

# 天体力学引论

---

易照华等 编著

科学出版社

天 体



科 学 出 版 社

1 9 7 8

## 内 容 简 介

本书论述了天体力学的基本理论和方法,内容共分六章:二体问题,轨道计算,摄动运动方程,摄动运动方程的分析解法,摄动运动方程的数值解法,地球的自转理论.本书可以作为高等学校天文系天体力学专业基础课教材,并可供天文学、数学、力学和星际航行等方面工作者参考.

## 天 体 力 学 引 论

易照华等 编著

\*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1978年6月第一版 开本:787×1092 1/32  
1978年6月第一次印刷 印张:11 7/8  
印数:0001—10,100 字数:270,000

统一书号:13031·720

本社书号:1034·13—5

定 价: 1.20 元

## 前 言

随着我国社会主义革命和社会主义建设事业的日益发展,特别是我国人造卫星的发射成功,天体力学的应用日益广泛.为适应我国有关方面的工作需要,并根据无产阶级文化大革命以来广大读者对我们早先编写的《天体力学教程》(上海科学技术出版社,1961)一书提出的很多宝贵意见,我们决定重新编写了本书.

在本书中,我们力求应用辩证唯物主义观点,本着“少而精”的精神,对内容作了调整.本书以行星运动为对象,讲述天体力学的最基本的理论和方法,这些是各有关实际工作的理论基础.第一章讲述天体力学中最简单而应用又最广泛的问题——二体问题,它是天体力学中讨论其他问题的基础.第二章讲述利用二体问题原理,根据观测资料计算天体的椭圆和抛物线初轨的详细方法,并在书末附上了实际计算的例子.第三章讲述怎样根据天体运动情况和分析动力学原理,建立天体各种形式的摄动运动方程,这是天体力学中主要内容——摄动理论——的基础.第四章讲述摄动运动方程的分析解法,其中只介绍了一些基本概念和原理,应用时要根据天体具体情况进行.第五章讲述摄动运动方程的数值解法,是根据国内已广泛使用电子计算机的情况增加的.第六章讲述地球的自转理论,主要介绍地极移动以及岁差章动的力学原理和主要结果,并把地球的自转作为自转运动的例子进行介绍.为了便于读者自学,主要理论公式的推导都比较详细,特别是本书重点,即第一、二、三章更是如此.另外,书末附有习

题。

原《天体力学教程》中第八章(天体形状理论),由于用处不多,这次删去;第六章(月球运动理论)由于内容繁杂,需要另写较专门的书来讨论,在本书这样的讲述基本理论的书中也删去了。

本书虽然以行星运动为对象,但所讲的理论和方法可适用于太阳系其他天体以及人造天体的运动。

根据本书的内容,要求读者具有高等数学、常微分方程、球面天文和理论力学的基础,最好还了解一些复变函数。

限于我们的水平,目前对天体力学整个学科体系还没有作出重大革新,希望广大读者和天体力学工作者提出意见,并对全书的各方面问题提出批评,帮助我们不断改进。

这次重新编写过程中,南京大学天体力学教研组全体教师参加了大纲的讨论。本书主要由易照华同志负责编写,周洪楠同志参加了第二章编写工作和椭圆抛物线初轨实例计算工作,赵德滋同志参加了修改工作。

编者



# 目 录

## 前言

绪论 .....	1
§ 1 天体力学的内容和作用 .....	1
§ 2 万有引力定律 .....	4
§ 3 质点和球形物体之间的吸引、位函数 .....	7
§ 4 天体力学中处理问题的方法 .....	11
第一章 二体问题 .....	14
§ 1 二体问题的微分方程和积分 .....	14
§ 2 无摄动运动的轨道分类 .....	22
§ 3 轨道根数 .....	29
§ 4 开普勒方程和它的解法 .....	31
§ 5 计算日心黄道直角坐标的方法 .....	37
§ 6 计算星历表的公式 .....	43
§ 7 二体问题在人造地球卫星运动中的应用 .....	46
§ 8 向大行星发射人造天体的问题 .....	53
§ 9 椭圆运动的级数展开方法概况 .....	54
§ 10 白塞耳函数和它的性质 .....	56
§ 11 用白塞耳函数进行椭圆运动的展开 .....	61
§ 12 超几何级数和它的应用 .....	68
§ 13 直角坐标展为时间的幂级数 .....	78
§ 14 拉格朗日级数和它的应用 .....	81
§ 15 拉格朗日级数的收敛范围, 偏心率的极限 .....	85
第二章 轨道计算 .....	93
§ 1 天体观测资料的处理 .....	94
§ 2 高斯方法的基本方程 .....	96

