普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

黄　荣　朱　砾　周光明　谢清明　编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

黄　荣　朱　砾　周光明　谢清明　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写. 全书共五章,内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、相似矩阵与二次型. 每章均配有本章概要与典型例题分析及习题,书后配有习题答案.

本书可作为高等院校非数学专业本科生教材或教学参考书,也可作为相关专业人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 黄荣等编. —北京: 科学出版社, 2015

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-044352-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①黄… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 107496 号

责任编辑: 石 悦 / 责任校对: 朱光兰

责任印制: 赵 博 / 封面设计: 华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

文林印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 6 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2015 年 6 月第一次印刷 印张: 12

字数: 242000

定价: 24.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

线性代数作为现代数学的重要分支，是理工类和经济管理类等相关专业的一门主要的基础课程，它不仅是学习其他课程的基础，也是自然科学与社会科学各个领域应用广泛的数学工具.它对培养学生的逻辑思维、分析和解决问题的能力，提高创新意识起着重要的作用.

本书根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲(2014年版)》的要求，并结合我们多年从事线性代数教学的经验与体会编写而成.我们对教材的内容选择、体系安排等作了仔细的考虑，力求做到知识引入自然、内容由浅入深、符号使用规范、文字通俗易懂；对例题和习题的选择作了合理的配置.为便于读者更好地掌握重点与难点，每章均配有本章概要与典型例题分析.

本书共五章，主要内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、相似矩阵与二次型.本书可作为高等院校理工类与经济管理类各专业线性代数课程教材，根据各专业的不同要求，完成本书所需课时为32～48课时.

在编写过程中，我们参考了许多的国内外教材，湘潭大学数学与计算科学学院、湘潭大学教务处给予了很多帮助，并得到了科学出版社的大力支持，在此深表感谢！

限于编者的学识水平和经验，书中难免存在不妥之处，恳请同行和读者指正.

编　者

2015年3月

目　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数的一个基本工具，产生于求解线性方程组，在许多的领域中都有广泛的应用，在本课程的后续学习中也很重要. 本章介绍行列式的定义、性质、计算方法以及在求解线性方程组中的应用.

第一节　全排列及其逆序数

把 n 个不同元素按某种次序排成一列，称为 n 个元素的**全排列**. n 个元素的全排列的总个数，一般用 P_n 表示，且

$$P_n = n!.$$

对于 n 个不同元素，先规定各元素间有一个标准次序(如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说它们构成了一个**逆序**.

定义 1.1　一个排列中所有逆序的总和，称为该排列的**逆序数**. 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如，对排列 32514 而言，4 与 5 就构成一个逆序，1 与 3、2、5 也分别构成一个逆序，2 与 3 也构成一个逆序，所以，$\tau(32514) = 5$.

按标准次序排成的全排列称为标准排列(自然排列)，其逆序数为 0.

逆序数的计算法：不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，自右至左，先计算排在最后一位数字 i_n 的逆序数，它等于排在 i_n 前面且比 i_n 大的数字的个数，再类似计算 $i_{n-1}, \cdots, i_2$ 的逆序数，然后把所有数字的逆序数加起来，就是该排列的逆序数.

逆序数的计算方法有多种，请读者自行总结.

例 1　求下列全排列的逆序数.

(1) 134782695；　　　　(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解　(1) $\tau[134782695] = 4+0+2+4+0+0+0+0 = 10$；

(2) 从排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$ 看，前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 之间没有逆序，后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 之间也没有逆序，只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成

逆序.

$2n$ 最大且排在最后,逆序数为 0;

$2n-2$ 的前面有 $2n-1$ 比它大,故逆序数为 1;

$2n-4$ 的前面有 $2n-1$,$2n-3$ 比它大,故逆序数为 2;

……

2 前面有 $n-1$ 个数比它大,故逆序数为 $n-1$,因此有

$$\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)]=0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

读者也可选择按数字从小到大分别求逆序的方法求逆序数,如排列 134782695 中,1 最小,排 1 前面的数为 0 个,然后划掉 1,则 2 变最小,排 2 前面的数为 4 个(1 已划去),然后划掉 2,则 3 变最小,排 3 前面的数为 0 个,依此类推,排 4 前面的数为 0 个,排 5 前面的数为 4 个,排 6 前面的数为 2 个,排 7 前面的数为 0 个,排 8 前面的数为 0 个,排 9 前面的数为 0 个,则 $\tau[134782695]=0+4+0+0+4+2+0+0+0=10$.

定义 1.2　逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

在排列中,将任意两个元素的位置对调,其余元素位置保持不动,这样得出新排列的方法称为**对换**.若是将相邻位置的两个元素对换,叫做**相邻对换**.

定理 1.1　一个排列中的任意两个元素位置对换,排列改变奇偶性.

