

理论力学学习指导

苏文芳 主编



华中师范大学出版社

理论力学学习指导

苏文芳 主编

苏文芳 刘启贤 刘传庠 编

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书是为帮助读者进一步理解和掌握理论力学的基本概念、理论及方法,加强分析和解决问题的能力而编写的,是教材和课堂教学的重要补充及配合。全书分质点力学、质点组力学、刚体力学、转动参照系及分析力学计五章。每章包括本章概述、学习指导、解题方法、典型示例及习题解答五个部分。分别对基本概念、理论及方法作进一步阐述,对 48 道题作了习题课式的分析、解算和讨论,对 190 道题给出分析和主要解算步骤。

本书可作为高等师范院校物理专业全日制及函授学生、夜大学生、成人教育对象的学习指导书,也可供中学物理教师参考。

鄂新登字 11 号

理论力学学习指导

苏文芳 主编

苏文芳 刘启贤 刘传庠 编

*

华中师范大学出版社出版发行

(武昌桂子山)

新华书店湖北发行所经销

华中师范大学桂子山印刷厂印刷

*

开本 787×1092 印张 12 字数 292 千字

1992 年 11 月第 1 版 1992 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 7-5622-0920-0/O·90

印数 2000 定价 6.85 元

前 言

理论物理从最普遍的角度提出问题和处理问题,得出普遍的结果——普遍规律,形成严密的概念体系、方法体系和理论体系。因此,理论物理与普通物理之间有着巨大的差别。长期以来,如何帮助学生在普通物理的基础上顺利地进入理论物理的学习及学好理论物理,是理论物理教学中的一个重要课题,尤其是理论力学教学中的重大课题。因为,理论力学是学生将要进入的第一座理论物理殿堂。30余年的教学工作使我们越来越深地体会到,理论力学教学中在思维方法、理论方法方面进行的训练,对学生学好后续的三门理论物理课程,担负着启蒙和奠基的重任。

“理论力学解题难”是全国的理论力学教师长期面对的一个问题。每位教师都作了不懈的努力来解决这一问题,并已不断取得进展。采取的措施是多方面的。在课堂上帮助学生深刻、准确、灵活地理解和掌握基本概念、基本理论及方法,并在运用它们分析和解决具体问题上作出示范,在运用过程中又反复地加深对概念、理论和方法的理解,已被证明是行之有效的重要措施。

然而,课堂教学内容繁重,课时有限。因此,编写一份学习指导书,在课堂之外去进一步作好上述工作,显然是必要的和重要的。这一点在函授教学中特别明显,并已在我们多年的实践中得到证明。

以上便是编写本书的动机和指导思想。

为了同时适合物理系全日制学生和函授学员使用,本书在内容和体系上同时针对了目前较流行的周衍柏编的《理论力学教程》第二版,以及由华中师范大学等10院校编写的高等学校

函授试用教材《理论力学》。

在内容上,每章均分为五个部分。在“本章概述”、“学习指导”、“解题方法”三部分中,结合上述两本教材的主要内容、重点难点,从教材内容的思想、方法及它们的特点、各部分内容的联系等方面作进一步的阐述,对各种问题的解题方法提出一般性的指导意见及注意事项。这些内容大都是编者的心得体会,可以作为教材和课堂教学的补充,相信能对读者有所帮助。在“典型示例”部分中,精选了各种有代表性的典型题目作示范性的分析和求解,是前三部分内容的体现和贯彻。这部分在作法和要求上都与习题课相同。读者在认真阅读和体会之后,将在理解和掌握教材、加强分析问题和解决问题的能力上有所收获。在“习题解答”部分,除上述两教材的95%以上的习题外,还补充了一批习题。这些题目都经过精选,都是有价值的。这部分的目的是让读者能接触大量的题目,以扩大视野。每个题给出主要解题步骤,余下部分则留给读者以资练习。这部分题目的顺序,除按内容外,又按类型进行安排。在同类型题中,则按由简到繁、由易到难进行安排。全书共纳入题解238个。

本书由苏文芳担任主编,并负责前言和第四、五章的编写及全书的审订、统稿工作,刘启贤负责编写第一、二章,刘传庠负责编写第三章。

在编写过程中,得到华中师范大学成人教育学院领导的大力支持,余汉香同志精心绘制的全部插图,使本书大为增色,谨致以由衷的感谢。

由于编者水平有限,时间紧迫,错漏之处在所难免。若蒙指正,当感激不尽。

编 者

1991年2月于武昌桂子山

目 录

前 言

第一章 质点力学..... (1)

