考研直通车 考研数学系列丛书

高等数学
习题全解与考研辅导

同济·第七版

主编　李汉龙　隋英

国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等数学习题全解与考研辅导

主　编　李汉龙　隋　英
副主编　艾　瑛　刘　丹　杜利明
参　编　韩璐眉　王凤英　闫红梅　王　娜

国防工業出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是根据《高等数学》(同济·第七版上下册)所编写的习题全解及考研辅导，其编排结构与教材同步，具体为：第 1 章函数与极限；第 2 章导数与微分；第 3 章微分中值定理与导数的应用；第 4 章不定积分；第 5 章定积分；第 6 章定积分的应用；第 7 章微分方程；第 8 章向量代数与空间解析几何；第 9 章多元函数微分法及其应用；第 10 章重积分；第 11 章曲线积分与曲面积分；第 12 章无穷级数. 全书总计 12 章内容，每章都包含了以下内容：考研考点提示及大纲基本要求；课后习题及解答；考研真题解析；同步测试题及解答. 全书例题丰富，深入简出，富有启发性与可读性.

本书既可以作为《高等数学》(同济·第七版上下册)的辅导教材，也可以作为考研重要辅助资料，对于大学数学教师来说也是一本不可多得的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解与考研辅导/李汉龙，隋英主编.
—北京：国防工业出版社，2015.5
ISBN 978-7-118-10121-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… ②隋… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 106600 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

※

开本 787×1092 1/16 **印张** 34¼ **字数** 793 千字
2015 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 59.00 元

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前　言

本书是根据《高等数学》(同济・第七版上下册)所编写的习题全解及考研辅导，其编排结构与教材同步，具体为：第 1 章函数与极限；第 2 章导数与微分；第 3 章微分中值定理与导数的应用；第 4 章不定积分；第 5 章定积分；第 6 章定积分的应用；第 7 章微分方程；第 8 章向量代数与空间解析几何；第 9 章多元函数微分法及其应用；第 10 章重积分；第 11 章曲线积分与曲面积分；第 12 章无穷级数. 全书总计 12 章内容，每一章内容都包含以下内容.

(1) 考研考点提示及大纲基本要求：使考生明白考研常考的内容和考试要求，从而在复习时有明确的目标和重点.

(2) 课后习题及解答：对《高等数学》(同济・第七版上下册)课后习题给出全部详细解答.

(3) 考研真题解析：对考研各种题型的解题方法进行归纳总结，注重一题多解，以便开阔考生的解题思路，将所学知识融会贯通，灵活地解决问题. 针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误，每个例题都给出了详细的解题思路分析和解答，并在解答后给出相应的评注，对考试大纲所要求的知识点进行了阐述，同时对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析.

(4) 同步测试题及解答：只有适量的练习才能巩固所学的知识，数学复习离不开做题. 为了使考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，各章在最后一节后都精心设计了相应的同步测试题，并给出了部分解答及答案提示，供考生测试练习.

本书第 1 章、第 2 章由刘丹编写；第 3 章、第 4 章由艾瑛编写；第 5 章、第 6 章由李汉龙编写；第 7 章由杜利明编写；第 8 章由王凤英编写；第 9 章由韩藹眉编写；第 10 章、第 11 章由隋英编写；第 12 章由闫红梅编写. 全书由李汉龙统稿，李汉龙、隋英审稿. 另外，本书的编写和出版得到了国防工业出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢!

本书参考了国内出版的一些教材和高等数学辅导书(见参考文献)，在此表示谢意. 由于水平所限，书中不足之处在所难免，恳请读者、同行和专家批评指正.

编　者

2015 年 1 月

目　录

第 1 章　函数与极限

1.1　考研考点提示及大纲基本要求

1.1.1　考研考点提示

1. 分段函数求极限，已知极限确定原式中的常数.

2. 掌握极限的性质及四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

3. 理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

4. 讨论连续函数在给定区间上零点的个数或确定方程在给定区间上有无实根.

5. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，无穷小阶的比较，会用等价无穷小求极限.

6. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），讨论函数连续性和判断间断点类型.

7. 最大值、最小值在物理、经济等方面实际应用.

1.1.2　考研大纲基本要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

1.2　课后习题及解答

1.2.1　映射与函数

1. 求下列函数的自然定义域：

（1）$y=\sqrt{3x+2}$；（2）$y=\dfrac{1}{1-x^2}$；（3）$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；（4）$\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；（5）$\sin\sqrt{x}$；

(6) $y=\tan(x+1)$；(7) $y=\arcsin(x-3)$；(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) 由 $3x+2\geqslant0$ 得 $x>-\dfrac{2}{3}$. 函数的定义域为$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) 由 $1-x^2\neq0$ 得 $x\neq\pm1$. 函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) 由 $x\neq0$ 且 $1-x^2\geqslant0$ 得函数的定义域 $D=[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) 由 $4-x^2>0$ 得 $|x|<2$. 函数的定义域为$(-2, 2)$.