证　先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_mabb_1b_2\cdots b_n$,对换 a 与 b,变为 $a_1a_2\cdots a_mbab_1b_2\cdots b_n$,显然排列中除 a、b 两数的次序改变外,其他任意两数之间及任意一个数与 a 或 b 之间的次序都没有变.当 $a>b$ 时,经对换后,逆序数减少 1;当 $a<b$ 时,经对换后,逆序数增加 1.所以,新排列与原排列的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_mab_1b_2\cdots b_nbc_1c_2\cdots c_p$,对换 a 与 b,变为 $a_1a_2\cdots a_mbb_1b_2\cdots b_nac_1c_2\cdots c_p$.它等同于先将原排列作 n 次相邻对换变成 $a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_nabc_1c_2\cdots c_p$,再作 $n+1$ 次相邻对换变成 $a_1a_2\cdots a_mbb_1b_2\cdots b_nac_1c_2\cdots c_p$.因此总共经过 $2n+1$ 次相邻对换后,排列 $a_1a_2\cdots a_mab_1b_2\cdots b_nbc_1c_2\cdots c_p$ 变为 $a_1a_2\cdots a_mbb_1b_2\cdots b_nac_1c_2\cdots c_p$,所以这两个排列的奇偶性不同.

推论 1　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

推论 2　在 n 个元素的全排列中,奇排列与偶排列的个数相等.

第二节 n 阶行列式的定义

一、二元线性方程组与二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

使用加减消元法，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

式(1.2)中的分子、分母都是四个数分两队相乘再相减而得，其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1.1)的四个系数确定的. 为方便记忆，把这四个数按它们在方程组(1.1)中的位置，排成两行两列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}, \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的**二阶行列式**，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

数 a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的**元素**，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列.

二阶行列式共有 2! 项，为所有不同行不同列的元素乘积的代数和.

上述二阶行列式的定义可用对角线法则记忆. 如图 1.1 所示，即实线连接的两个元素(主对角线)的乘积减去虚线连接的两个元素(次对角线)的乘积.

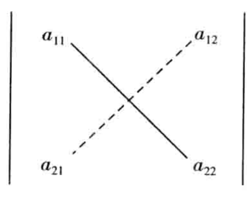

图 1.1

例 1　求行列式$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\times1-(-2)\times2=7.$

二、三阶行列式

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

使用加减消元法,为便于记忆其求解公式,我们定义三阶行列式.

定义 1.3　设有 9 个数排成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.5}$$

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

上式称为数表(1.5)所确定的**三阶行列式**,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式共有 3! =6 项,为所有不同行不同列的元素乘积的代数和.

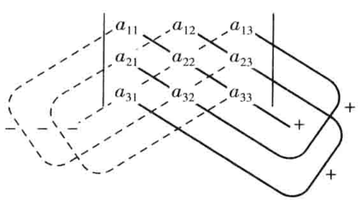

图 1.2

三阶行列式表示的代数和,也可以由下面的对角线法则来记忆,如图 1.2 所示,其中各实线连接的三个元素(主对角线及平行线)的乘积是代数和中的正项,各虚线连接的三个元素(次对角线及平行线)的乘积是代数和中的负项.

读者可自行验证,方程组(1.4)在满足条件

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，有解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_i(i=1,2,3)$ 是把 D 中的第 i 列元素用方程组(1.4)右端的常数项代替后所得的三阶行列式.

例 2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix}.$$

解　由对角线法则，有

$$\begin{aligned} D=&1\times(-2)\times(-5)+2\times(-1)\times(-3)+3\times4\times2 \\ &-3\times(-2)\times(-3)-2\times2\times(-5)-1\times4\times(-1)=46. \end{aligned}$$

例 3　求 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件.

解　由对角线法则，有

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-1.$$

当且仅当 $|a|>1$ 时，$a^2-1>0$，因而可得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$$

的充分必要条件是 $|a|>1$.

三、n 阶行列式的定义

类似的，要求含 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

在满足一定条件下的公式解,从前面的讨论过程可以看出,问题在于如何定义出 n 阶行列式.

为了给出 n 阶行列式的定义,我们先研究二阶、三阶行列式的定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由定义可看出:

(1) 二阶行列式共有 2! 项,为所有不同行不同列的元素乘积的代数和;三阶行列式共有 3! 项,为所有不同行不同列的元素乘积的代数和.

(2) 各项的正、负号与列标排列的奇偶性有关. 当把行标排成标准排列时,带正号的项的列标排列都是偶排列,带负号的项的列标排列都是奇排列. 因此各项所带符号由该项列标排列的奇偶性所决定.

从而

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

其中 $\sum$ 表示对相应的所有全排列求和.

推广而得,我们定义 n 阶行列式.

