_1 - \alpha^2\beta)$$

于是若 $x^2 + \alpha x + \beta$ 为 $f(x)$ 的因式，必须上式中 x 的一次项系数及常数项均为0，即

$$a_3 - a_1\beta + \alpha\beta = -\alpha(\beta - a_2 + \alpha a_1 - \alpha^2) \tag{3}$$

$$a_4 = -\beta(\beta - a_2 + \alpha a_1 - \alpha^2) \tag{4}$$

从而

$$\frac{a_3 - a_1\beta + \alpha\beta}{a_4} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\alpha = \frac{a_3\beta - a_1\beta^2}{a_4 - \beta^2} \tag{5}$$

取 a_4 的所有正、负因数 β，按式(5)求相应的 α. 对其中求得的整数 α，再检验 α,β 是否适合式(4). 若适合

式(4)(从而必适合式(3)),则 $x^2+\alpha x+\beta$ 为 $f(x)$ 的因式;若对所有因数 β,相应的 α 均非整数,或对所有整数组 (α,β),它们都不适合式(4),则 $f(x)$ 不可约.

但实际上不必考虑因数 β 中 $|\beta|>\sqrt{|a_4|}$ 者——因若对这些 β,相应的 $x^2+\alpha x+\beta$ 为 $f(x)$ 的因式,则其对 $f(x)$ 的补因式 $\dfrac{f(x)}{x^2+\alpha x+\beta}$ 必为 $x^2+\alpha' x+\beta'$ 型,由

$$f(x)=(x^2+\alpha x+\beta)(x^2+\alpha' x+\beta')$$

知 $a_4=\beta\beta'$, $|\beta'|=\dfrac{|a_4|}{|\beta|}<\sqrt{|a_4|}$,故已在绝对值不大于 $\sqrt{|a_4|}$ 的 β 中考虑过.

例 2

$$f(x)=x^4-2x^2+5x-6$$

这里

$$a_1=0,a_2=-2,a_3=5,a_4=-6$$

a_4 的所有约数中绝对值不大于 $\sqrt{|a_4|}=\sqrt{6}$ 者为 $\pm1,\pm2$.

取 $\beta=\pm1$,按式(5)求相应 $\alpha=\mp\dfrac{5}{7}$ 非整数.

取 $\beta=2$,求得 $\alpha=-1$,它们适合式(4),于是求得 $f(x)$ 的一因式

$$x^2-x+2$$

用竖式除法得(或按式(2)求另一因式)

$$x^4-2x^2+5x-6=(x^2-x+2)(x^2+x-3)$$

易见两因式不可约.

1.3 任意五次整系数多项式的因式分解

与上节同样不妨设五次整系数多项式

$$f^*(x')=x'^5+a_1'x'^4+a_2'x'^3+a_3'x'^2+a_4'x'+a_5'$$

作变换 $x'=x-\dfrac{1}{5}a_1'$后展开化简,易见可得五次项系数仍为1且无四次项的整系数多项系

$$F(x)=x^5+p_2x^3+p_3x^2+p_4x+p_5$$

若它可约,则必有一次或二次因式,先求它的一次因式,若无一次因式,再设可能的二次因式为

$$x^2+\alpha x+\beta$$

用 $x^2+\alpha x+\beta$ 除 $F(x)$得商式

$$x^3-\alpha x^2+(p_2-\beta+\alpha^2)x+(p_3+2\alpha\beta-p_2\alpha-\alpha^3)$$

余式

$$[p_4+\beta^2-p_2\beta-\alpha^2\beta-\alpha(p_3+2\alpha\beta-p_2\alpha-\alpha^3)]x+$$
$$[p_5-\beta(p_3+2\alpha\beta-p_2\alpha-\alpha^3)]$$

类似检验此余式是否恒等于0,即

$$p_4+\beta^2-p_2\beta-\alpha^2\beta=\alpha(p_3+2\alpha\beta-p_2\alpha-\alpha^3)$$
$$p_5=\beta(p_3+2\alpha\beta-p_2\alpha-\alpha^3) \tag{6}$$

二式相除再去分母得

$$\beta^2\alpha^2+p_5\alpha+(p_2\beta^2-p_4\beta-\beta^3)=0$$

解得

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(-\frac{p_5}{\beta^2}\right)\pm\sqrt{\frac{p_5^2}{\beta^4}+4\left(\frac{p_4}{\beta}+\beta-p_2\right)} \tag{7}$$

取 p_5 的一切正、负因数作为 β 代入上式检验所得 α 是否为整数. 若 α 为整数再检验 α,β 是否适合式(6),当有一组 α,β 适合上述要求时,则求得 $F(x)$ 的因式$x^2+\alpha x+\beta$;否则 $F(x)$不可约.

例3

$$f(x)=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+1$$
$$=x^5-5x^3+4x+1$$

已知五次项系数为 1 且无四次项的整系数多项式. 有

$$p_2=-5, p_3=0, p_4=4, p_5=1$$

p_5 的因数只有 $\beta=\pm1$.

$\beta=1$ 时,按式(7)求得

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1+4(4+1+5)}\right)=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{41}\right)$$

非整数;

$\beta=-1$ 时,求得

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1+4(-4-1+5)}\right)=0,-1$$

是整数,检验知 $\alpha=0,\beta=-1$ 及 $\alpha=-1,\beta=-1$ 均不适合式(6),故 $f(x)$ 不可约.