§ 3	扇形和三角形面积之比,第二次近似	103
§ 4	求轨道根数,高斯方法的公式总结	111
§ 5	拉普拉斯方法的原理	121
§ 6	计算抛物线轨道的奥耳白尔方法	124
第三章	摄动运动方程	140
§ 1	$N$ 体问题的运动方程和它们的初积分	140
§ 2	用直角坐标表示的摄动运动方程	146
§ 3	正则方程组	150
§ 4	哈密顿正则方程的原则解法,雅哥比定理	158
§ 5	摄动运动的基本方程	165
§ 6	椭圆轨道的正则共轭常数	171
§ 7	轨道根数为基本变量的摄动运动方程,瞬时椭圆	178
§ 8	用摄动力三分量表示的摄动运动方程	188
§ 9	正则变换	199
§ 10	正则变换的特例和应用	210
§ 11	德洛勒变量和邦加雷变量	215
第四章	摄动运动方程的分析解法	221
§ 1	摄动运动方程分析解法的原理	221
§ 2	摄动函数展开方法的轮廓	229
§ 3	拉普拉斯系数和它的应用	234
§ 4	纽康算子,摄动函数展开的基本形式	241
§ 5	长期摄动,周期摄动和长周期摄动	252
§ 6	关于太阳系的稳定性问题	256
§ 7	限制性三体问题	263
第五章	摄动运动方程的数值解法	274
§ 1	数值方法的原理,第一科威耳方法	275
§ 2	第二科威耳方法	279
§ 3	龙格-库塔方法	284
§ 4	恩克变换和梯勒变换	287
第六章	地球的自转理论	296

§ 1	地球对外面一质点吸引的力函数 .....	296
§ 2	地球自转的运动方程 .....	301
§ 3	地球的惯性转动,地极移动 .....	309
§ 4	力函数 $U$ 的展开式 .....	315
§ 5	岁差章动基本方程的解 .....	321
§ 6	岁差和章动的系数 .....	328
附录	.....	332
一	习题 .....	332
二	天体力学中常用的天文常数 .....	340
三	用高斯方法计算小行星初轨 .....	351
四	用奥耳白尔方法计算彗星的抛物线初轨 .....	363



# 绪 论

## §1 天体力学的内容和作用

天体力学是天文学的一个分支，是研究天体的运动和形状的学科。

在天体力学中所研究的天体，主要是太阳系中的自然天体和人造天体；所研究的运动，是指天体的力学(机械)运动。关于恒星和星系的运动，是星系动力学所研究的内容。天体的力学运动可以分为两个方面：天体质量中心在空间中的运动(又叫移动)和天体围绕自己质量中心的转动(就是自转)。天体的自转同形状有密切关系，而形状又影响到天体之间的吸引力，因此必须研究天体的形状，才能更好地研究天体的运动。但从整个天体力学的内容来看，研究天体的运动是主要的。

到目前为止，研究天体运动的引力理论仍然是采用牛顿的万有引力定律。虽然在太阳系范围内，已经发现了一些矛盾(如水星近日点移动等)，而用广义相对论可以解释得更好些，但是还没有作最后结论。这是今后还要继续研究的一个重要课题。

天体力学自十七世纪诞生到现在已约三百年了。随着各个历史时期的社会实践的需要，天体力学已逐步发展成为一门内容丰富、应用广泛的学科。根据现代天体力学的研究对象、范围和方法进行划分，天体力学大致可包含下列主要内容。

1. 多体问题又叫做 $N$ 体问题。研究 $N$ 个质点在万有引力作用下的运动规律，是一个动力学问题。这是天体力学的主

要基本理论问题之一。其中二体问题已解决；从三体问题开始，以及加上某些限制条件后形成的限制性三体问题都没有得到解决。具体情况将在第三章中介绍。

在研究方法上，有时直接从 $N$ 体问题的运动方程来研究天体运动的某些性质，这个内容叫做天体力学的定性理论。

2. 摄动理论也是天体力学的主要基本理论问题之一。由于二体问题已解决，根据二体问题理论得到的天体运动轨道，又叫做无摄动轨道，常用来作为天体的第一近似轨道。研究天体的无摄动轨道在各种因素摄动（即干扰）下的变化规律，就叫做摄动理论。使天体偏离无摄动轨道的作用力就叫做摄动力。根据各具体天体的不同特点，又形成各种特殊的摄动理论。例如：大行星运动理论，小行星运动理论，卫星运动理论，月球运动理论等。在这些理论中，都是把天体在各种摄动力影响下的坐标或轨道根数表示为时间的函数，而且展开成近似分析表达式。这样的方法叫做天体力学分析方法，是天体力学研究得最多的内容。