定义 1.4 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{1.6}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$,并冠以符号 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)}$,即得

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1.7}$$

的项,由于 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列,这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如式(1.7)的项共有 $n!$ 项,所有这 $n!$ 项的和

$$\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为数表(1.6)所确定的 **n 阶行列式**，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

按此定义的二阶、三阶行列式，与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的. 特别当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|-a|=-a$，注意与绝对值记号的区别.

行列式中从 a_{11} 至 a_{nn} 的对角线称为**主对角线**，从 a_{n1} 至 a_{1n} 的对角线称为**次对角线**. 要注意的是，当阶数大于 3 时，行列式就没有对角线法则定义了.

例 4　用定义计算五阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

其中所有的 $a_{ij}\neq 0$.

解　行列式五行中的非零元素的列标分别为：$p_1=2,3$；$p_2=1,2,3,4,5$；$p_3=1,2,3,4,5$；$p_4=2,3$；$p_5=2,3$.

在上述所有可能的取值中，不能组成 1,2,3,4,5 的任何一个全排列 $p_1p_2p_3p_4p_5$，从而行列式的任意一项均含有 0，因此行列式等于 0.

例 5　按行列式的定义计算**下三角形行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中主对角线上方未写出的元素全为零.

解　由定义，n 阶行列式中共有 $n!$ 项，其一般项为

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $\tau=\tau(p_1p_2\cdots p_n)$. 现求出其中所有可能的非零项,第 1 行除 a_{11} 外其余元素全为零,故非零项只有取元素 a_{11};在第 2 行除了 a_{21}、a_{22} 外全是零,故应在 a_{21}、a_{22} 中取一个,且只能取一个,因为 a_{11} 是第一行第一列的元素,$p_1=1$,故 $p_2,\cdots,p_n$ 不能再取 1,所以 $p_2=2$,即第二行取 a_{22};以此类推,第 n 行只能取 $p_n=n$,即取元素 a_{nn},从而可能的非零项只有一项,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即 D 等于主对角线上元素的乘积.

同理可得,**上三角形行列式**(主对角线下方未写出的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

作为三角形行列式特例的**对角行列式**(除对角线上的元素外,其他元素都为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 6　证明

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证　由行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

其中 $\tau=\tau[n(n-1)\cdots1]$为排列 $n(n-1)\cdots1$ 的逆序数,又

$$\tau[n(n-1)\cdots1]=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以结论成立.

由例 6 可得

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \vdots \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 5 与例 6 的结论以后会经常用到,应该牢记.

四、n 阶行列式定义的其他形式

利用定理 1.1,我们来讨论行列式定义的其他表示法.

对于 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$中的任一项

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中行标 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列,对换 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

此时,该项的值不变,而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换.设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 τ_1,则 τ_1 为奇数;设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 τ_2,则

$$(-1)^{\tau_2} = -(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)},$$

故

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} = (-1)^{\tau_1+\tau_2},$$

于是

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau_1+\tau_2} a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

这就说明,对换乘积中两元素的次序,从而行标与列标排列同时作了一次对换,因此行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性.经过一次对换如此,经过多次对换亦如此.于是经过若干次对换,使列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$[逆序数为 $\tau=\tau(p_1p_2\cdots p_n)$]变为标准排列(逆序数为 0)时,行标排列则相应的从标准排列变为某个新的排列,设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$,则有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

又若 $p_i=j$,则 $q_j=i$(即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj}$),可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所唯一确定.

由此可得

定理 1.2 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$可定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

证 按行列式定义，有

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

记

$$D_1=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn},$$

按上面的讨论知：对于 D 中任一项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，总有 D_1 中唯一的一项 $(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$，同理总有 D 中唯一的一项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 与之对应并相等，所以 $D=D_1$.

定理 1.3 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 可定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau_1+\tau_2}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 $\tau_1=\tau(p_1p_2\cdots p_n)$，$\tau_2=\tau(q_1q_2\cdots q_n)$.

例 7 判断 $a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{56}a_{62}$ 和 $-a_{41}a_{63}a_{35}a_{14}a_{26}a_{52}$ 是否为六阶行列式 $D_6=\det(a_{ij})$ 中的项.

解 $a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{56}a_{62}$ 中，六个因子的第一个下标排列为标准排列，第二个下标排列 135462 的逆序数为 5 是奇排列，则 $a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{56}a_{62}$ 不是六阶行列式 $D_6=\det(a_{ij})$ 中的项；$a_{41}a_{63}a_{35}a_{14}a_{26}a_{52}$ 中，六个因子的第一个下标排列 463125 的逆序数为 9，第二个下标排列 135462 的逆序数为 5，$9+5=14$，因此 $-a_{41}a_{63}a_{35}a_{14}a_{26}a_{52}$ 不是六阶行列式 $D_6=\det(a_{ij})$ 中的项.

第三节 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将其中的行与列互换，即把行列式中的各行换成对应的列，得到行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

上式称为行列式 D 的**转置行列式**，记作 D^{T}.