高中数学综合运用

Gaozhong Shuxve
Zonghuo Yunyong

曲阜师范学院《高中数学综合运用》编写组

山东大学出版社

高中数学综合运用

曲阜师院《高中数学综合运用》编写组

山东大学出版社

高中数学综合运用

曲阜师院《高中数学综合运用》编写组

山东大学出版社出版

山东省新华书店发行　山东省安丘一中印刷厂印刷

787×1092　1/32　印张6　字数：130千字

1985年11月第1版　1985年11月第1次印刷

印数1—40,000册

书号：7338·3　　定价：0.85元

前　　言

为了提高高中学生和具有高中程度的知识青年综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力，我们根据教育部颁发的《高中数学教学纲要》中的“基本要求内容”和现行课本，编写了这本小册子。

本书编写的指导思想是：

1．在学生具有一定的数学基础知识和基本技能的前提下，着重介绍数学知识的综合运用。在编排顺序上，先是单科知识的综合运用，后是各科知识的综合运用，以提高学生分析问题和解决问题的能力。

2．对某些易混的概念和方法，尽量体现在例题中，并在例后对题目的思想性和解题规律作了适当总结和说明，以达明确概念、巩固方法和开阔思路之目的。

3．为了帮助学习有困难的读者收到应有的效果，全部习题在书后附有提示或略解。

本书由马英廉、许茂兴、高谦义、李畯田同志编写。在本书的编写和出版过程中，山东大学出版社和曲阜师院《中学数学杂志》编委会对本书的指导思想和编写原则提出了指导性意见，并进行了书稿终审。泰安、临沂、聊城、德州、济宁地区教育局教研室也给予大力支持。万伯陶、高文秀、李来发、陈正光同志曾审阅本书初稿。在此，一并表示感谢。

由于水平所限，错误和不妥之处在所难免，诚恳希望读者不吝指正。

曲阜师院《高中数学综合运用》编写组

1985年6月

目　录

一、代数部分

（一）幂函数、指数函数、对数函数

例1 求下列函数的值域：

（1）$y=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$；

（2）$y=\dfrac{5x+3}{2x-3}$；

（3）$y=\dfrac{1}{2+x-x^2}$

【解】（1）由 $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x\geqslant 1$

$\therefore y\geqslant 1$

（2）当 $x\neq\dfrac{3}{2}$ 时，$x=\dfrac{3y+3}{2y-5}$

$\therefore\ 2y-5\neq 0\Rightarrow y\neq\dfrac{5}{2}$

$\therefore y\in(-\infty,\dfrac{5}{2})\cup(\dfrac{5}{2},+\infty)$

（3）当 $x\neq-1$，$x\neq 2$ 时，$yx^2-yx+1-2y=0$

$\therefore\Delta=(-y)^2-4y(1-2y)=y(9y-4)\geqslant 0$

又 $y\neq 0$

$\therefore y$ 的值域为 $\{y|y\geqslant\dfrac{4}{9}$ 或 $y<0\}$

说明 以上三题分别采用的观察法，求反函数法、判别式法，这些方法是求函数值域常用的方法。使用时需注意变

形后是否扩大了取值范围。

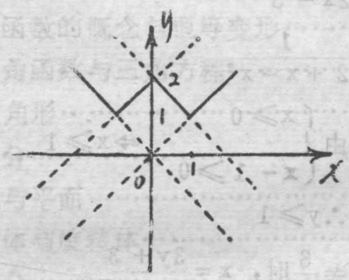
例2 画出函数$y=|x-1|+|x+1|-|x|$的图象。

分析 此函数是分段表示的函数，只需脱去绝对值符号，问题便得到解决。

【解】 $y=|x-1|+|x+1|-|x|$

$$=\begin{cases}-x+1-x-1+x=-x, & (x\leqslant -1\text{时})\\ -x+1+x+1+x=x+2, & (-1<x\leqslant 0\text{时})\\ -x+1+x+1-x=-x+2, & (0<x<1\text{时})\\ x-1+x+1-x=x. & (x\geqslant 1\text{时})\end{cases}$$

图象如下：



例3 当x取哪些值时，函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)$是增函数？x取哪些值时，它是减函数？

分析 首先需确定函数的定义域。

$\because y=\log_{\frac{1}{2}}u$是减函数。

$\therefore u=x^2-5x+6$在单增区间内y为减函数。

$u=x^2-5x+6$在单减区间内y为增函数。

【解】 首先求出函数的定义域。

解不等式$x^2-5x+6>0$，得$x<2$和$x>3$。

$$\because x-5x+6=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}$$

所以，当$x<\frac{5}{2}$时，x^2-5x+6是递减的。因为原函数定义域是$x<2$，所以，当$x<2$时，x^2-5x+6的值是递减的，而函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)$是增函数。当$x>3$时，$x^2-5x+6$的值是递增的，而函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)$是减函数。