如果用计算机直接从天体的运动方程计算出天体在任何时刻的具体位置，这个内容叫做天体力学数值方法。特别在现代高速电子计算机出现以后，用数值方法解决了大量的天体力学的实际问题。

3. 轨道计算是从天体的观测数据（位置、距离、速度等）按照运动理论来确定天体的轨道根数和有关天体运动的其他基本数据。这是天体力学理论联系实际的重要环节。

4. 历书天文学是根据天体的运动理论和轨道根数以及有关基本天文常数来编制天体的位置表，如天文年历编算和某些特殊天体位置表编算工作等。

5. 天体的形状和自转理论。形状理论主要研究流体在自转时的平衡形状问题；自转理论是研究具有一定形状的流体

或刚体在内外力作用下,自转速度和自转轴方向的变化规律。例如岁差和章动理论就是研究地球自转轴方向的变化规律。

6. 人造天体的运动理论是现代天体力学的主要内容之一。根据不同的研究对象,又分为人造地球卫星运动理论,月球火箭运动理论和行星际火箭运动理论。由于星际航行事业的迅速发展,已形成一门新的学科——星际航行动力学(Astrodynamics),人造天体的运动理论是它的一个部门。

以上是天体力学的主要内容,特别是五十年代以后,由于星际航行事业的实现和现代高速电子计算机的广泛应用,天体力学发展得更快了。天体力学也将同其他科学部门一样,在我国的阶级斗争,生产斗争和科学实验三项伟大革命实践中,发挥应有的作用。

星际航行也是阶级斗争的一种工具。两个超级大国大力发展星际航行事业,就是为它们侵略性的全球战略服务的。现在天上飞行的人造地球卫星,有很多是作侦察的间谍卫星,还有的是试验性卫星武器,至于秘密军事卫星就更多。我们必须针锋相对,利用星际航行这种工具,同它们进行斗争。在这个斗争中,天体力学工作者可以做出一定的贡献。

其次,精确掌握太阳系自然天体和人造天体的运动规律,可以为飞机、海船和远程导弹的导航服务;也是大地测量和研究地球形状及内部结构的基础。

另外,天体力学为科学实验服务是非常明显的。例如天体的起源和演化问题,是自然科学的基本问题之一,特别是地球和太阳系的起源和演化问题,对很多地球科学有用。而掌握太阳系天体的力学运动规律,是研究太阳系起源和演化的必要条件。人造天体出现以后,利用人造天体作为观测工具,可以促进科学实验更迅速地发展,同时也为天体力学发展成实验学科创造了条件。

我国天体力学工作在解放前几乎是空白。解放后，在毛主席革命路线指引下，根据我国社会主义革命和建设的需要，逐步开展天体力学的研究工作。例如，我国在解放前没有出版过天文年历。1951年开始，根据外国年历的资料，按照我国的需要出版了天文年历。从1957年开始进行独立编算天文年历的研究工作。1958年以后，在“三面红旗”指引下，紫金山天文台历算组的同志们，发扬自力更生、奋发图强的革命精神，在兄弟单位协作下，终于在1966年完成了天文年历的试算工作，达到了国际先进水平。从1970年开始，我国自己独立编算的《中国天文年历》正式出版了。这标志着我国依赖外国使用“洋历”的历史宣告结束。这是在毛主席革命路线的指引下我国天体力学工作取得的重要成果。另外，1958年开始进行的人造天体运动理论工作，也取得了重大成绩，为我国人造地球卫星胜利发射成功，做出了贡献。关于小行星的运动方面的研究工作，也做了很多。天体力学基本理论研究工作也有所发展。到目前为止，我国各天文单位和其它不少部门都在进行天体力学的研究工作。