本章概述 (1)

学习指导 (3)

解题方法 (7)

典型示例 (11)

习题解答 (27)

第二章 质点组动力学 (113)

本章概述 (113)

学习指导 (113)

解题方法 (115)

典型示例 (115)

习题解答 (122)

第三章 刚体力学 (157)

本章概述 (157)

学习指导 (158)

解题方法 (178)

典型示例 (181)

习题解答 (188)

第四章 转动参照系 (243)

本章概述 (243)

学习指导 (244)

解题方法 (253)

典型示例 (255)

习题解答 (261)

第五章 分析力学 (272)

本章概述 (272)

学习指导 (273)

解题方法 (306)

典型示例 (309)

习题解答 (335)

第一章 质点力学

本章概述

质点力学由质点运动学和质点动力学两大部分组成。质点运动学是研究质点运动的几何规律,其任务是描述质点的运动规律(运动方程)和确定质点的运动特征量(轨迹、速度和加速度)。质点动力学是研究物体的运动与物体间的相互作用的关系。也就是说它不仅研究物体的运动,而且还要研究产生这种运动的物理原因,即物体的受力情况。本章是经典力学的基础。在内容方面,它为本课程建立了第一批最重要的概念和规律;在方法方面,它要求实现从普通物理力学到理论力学及理论物理的第一个飞跃。因此,它在本课程中占有最重要的地位。

诚然,本章中有些内容确是学员曾不止一次接触过的,有一定程度的重复。但是更应看到,在内容上和方法上,本章的大部分是学员过去未曾接触过的新内容、新方法、新数学工具,必须认真学好。例如,将牛顿第二定律表为微分方程的形式,从而可用它求解各种变力作用下质点的运动规律;再如,质点在有心力场中的运动问题;等等,都是新的内容。由于充分运用了矢量分析和高等数学,理论力学所能处理的问题比普通物理力学要远为广泛和复杂,这正是两者的重要区别之一,也是理论力学的主要特点之一。这一特点,在本章中一开始就已明显地表现出来,学员应尽早地掌握,完成方法上的飞跃,抓住学习理论力学的主动权。

本章学习的基本要求

1. 能够根据质点的已知运动和几何关系,熟练地写出质点的运动学方程;会根据速度和加速的定义推导出它们在几种描述方法中的表达形式;掌握矢量导数特别是单位矢量导数的运算方法。

2. 熟练掌握质点运动学两类问题的求解方法,以及质点的运动方程或运动情况,求质点的轨迹和曲率半径的方法。

3. 在正确分析质点受力及运动情况的基础上,熟练地选择适当的方法和适当的坐标系,列出质点的运动微分方程,并熟练掌握各种常见类型的运动微分方程的求解方法,且能根据初始条件正确地确定积分常数。

4. 正确理解与质点动力学规律有关的基本概念(如动量、动量矩、动能、势能等);准确地掌握质点动力学基本定理的内容,并能熟练地判断质点是否遵从守恒定律;掌握运用质点动力学基本定理解题的方法。

5. 深刻理解质点在有心力场中运动的基本性质(即对力心动量矩守恒和机械能守恒),掌握它的轨道微分方程(比耐公式),并能运用这些理论解决有心力作用下质点运动的实际问题,特别是要掌握在平方反比力作用下质点的轨道和能量问题。

本章的重点内容

1. 用各种坐标系描述质点的运动、表示质点速度分量和加速度分量。

2. 物体受力情况的分析,运动微分方程的建立和求解。

3. 势能的概念,三个基本定理与守恒定律。

其中尤以第2点最为重要,应该通过足够数量的习题来掌握牛顿力学中解质点动力学问题的基本方法,并且进一步加深对牛顿定律及有关概念的理解。

学 习 指 导

质点的运动学方程和轨道方程

质点位置与时间的函数关系式,叫做质点的运动学方程。它描述了质点位置随时间的变化规律。如果已知运动学方程,借助数学工具,就可以掌握质点的运动轨迹、质点在任意时刻的速度和加速度。因此,运动学方程给出了质点运动的全部信息。

运动学方程有以下三种表示方法:

1. 矢量法。它是通过质点的位置矢量与时间的函数关系式来确定质点在任意时刻的位置的。其表达式为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

2. 坐标法。它是通过质点的位置坐标与时间的函数关系式来确定质点在任意时刻的位置的。常用的有笛卡尔坐标系、极坐标系、柱面坐标系和球面坐标系。

(1) 笛卡尔坐标法:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

运动方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

(2) 平面极坐标法:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{r}^0,$$

运动方程为

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \theta = \theta(t). \end{cases}$$