(5) 由 $x\geqslant0$ 得函数的定义域 $D=[0, +\infty)$.

(6) 由 $x+1\neq\dfrac{\pi}{2}$（$k=0$，±1，±2，…得函数的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1$（$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…，.

(7) 由 $|x-3|\leqslant1$ 得函数的定义域 $D=[2, 4]$.

(8) 由 $3-x\geqslant0$ 且 $x\neq0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, 3)$.

(9) 由 $x+1>0$ 得函数的定义域 $D=(-1, +\infty)$.

(10) 由 $x\neq0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；　　(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x^3\sqrt{x-1}$；(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

解 (1) 不同. 因为定义域不同.

(2) 不同. 因为对应法则不同，$x<0$ 时，$g(x)=-x$.

(3) 相同. 因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同. 因为定义域不同.

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-\dfrac{\pi}{4})$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $\varphi(x)$的图形.（图 1－1）

解 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$，

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi(-2)=0$.

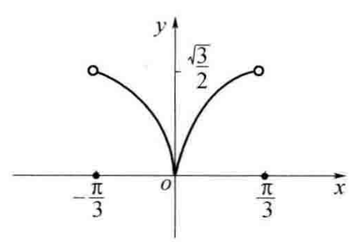

图 1－1

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$，$(-\infty, 1)$；

(2) $y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$.

证明 (1) 对于任意的 x_1，$x_2\in(-\infty, 1)$，有 $1-x_1>0$，$1-x_2>0$. 因为，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$y_1 - y_2 = \frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0,$$

所以，函数 $y=\frac{x}{1-x}$ 在区间$(-\infty,1)$内是单调增加的.

(2) 对于任意的 $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$y_1 - y_2 = (x_1 + \ln x_1) - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + \ln\frac{x_1}{x_2} < 0,$$

所以，函数 $y=x+\ln x$，在区间$(0, +\infty)$内是单调增加的.

5. 设 $f(x)$ 为定义在$(-1, 1)$内的奇函数，若 $f(x)$ 在$(0, 1)$内单调增加，证明 $f(x)$ 在$(-1, 0)$内也单调增加.

证明 对于 $\forall x_1, x_2 \in (-1, 0)$ 且 $x_1 < x_2$，有 $-x_1, -x_2 \in (0, 1)$ 且 $-x_1 > -x_2$.

因为 $f(x)$ 在$(0, 1)$内单调增加且为奇函数，所以有

$$f(-x_2) < f(-x_1), -f(x_2) < -f(x_1), f(x_2) > f(x_1),$$

这就证明了对于 $\forall x_1, x_2 \in (-1,0)$，有 $f(x_1) < f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在$(-1,0)$内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1) 设 $F(x)=f(x)+g(x)$. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数，则

$$F(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = F(x) ,$$

所以 $F(x)$ 为偶函数，即两个偶函数的和是偶函数.

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数，则

$$F(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -F(x),$$

所以 $F(x)$ 为奇函数，即两个奇函数的和是奇函数.

(2) 设 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数，则

$$F(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot g(x) = F(x) ,$$

所以 $F(x)$ 为偶函数，即两个偶函数的积是偶函数.

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数，则

$$F(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = [-f(x)]\cdot[-g(x)] = F(x),$$

所以 $F(x)$ 为偶函数，即两个奇函数的积是偶函数.

如果 $f(x)$ 是偶函数，而 $g(x)$ 是奇函数，则

$$F(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)\cdot g(x) = -F(x),$$

所以 $F(x)$ 为奇函数，即偶函数与奇函数的积是奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$； (2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$； (4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$； (6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1) 因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数.

(2) 由 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3 f(-x)$可见，$f(x)$既非奇函数又非偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数.

(4) 因为 $f(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数.

(5) 由 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=\sin x-\cos x+1$ 可见 $f(x)$既非奇函数又非偶函数.

(6) 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin\pi x$；　　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

解 (1) 是周期函数，周期为 $l=2\pi$；

(2) 是周期函数，周期为 $l=\dfrac{\pi}{2}$；

(3) 是周期函数，周期为 $l=2$；

(4) 不是周期函数；

(5) 是周期函数，周期为 $l=\pi$.

9. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ ad-bc\neq 0$；　　(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；　　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解 (1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$得 $x=y^3-1$，所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$的反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，所以 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$，所以 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$的反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x$ 得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$得 $x=\mathrm{e}^{y-1}-2$，所以 $y=1+\ln(x+2)$的反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，所以 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

10. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 先证必要性. 设函数 $f(x)$在 X 上有界，则存在正数 M，使 $|f(x)|\leqslant M$，即$-M\leqslant f(x)\leqslant M$. 这就证明了 $f(x)$在 X 上有下界$-M$ 和上界M.