例 4

$$f(x)=4x^5-8x^3-6x^2+3x+9$$

$$\begin{aligned}8f(x)&=32x^5-64x^3-48x^2+24x+72\\&=x'^5-8x'^3-12x'^2+12x'+72\quad(x'=2x)\end{aligned}$$

考虑此五次项系数为 1 且无四次项的整系数多项式

$$p_2=-8, p_3=-12, p_4=12, p_5=72$$

取 β 为 72 的所有因数

$$\begin{aligned}\beta=&\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm9,\\&\pm12,\pm18,\pm24,\pm36,\pm72\end{aligned}$$

先逐一对这些 β 检查式(7)中被开方式

$$\frac{p_5^2}{\beta^4}+4\left(\frac{p_4}{\beta}+\beta-p_2\right)$$

是否为完全平方数(整数的平方),若是则求相应的(两个)α 是否为整数,再检查 α,β 是否适合式(6):

$\beta=\pm1$ 时,得

$$72^2+4(\pm12\pm1+8)=\begin{cases}72^2+84\\72^2-20\end{cases}$$

72^2+84 的个位数字为 8，$72^2-20=5\ 164$，均非完全平方数；

$\beta=\pm 2$ 时，得

$$18^2+4(\pm 6\pm 2+8)=\begin{cases}18^2+64\\18^2\end{cases}$$

18^2+64（个位数字是 8）不是完全平方数；$\beta=-2$ 时，得出 18^2 是完全平方数，这时

$$\alpha=\frac{1}{2}(-18\pm 18)=0,-18$$

经检验，$\beta=-2,\alpha=0$ 及 $\beta=-2,\alpha=-18$ 均不适合式(6)；

$\beta=\pm 4$ 时，得

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2+4(\pm 3\pm 4+8)$$

均非整数；

$\beta=\pm 6$ 时，得

$$4+4(\pm 2\pm 6+8)=\begin{cases}68\\4\end{cases}$$

$\beta=6$ 时，所得 68 非完全平方数；$\beta=-6$ 时，所得 4 是完全平方数，这时

$$\alpha=\frac{1}{2}(-2\pm\sqrt{4})=\begin{cases}0\\-2\end{cases}$$

经检验 $\beta=-6,\alpha=0$ 适合式(6). 于是再求得

$$\begin{aligned}8f(x)&=x'^5-8x'^3-12x'^2+12x'+72\\&=(x'^2-6)(x'^3-2x'-12)\\&=(4x^2-6)(8x^3-4x-12)\end{aligned}$$

从而得

$$f(x)=(2x^2-3)(2x^3-x-3)$$

显然两因式不可约，不能再分解.

1.4 一些特殊的不可约判定定理

现转述文[1]的这些定理(证略,请参看文[1]).

定理1(Perron) 设整系数多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,a_n\neq 0$$

a)如果

$$|a_1|>1+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

则$f(x)$不可约(在整系数多项式范围,下同).

b)如果

$$|a_1|\geqslant 1+|a_2|+\cdots+|a_n|,f(\pm 1)\neq 0$$

则$f(x)$不可约.

定理2 设整系数多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x\pm p$$

其中素数

$$p>1+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|$$

则$f(x)$不可约.

定理3 设正整数$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,$n\geqslant 2$,则多项式

$$f(x)=x^n-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-\cdots-a_n$$

不可约.

定理4 设n次整系数多项式$f(x)$,$m=\left[\frac{n+1}{2}\right]$,存在互异整数$a_1,a_2,\cdots,a_m$均非$f(x)$的根,且

$$|f(a_i)|<m!\ 2^{-m}\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

则$f(x)$不可约.

例5

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+1$$

文[1]的原外文版在此定理后举此例认为$f(x)$必是不可约多项式，但无任何说明，但实际上$n=4$时

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1 \\ &= (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1 \\ &= (x^2-5x+5)^2-1^2+1 \\ &= (x^2-5x+5)^2 \end{aligned}$$

可约，且用此定理（尽最大可能）判定$f(x)$不可约性，应取所有a_i，使所有$|f(a_i)|$最小，这唯有取$a_i=i$，$|f(i)|=1$（因i非$f(x)$的根，正整数$|f(a_i)|\geqslant 1$）. 于是要$1<m!\ 2^{-m}$，即$m!>2^m$，易见须$m\geqslant 4$，即$\left[\frac{n+1}{2}\right]\geqslant 4$，$n\geqslant 7$，即用此定理只能判定$n\geqslant 7$时，$f(x)$不可约. 对$n=2,3,5,6$，可用上述诸方法判定：

$n=2,3$时，易见$f(x)$无一次因式，从而不可约.

$n=5$时，令$y=x-3$，则

$$f(x)=(y+2)(y+1)y(y-1)(y-2)+1$$

例3已验证右边为不可约多项式，从而$f(x)$亦然.

$n=6$时，令$y=x-3$，则

$$f(x)=(y+2)(y+1)y(y-1)(y-2)(y-3)+1$$

例1已验证它是不可约多项式.

参考文献

[1] 谢彦麟. 多项式理论研究综述[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.

[2] 谢彦麟. 代数方程的根式解及伽罗瓦理论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.

第2章 多元整系数多项式的因式分解理论

对于多元整系数多项式的因式分解理论,未见有文献论述,只有个别文献如同一元整系数多项式一样举例说明如何对整系数多元多项式先求出对某变元的一次因式以达到分解(不可约)因式的目的,本章系统论述整系数多元多项式的因式分解理论,它完全与一元整系数多项式的因式分解理论类似. 作为应用,证明平面几何中求作希洛(Philo)线在一般情况为(用直尺、圆规)不可能作图题. 此题引自文[1],原文云:"现在还不知道它是怎样用初等几何方法作出的,也就是不知道怎样用尺规两器去作出的一种直线."

2.1 一元整系数多项式因式分解理论的更精确阐述

由于(一元)整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域多项式范围的不可约因式分解可转化为在整系数多项式范围的不可约因式分解(由 Gauss 引理推出),而对后者每个(不可约)因式 $f_k(x)$,又可化为一个整