(3) 柱坐标法:(如图 1-1)

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{\rho}^0 + z\mathbf{k},$$

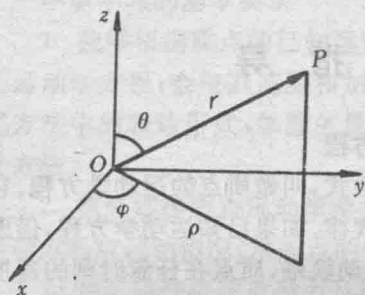


图 1-1

运动方程为

$$\begin{cases} \rho = \rho(t), \\ \varphi = \varphi(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

(4) 球坐标法:

$$r = r r^0,$$

运动方程为

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \varphi = \varphi(t), \\ \theta = \theta(t). \end{cases}$$

3. 自然法。已知质点的运动轨迹, 可以用自然法描述质点的运动。即任意选定轨迹上一点 O 作为弧坐标 s 的原点(如图 1-2), 用弧坐标 s 与时间的函数关系来确定质点任一时刻的位置。

该函数关系称为弧坐标方程。其表达式为

$$s = s(t).$$

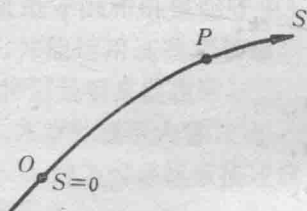


图 1-2

在自然法中, 通常是已知轨道, 因此弧坐标方程即是质点的运动方程。弧坐标 s 是标量, 可正可负, 在规定了弧坐标的正方向后, 则 s 的大小等于

从原点到质点位置的弧长, s 的正负决定于质点在原点的正侧还是负侧。

质点的位矢 r 随时间 t 而变化时, 位矢端点所描绘的曲线(称矢端曲线)便是轨道。运动方程是轨道的参数方程, 若消去参数 t 即得到坐标与坐标之间的关系式, 这就是质点的轨道方程。

质点运动学问题的两种基本类型

所谓质点运动学问题,就是已知描述质点的运动学特征量中的某些量,根据运动学量之间的关系,求得其余的运动学量。这些运动学量包括运动方程、轨道、速度、加速度、与已知位移相关的时间、与已知时间相关的位移等等。根据已知量和未知量的不同,运动学的问题可分为两种最基本的类型。

一种类型是已知质点的运动方程(或虽未直接给出运动方程,但可以通过给出的质点运动情况的分析写出其运动方程),求质点的速度和加速度,这种类型可称为质点运动学正问题。它的解法一般来说比较容易,在数学上基本上是运用求微商的办法解决。

另一种类型是已知质点的速度或者加速度以及必须的初始条件,求质点的运动学方程。这种类型可称为质点运动学逆问题。它的解法一般来说要比正问题复杂,在数学上基本上是用积分或解微分方程的办法解决。

除了上述两种基本类型外,还有已知质点的运动学方程或运动情况,求质点的轨道和曲率半径等,这类问题经常和上述两类问题结合在一起,因此属于综合型的问题。

质点运动微分方程

根据牛顿第二定律,在惯性系内质点运动微分方程为

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F},$$

式中 m 为质点的质量, $\ddot{\mathbf{r}}$ 是质点相对于惯性系的加速度, $\mathbf{F}$ 为作用于质点的一切力的矢量和。该式给出了在惯性系中质点运动所遵循的基本规律。

方程中的 $\mathbf{F}$ 是质点所受一切力的合力。对于自由质点,作用于质点的力通常是事先给出的(即给出各个力作为 $\mathbf{r}$ 、 $\dot{\mathbf{r}}$ 、 t 的函数形式), $\mathbf{F}$ 就是这些力的矢量和;对于非自由质点(质点运动被限制在某个曲面或曲线上),作用于质点上的力除了给定的主

动力以外,还有约束物给予质点的约束反力。则运动微分方程中的 F 应是所有主动力和约束反力的矢量和。

应该注意的是,约束反力的大小和方向通常是未知的,它由约束状况、主动力和质点的运动状态等多种因素决定。如果约束曲面(或曲线)是光滑的,则约束反力沿着约束曲面(或曲线)的法线方向;如果约束曲面(或曲线)是粗糙的,则约束反力除了有沿着法线方向的分量外,还有沿着约束曲面(或曲线)的切向分量(即摩擦力)。质点所受的约束反力只有通过联立求解运动微分方程及约束方程后,才能得到。