目前，我国的天体力学工作还是比较落后的。我们深信，今后我国的天体力学工作者在毛主席的无产阶级革命路线指引下，在华主席为首的党中央领导下，一定会加倍努力，一定会在不久的将来，使我国的天体力学工作赶上和超过国际先进水平，更好地为我国社会主义革命和建设事业服务。

## § 2 万有引力定律

万有引力定律是天体力学的理论根据，它是根据多年的大量观测实践总结出来的。

早在十七世纪以前，随着生产力的发展，观测仪器得到

改进,对行星的位置观测已能准到 $1'$ 左右.开普勒(Kepler)根据前人对火星和太阳的几十年观测资料进行研究,肯定了旧的地心学说是完全错误的;但用哥白尼的日心学说(其中假定行星轨道为圆形)仍然不能完全解释理论值同观测值之间还有不小的偏差( $10'$ 左右).这样的偏差不可能是观测误差,开普勒开始对圆形轨道产生怀疑,并亲自对火星,太阳和其他行星作了十几年的观测研究.终于在1609—1619年先后归纳出大家所熟悉的行星运动三大定律:

第一定律:行星绕太阳运动的轨道是椭圆,太阳位于此椭圆的一个焦点上.

第二定律:行星在椭圆轨道上运动时,向径扫过的面积与经过的时间成正比.

第三定律:行星绕太阳公转的恒星周期的平方,与行星轨道椭圆半长径的立方成正比.

这就是大家公认的开普勒三大定律.这三个定律在当时候是最深刻地揭示了行星运动的规律,即使到现在,在很多近似讨论中也还要用到.用开普勒三大定律已能解释当时所知的行星运动现象,行星位置的理论值和观测值之差已降到 $1'-2'$ ,符合当时的观测水平.但是,开普勒三大定律只是对行星运动规律的一种描述,是人们对行星运动的感性认识(视运动)到理性认识的一个阶段.认识还有待进一步深化.

随着力学概念的出现,在牛顿以前就有人提出了行星绕太阳运动的原因是太阳引力的看法,但是没有给出具体结果.望远镜的发明,又为提高行星位置观测精度创造了条件.直到1685年,牛顿利用当时的力学发展成果,对开普勒三大定律作了深入分析研究后,才正式提出了万有引力定律:

宇宙间任意两个质点都是互相吸引,引力的大小与它们的质量乘积成正比,与它们之间的距离平方成反比.



如用公式表达,设  $m, M$  为两质点的质量,  $r$  为它们之间的距离,则它们之间的引力大小  $F$  可表为:

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad (1)$$

其中  $G$  是比例常数,叫做万有引力常数.

用现代的力学和高等数学知识,很容易从开普勒三大定律把万有引力定律推导出来. 这个推导过程在一般的理论力学书中都有,这里不再重述. 牛顿从开普勒三大定律归纳出(1)式后,又用月球运动和地面重力加速度作为验证,结果都能满足,故命名为“万有”(即普遍的意思)引力定律.

反过来,用(1)式可以推导出开普勒三大定律,只是第三定律需要修正,具体结果参看第一章.

万有引力定律的发现,使人们对行星和太阳系其它天体运动规律的认识进一步深化. 从此以后,天体力学才正式诞生. 但是,认识并没有终止,关于万有引力的本质问题,万有引力定律是否可靠问题,都还在继续研究中. 虽然自本世纪以来已有很多成果,但对太阳系这个范围来说,目前还没有修改万有引力定律的充分根据. 待观测水平进一步提高后,理论同观测结果的矛盾将会更明显地暴露出来,天体的运动理论必然会进一步发展.

在天体力学中,当采用不同的单位时,万有引力常数有不同的数值. 在讨论行星、小行星、彗星等天体运动时,常用天文单位作长度单位,太阳质量作质量单位,平太阳日作为时间单位,此时取

$$G = k^2, \quad k = 0.01720209895 \dots,$$

其中  $k$  又叫做高斯常数 (Gauss Constant). 有时为了理论上讨论的方便,把时间单位改为:

$$58.132441 \text{ (即 } 1/k \text{) 平太阳日.}$$

此时万有引力常数  $G = 1$ .

在讨论人造地球卫星的运动时,常取地球赤道半径(6378.160 公里)作为长度单位,地球质量作质量单位,806.813 秒作时间单位,此时相应的万有引力常数  $G = 1$ . 如时间以分钟作单位,则  $G = 0.0743667$ .