例4 解指数方程：$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$

分析 注意到$\sqrt{2+\sqrt{3}}$与$\sqrt{2-\sqrt{3}}$互为倒数，问题便迎刃而解。

【解】 解题过程从略

原方程的解为 $x=\pm 2$

例5 求适合下列等式的x、y的值：

$$\lg(x^2+1)+\lg(y^2+4)=\lg 8+\lg x+\lg y$$

分析 根据已知等式的特点，利用对数运算法则进行等式变形，去掉对数符号求解。但要注意检验。

【解】 原式即为：$\lg(x^2+1)(y^2+4)=\lg 8xy$

$$\therefore\ x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$$

$$(4x^2-4xy+y^2)+(x^2y^2-4xy+4)=0$$

$$\therefore\ (2x+y)^2+(xy-2)^2=0$$

则$\begin{cases}2x+y=0\\xy-2=0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

检验知，$x=1$和$y=2$适合原式。

∴适合原式的解：$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

例6 解方程：$x^{x\sqrt{x}}=(x\sqrt{x})^x$ $(x>0)$

分析　此类方程叫做幂指方程，通常采用两边取对数的方法求解。但要注意，在计算过程中不要失根。

【解】　取对数，得

$$x\sqrt{x}\lg x = x\lg x\sqrt{x}.$$

$\because\ x>0\quad\therefore\ \sqrt{x}\lg x=\lg x\sqrt{x}$

即　$\sqrt{x}\lg x=\frac{3}{2}\lg x\quad\therefore \lg x=0$ 或 $\sqrt{x}=\frac{3}{2}$

$\therefore\quad x=1$ 或 $x=\frac{9}{4}$

例7　解方程组：

$$\begin{cases}(x-y)\lg y=\lg x,\\ \lg[y(x-y)]=\lg x.\end{cases}$$

分析　此类方程组通常通过变形去掉对数符号求解。但要注意增根的可能性。

【解】　变原方程组为：

$$\begin{cases}y^{x-y}=x & ①\\ (x-y)y=x & ②\end{cases}$$

由②，得 $x-y=\frac{x}{y}$，将其代入①，得，$y^{\frac{x}{y}}=x$，

$\therefore\quad y^x=x^y\qquad ③$

由③知：$\begin{cases}x_1=4\\ y_1=2\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=2\\ y_2=4\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=1,2,3\cdots\cdots\\ y_3=1,2,3\cdots\cdots\end{cases}$

但由对数性质：$x>0$，$y>0$，$x-y>0$。

$\therefore$　原方程组仅有一组解：$\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$

练　习　一

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt[8]{2x+4}}{\lg(2x-1)}$

(2) $y=\sqrt[n]{\log_a(2x-5)}$　　　$(n\in N)$

2. 求函数$y=\sqrt[3]{x^2+1}$　$(x\leqslant 0)$的反函数。

3. 若$g(x)=\dfrac{ax-4}{x+b}$的反函数是$f(x)=\dfrac{3x+c}{-2x+1}$.

求a、b、c。

4. 试确定下列函数的增减性：

(1)　$y=\dfrac{x}{x^2+1}$; $(x\in[-1,\ 1])$

(2)　$y=\log_{tg\alpha}(-2x^2+5x+3)$.　$(0<\alpha<\dfrac{\pi}{4})$

5. 如果两个指数函数$y_1=a^{2x^2-3x+1}$与

$y_2=a^{x^2+2x-5}$，要使　1)　$y_1=y_2$; 2)　$y_1<y_2$;

3)　$y_1>y_2$. 那么x的值应怎样？

6. 判断函数$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性。

7. 画出下列函数的图象：(1)　$\log_x y=\log_y x$;

(2)　$y=\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$.

8. 解方程：$x^{8-\lg\frac{x}{3}}=900$.

9. 解方程：$\dfrac{x^{\lg x}}{x^2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{10}$.

10. 解方程组：$\begin{cases}\sqrt[10]{2^x}\cdot\sqrt{\sqrt[5]{2^y}}=\sqrt[x]{128}, & ①\\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=\lg 40. & ②\end{cases}$

11. 解方程组：$\begin{cases}2^{\sin x+\cos y}=1, & ①\\ 16^{\sin^2x+\cos^2y}=4. & ②\end{cases}$

（二）数列、极限和数学归纳法

例1 有四个数，前三个数成等比数列，后三个数成等差数列；又首末二数之和为14，其它二数之和等于12，求各数。

分析 若第一个数是a，公比等于q，前三个数成等比数列，即有a，aq，aq^2；若第四个数为b，由后三个数成等差数列，则$2aq^2=aq+b$；首末二数之和是$a+b=14$；其他二数之和，即$aq+aq^2=12$，通过解方程组，问题即可解决。