上述运动微分方程是矢量方程。在具体讨论问题时,通常根据运动特点选择合适的坐标系,写出矢量方程在该坐标系中的投影式(分量式),然后再解标量形式的微分方程组。

质点动力学的两类问题

运用质点运动微分方程求解质点动力学问题一般分为两大类。

第一类问题:已知运动规律 $r=r(t)$,求力。这和质点运动学中的第一类正问题是对应的,基本的运算方法是将 r 对时间 t 求二阶微商,求出质点的加速度后再乘以质量 m 即得力。

第二类问题:已知力 F ,或已知主动力及约束状况,求运动规律。力通常是位矢 r 、速度 $\dot{r}$ 、时间 t 的函数,所以动力学方程通常是二阶的常微分方程:

$$m\ddot{r} = F(r, \dot{r}, t).$$

对于自由质点,通过对上述方程的三个分量方程的积分,并用初始条件 ($r|_{t=0} = r_0, \dot{r}|_{t=0} = v_0$) 确定六个积分常数,即可求得质点的运动规律;对于非自由质点,由于约束反力通常是未知的,故除上述方程所分解的三个分量方程以外,还应加入约束方程与之联立求解。

对于力函数较为简单的情况,如力只是 r 的函数,或只是 $\dot{r}$

的函数,或只是 t 的函数,则类似质点运动学中的第二类逆问题,可以运用普通的积分方法求出运动规律。

解 题 方 法

质点运动学问题解题要点

1. 质点的运动学方程包含了质点运动学方面的全部信息。因此在解决质点运动学的各类问题中,一般都从首先建立质点的运动方程入手,它经常是解决问题的关键。为了正确的建立质点的运动方程,必须深刻理解和分析已知条件,努力寻找质点在运动过程中的运动学关系和几何关系,这两种关系明确了,建立运动学方程就会迎刃而解。

2. 解决质点运动学问题,必须有明确选定的参照系和坐标系。不同的坐标系,得出的运动学量的数学表达式一般是不同的,但各种形式之间应是等效的。选择何种参照系和坐标系,在运动学问题中是任意的。如果选择恰当,能够简化运算过程。

3. 质点的轨道方程一般是通过运动学方程求得。将运动方程中的时间参量消去后即可获得轨道方程。但在某些情况下不通过运动学方程而是直接通过轨道微分方程得到(参见本章典型示例的例 1.2)。对于求轨道的曲率半径的问题,若轨道是平面曲线,一般是先由运动方程求轨道方程 $y = y(x)$,然后再运用曲率公式 $\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ 求得 ρ 。若轨道是空间曲线,用上述方法较繁,通常是运用自然法中的加速度公式求解。即先求出质点的速度 v 和加速度 a ,然后通过对速率 v 求微商求得切向加速度 $a_t = \frac{dv}{dt}$,进而求得法向加速度 $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$,最后通过公式 $\rho = \frac{v^2}{a_n}$ 求得曲率半径 ρ 。

4. 与普通物理力学不同,理论力学解题时,不仅应用代数

方程把已知量和未知量联系起来直接求解,而且还常常先将这些代数方程两边微分或求导数,从而建立起这些量的微分或导数的关系式,然后再通过微积分运算去求得某些未知量。初学者常常不习惯这种方法,甚至根本没有想到,以致对某些问题不知所措(参见本章典型示例的例 1.3)。

5. 解质点运动学问题的一般步骤:

第一步,理解题意,分析条件,弄清问题。

第二步,选好参照系和坐标系。如轨道未知或轨道为直线时,常选用直角坐标系;如果轨道为已知曲线,常选用自然坐标系;如果轨道为平面圆锥曲线类型,常选用平面极坐标系。

第三步,根据不同的已知和未知条件,决定解题过程,建立未知量与已知量间的运动学关系和数学(几何、三角)关系,进行适当的微分或积分运算。

第四步,用已知初始条件和边界条件,确定积分常数,必要时适当讨论计算结果。

质点动力学问题解题要点

1. 如前所述,已知力,求运动规律,是质点动力学的第二类问题。这类问题非常广泛。可以说从建立质点运动微分方程,进而解出运动规律 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$,然后再找到某些具体的答案,乃是解决质点动力学问题的基本方法和基本途径。