再证充分性. 设函数 $f(x)$ 在 X 上有下界 K_1 和上界 K_2, 即 $K_1 \leqslant X \leqslant K_2$. 取 $m=\max\{|K_1|, |K_2|\}$, 则 $-M \leqslant K_1 \leqslant f(x) \leqslant K_2 \leqslant M$, 即 $|f(x)| \leqslant M$, 这就证明了 $f(x)$ 在 X 上有界.

11. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2, u=\sin x, x_1=\dfrac{\pi}{6}, x_2=\dfrac{\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}$;

(2) $y=\sin u, u=2x, x_1=\dfrac{\pi}{8}, x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2, x_1=1, x_2=2$;

(4) $y=e^u, u=x^2$, $x_1=0, x_2=1$;

(5) $y=u^2, u=e^x, x_1=1, x_2=-1$.

解 (1) $y=\sin^2 x$, $y_1=\sin^2\dfrac{\pi}{6}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}, y_2=\sin^2\dfrac{\pi}{3}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x, y_1=\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2}, y_1=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}, y_2=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

(4) $y=e^{x^2}$ $y_1=e^{0^2}=1, y_2=e^{1^2}=e$.

(5) $y=e^{2x}$, $y_1=e^2, y_2=e^{-2}$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)(a>0)$; (4) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$.

解 (1) 由 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ 得 $|x| \leqslant 1$, 所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

(2) 由 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ 得 $2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, 所以函数 $f(\sin x)$ 的定义域为

$$[2n\pi, (2n+1)\pi]\ (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

(3) 由 $0 \leqslant x+a \leqslant 1$ 得 $-a \leqslant x \leqslant 1-a$, 所以函数 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a, 1-a]$.

(4) 由 $0 \leqslant x+a \leqslant 1$ 且 $0 \leqslant x-a \leqslant 1$ 得: 当 $0<a \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时, $a \leqslant x \leqslant 1-a$; 当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时, 无解. 因此当 $0<a \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时, 函数的定义域为 $[a, 1-a]$; 当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时, 函数无意义.

13. 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -1, & |x|>1 \end{cases}$, $g(x)=e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形(图 1-2).

解 $f[g(x)]=\begin{cases} 1, & |e^x|<1 \\ 0, & |e^x|=1 \\ -1, & |e^x|>1 \end{cases}$, 即 $f[g(x)]=\begin{cases} 1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x>0 \end{cases}$.

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e^1, & |x|<1 \\ e^0, & |x|=1 \\ e^{-1}, & |x|>1 \end{cases}$, 即 $g[f(x)]=\begin{cases} e, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1 \\ e^{-1}, & |x|>1 \end{cases}$.

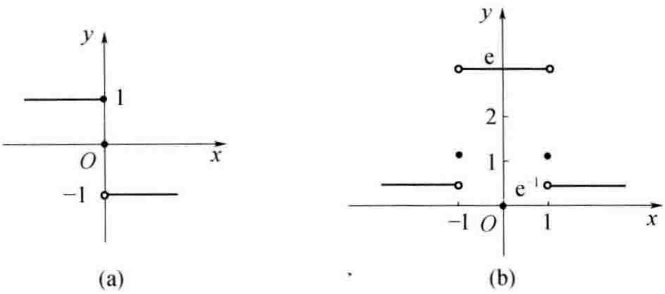

图 1－2

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40^\circ$(图 1－3). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

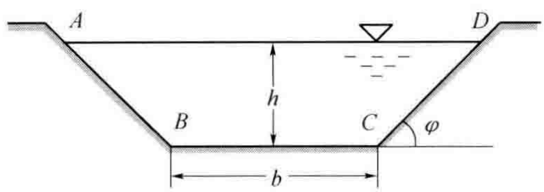

图 1－3

解

$AB=DC=\dfrac{h}{\sin 40^\circ}$，又从 $\dfrac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40^\circ\cdot h)]=S_0$，得 $BC=\dfrac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h$，所以，$L=\dfrac{S_0}{h}+\dfrac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h$，自变量 h 的取值范围应由不等式组

$$h>0,\frac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h>0$$

确定，定义域为 $0<h<\sqrt{S_0\cot 40^\circ}$.

15. 每台收音机售价为 90 元，成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 函数；

(2) 将厂方所获的利润 p 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少？

解 (1) $0\leqslant x\leqslant 100$ 时，$p=90$.

令 $0.01(x_0-100)=90-75$，得 $x_0=1600$. 因此当 $x\geqslant 1600$ 时，$p=75$.

当 $100<x<1600$ 时，有

$$p=90-(x-100)\times 0.01=91-0.01x.$$

综合上述结果，得

$$p=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 91-0.01x, & 100<x<1600.\\ 75, & x\geqslant 1600\end{cases}$$