### § 3 质点和球形物体之间的吸引、位函数

万有引力定律是讨论质点之间的吸引,而天体一般不是质点,是具有不同大小和形状物体,故不能直接用万有引力定律来讨论. 因此,在讨论天体的运动以前,首先要弄清在什么情况下,天体可以看作质点. 现在就来讨论这个问题.

1. 天体可以看作无穷多个质点组合而成,故天体对外面一质点  $P$  的引力,可以看作这些质点对  $P$  点引力的总和. 由于引力是向量,求和比较复杂,下面用位函数来讨论.

先讨论  $n$  个质点  $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$  对另一个质点  $P$  的引力. 设  $m, m_i$  为质点  $P, P_i$  的质量;  $(x, y, z), (x_i, y_i, z_i)$  为质点  $P, P_i$  在某惯性直角坐标系  $O-XYZ$  中的坐标; 则距离

$$\overline{PP_i} = r_i, r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2, \quad (2)$$

$P_i$  点对  $P$  点的引力大小为

$$G \frac{mm_i}{r_i^2},$$

方向是  $\overrightarrow{PP_i}$  (黑体字表示向量). 而  $\overrightarrow{PP_i}$  对于三个坐标轴的方向余弦为

$$\frac{x_i - x}{r_i}, \quad \frac{y_i - y}{r_i}, \quad \frac{z - z_i}{r_i}.$$

但由(2)式对  $x, y, z$  取偏导数可得

$$\frac{x_i - x}{r_i} = -\frac{\partial r_i}{\partial x}, \quad \frac{y_i - y}{r_i} = -\frac{\partial r_i}{\partial y}, \quad \frac{z_i - z}{r_i} = -\frac{\partial r_i}{\partial z}.$$

再设  $X, Y, Z$  为  $P$  点的由  $P_1, P_2, \dots, P_n$  点的引力所产生的加速度分量, 则根据牛顿第二运动定律可得:

$$\begin{aligned} mX &= -\sum_{i=1}^n G \frac{mm_i}{r_i^2} \frac{\partial r_i}{\partial x} = m \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Gm_i}{r_i} \right) \\ &= m \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}, \end{aligned}$$

亦即

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}, \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}, \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

从(3)式可看出, 万有引力存在位函数, 记为

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}, \quad (4)$$

则

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (5)$$

由(4)式可以看出, 位函数只同距离  $r_i$  的大小有关, 同坐标系的选择无关. 在讨论各种类型的天体对外面一质点的吸引时, 只要找出了位函数  $V$ , 就可以从(5)式写出引力加速度的分量  $X, Y, Z$ .

2. 现在讨论一个密度均匀的球壳(厚度为无限小)对外面

一质点  $P$  的吸引, 如图 1. 设球壳半径为  $a$ , 中心为  $O$  点;  $OP = r$ , 在球壳上任一点  $A$  处取一宽度为无限小的圆环, 环面垂直于  $OP$ , 则此圆环中心  $D$  点在直线  $OP$  上. 令  $OA$  同  $OP$  的交角为  $\theta$ ; 圆环宽度对应于球心的张角为  $d\theta$ , 则圆环宽

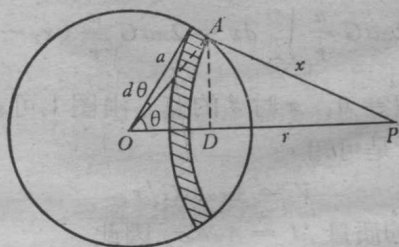


图 1

度为  $ad\theta$ . 再设球壳的面密度为  $\sigma$  (常量). 由于环面垂直于  $OP$ , 故环上各点同  $P$  点的距离相等, 设为  $x$ . 先来讨论此圆环对  $P$  点吸引的位函数.

由于位函数只同质量和距离大小有关, 故把圆环分为任意多个质点后, 因各点同  $P$  点的距离都是  $x$ , 故从(4)式可得圆环对  $P$  点的位函数(记为  $dV$ )为

$$dV = \frac{Gm_{\theta}}{x},$$

其中  $m_{\theta}$  为圆环的质量. 而圆环的面积是  $2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ , 由此可得

$$dV = 2\pi\sigma Ga^2 \sin \theta \frac{d\theta}{x}.$$

整个球壳可以分为无穷多个垂直于  $OP$  的这样圆环, 因此整个球壳对  $P$  点吸引的位函数  $V$  就是这些圆环对  $P$  点的位函数的总和, 即