有不少问题所要求取的并非是运动规律,且所求的未知量初看起来似乎与运动规律无关,以致使我们很难判定是否属于质点动力学第二类问题,是否可以通过运动微分方程求得所需的答案。为此我们必须充分理解运动规律 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 在解题中的多种功能。现分述如下:

(1) $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 已知,可以求得轨道。这只要把运动方程中的时间 t 消去即可。

(2) $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 已知,可以求得速度。若求速度与时间的关系,

可对 $r = r(t)$ 求导数即得 $v = v(t)$;若求速度与位矢的关系,可在求出 $v = v(t)$ 后再与 $r = r(t)$ 联立,消去 t 后即得 $v = v(r)$ 。

(3) $r = r(t)$ 已知,可以求得轨道曲率半径。方法是先求出 $v = v(t)$ 、 $a = a(t)$,进而根据 $a_r = \frac{dv}{dt}$ 、 $a_n = \sqrt{a^2 - a_r^2}$ 、 $\rho = \frac{v^2}{a_n}$ 求得 $\rho = \rho(t)$ 。若再与 $r = r(t)$ 联立消去 (t) 还可求得 $\rho = \rho(r)$ 。

(4) $r = r(t)$ 已知,若运动是周期性的,可以求得周期 τ ,这可以根据 τ 的定义(满足 $r(t) = r(t + \tau)$)立即求出。

总之,不管问题如何变化,只要题目所要求的未知量与运动规律 $r = r(t)$ 有这样那样的内在联系,原则上我们总可以通过 $r = r(t)$ 解得问题的最后答案。由于运动规律 $r = r(t)$ 需从运动微分方程求解,所以,这类问题仍属于质点动力学第二类问题。

2. 坐标系的选择与质点受力情况及运动特征有关。虽然运用质点运动微分方程解题时我们必须选择惯性参照系,但在某一适宜的惯性参照系上选择何种坐标系却是任意的。选择得好,可使计算方便。对于自由质点的运动常用直角坐标系;对于质点绕一固定中心的运动,其径向、横向运动很容易分解,用平面极坐标系较为方便;对于质点在已知曲线上的运动,用自然法较为方便。

3. 运用质点运动微分方程解题的步骤,概括起来可以分为三大步,即列方程、解方程、讨论结果。

列方程是全过程的基础和关键,也是把物理问题抽象为数学问题的过程,这往往是初学者感到困难的一步。列方程又可具体分为如下三个步骤进行。

(1)分析问题,确定研究对象,选择适当的惯性参照系及建立在该参照系上的适宜的坐标系。

(2)分析质点在任意瞬时(不能是某一特殊瞬时)的受力情况(包括主动力和约束反力),画出质点在任意位置的受力图。方

向未知的约束反力,可以按假设方向画出(滑动摩擦除外,它的方向必与相对运动的方向相反)。列出对任意瞬时都成立的质点运动微分方程矢量式。进而写出在选定坐标系下的投影式。这里不仅加速度应当进行投影,而且显示在作用力中的位矢和速度也都应进行投影。

(3)如果存在约束,则除了运动微分方程之外,还应列出约束方程,使独立方程数(质点运动微分方程的分量方程数与约束方程数的总和)与未知量的数目(未知的坐标函数与未知的约束反力数目的总和)相等。

4. 运用质点动力学三个基本定理解题时应当注意两点:首先,三个基本定理均系由牛顿动力学方程推演而来,因此三个基本定理及其守恒律只适用惯性参照系,有关的物理量(如动量、动量矩、动能等)也必须是相对于惯性参照系的;其次,虽然三个定理共有七个标量方程,但独立的方程只有三个。应用时应当根据具体问题作出分析。单独用动量定理,就可以列出三个彼此独立的方程,而单独用动量矩定理却只能给出两个彼此独立的方程,动能定理则只有一个方程。在应用三个定理解题时,可以根据题意选用某一定理,也可以用三个定理中的某些方程作适当的组合,有时这种混合选用的方法能使解题更为简便。

运用基本定理解题的步骤与运用质点运动微分方程解题的步骤基本相同。在选用三个基本定理时,通常可以作这样的考虑:在讨论速度与时间关系时常采用动量定理;当质点围绕某点或某轴线作曲线运动时常采用动量矩定理;当讨论质点速度与坐标的关系时常采用动能定理。当然,对具体问题还要作具体分析,灵活运用。

由于守恒定律在解题中具有明显的优点,所以要善于判别质点运动是否遵从守恒定律。一旦某一守恒律是成立的,一般都要加以利用,尤其是能量守恒律,通常对于解题是十分有利的。