【解】 设第一个数为a，公比为g，第四个数为b。根据题意

则 $\begin{cases} a+b=14, \\ aq+aq^2=12, \\ 2aq^2=aq+b. \end{cases}$ 解此方程组，得

$q=2$、$a=2$、$b=12$或$q=\frac{3}{5}$、$a=\frac{25}{2}$、$b=\frac{3}{2}$。

∴ 所求的四个数：2，4，8，12或$\frac{25}{2}$，$\frac{15}{2}$，$\frac{9}{2}$，$\frac{3}{2}$。

例2 某粮库存粮2000吨以上。第一天运出100吨，以后每天比前一天多运出20吨，若干天后运完；如果每天都运出380吨，则可提前5天运完。问粮库有多少吨粮？

分析 第一种运法，每天运出的粮食的吨数成等差数列，第二种运法，每天运出的粮食的吨数成常数列，所用的时间相差5天；不管那种运法，库存粮食总量是不变的，这是列出方程(等式)的根据。

【解】 设库存粮食x吨，$x>2000$，按第一种方案运n天可运完。由题意，则

$$\frac{[100+100+(n-1)\cdot 20]\cdot n}{2}=380\times(n-5).$$

解之，得$n_1=10$，$n_2=19$。

$\therefore x_1=380\times(10-5)=1900$（不合题意，舍去）

$x_2=380\times(19-5)=5320$

答：粮库存有5320吨粮食。

例3 在△ABC中，若ctgA、ctgB、ctgC成等差数列，求证各边的平方也成等差数列。

【证明】∵ctgA、ctgB、ctgC成等差数列.

$$\therefore 2\text{ctg}B=\text{ctg}A+\text{ctg}C.$$

$$\text{即}\frac{2\cos B}{\sin B}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$=\frac{\sin C\cos A+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}$$

$$=\frac{\sin(C+A)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C},$$

$$\therefore 2\cos B=\frac{\sin^2 B}{\sin A\sin C}.$$

由正弦定理，得$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$，

由余弦定理，得$2\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}$.

$$\therefore\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}=\frac{\left(\frac{b}{2R}\right)^2}{\frac{a}{2R}\cdot\frac{c}{2R}}\text{，整理，得}$$

$2b^2=a^2+c^2$. 即a^2，b^2，c^2成等差数列.

说明 在三角形中，各内角的三角函数之间的关系与边之间的关系，可互相转化。正、余弦定理则是这种转化的重要工具。该题的逆命题，即“在△ABC中，若各边的平方成等差数列，则ctgA、ctgB、ctgC也成等差数列”也是正确的。请读者给出证明。

例4 设a、b、c、x均为实数，且方程

$$(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0,$$

试证a、b、c为等比数列，且x是公比.

分析　因为a、b、c、x均为实数，x是已知方程的未知数，就断定方程有实数根。所以判别式 $\Delta\geqslant 0$ 。由此往下推，问题就得到解决。

【证明】　$\because$ x为实数，$\therefore$ $\Delta\geqslant 0$ 。

即 $4b^2(a+c)^2-4(a^2+b^2)(b^2+c^2)\geqslant 0$,

化简，得 $b^4-2acb^2+a^2c^2\leqslant 0$,

即 $(b^2-ac)^2\leqslant 0$ 。

根据实数的性质，$(b^2-ac)^2<0$ 是不可能的，所以，必有 $(b^2-ac)^2=0$ ，即 $\Delta=b^2-ac=0$ ． $\therefore b^2=ac$. 即a、b、c成等比数列。

又 $\because$ $x=\dfrac{2b(a+c)\pm\sqrt{\Delta}}{2(a^2+b^2)}=\dfrac{ab+bc\pm 0}{a^2+b^2}=\dfrac{b(a+c)}{a^2+ac}=\dfrac{b}{a}$

$(\because b^2=ac)$

$\because \dfrac{b}{a}$ 是a、b、c的公比，$\therefore$ $x=\dfrac{b}{a}$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{3x+1}{x^2+1}}$.

【解】　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x}{3x^3+x^2-3x-1}$

$\because x\neq 0$ ，分子、分母同除以 x^3 ，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}$$

$\because$ 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{2}{x^2}$、$\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{3}{x^2}$、$\dfrac{1}{x^3}$ 都是无穷小量，它们的

极限都等于零。所以

$$原式=\frac{2+0}{3+0-0-0}=\frac{2}{3}$$

说明 此题若不先将f(x)变形，则出现$\frac{\infty}{\infty}$的形式，极限无法确定。由此而知，当变量变化时，若出现$\frac{\infty}{\infty}$（称为不定型）时，可将分子分母同除以一个适当的量，所谓“适当”，就是除后出现无穷小量而且有常量，问题就解决了。

例6 求证$2^n>n^2(n\geqslant5)$

【证明】 (1)当$n=5$时，左边$=2^5=32$，右边$=5^2=25$，

$\therefore$左边>右边，不等式成立。

(2)假设$n=k$时，不等式成立，即$2^k>k^2$

$$\because 2^{k+1}-(k+1)^2=2\cdot2^k-k^2-2k-1$$

$$>2k^2-k^2-2k-1$$

$$=(k^2-2k+1)-2=(k-1)^2-2$$

$$\geqslant(5-1)^2-2>0$$

$\therefore 2^{k+1}>(k+1)^2$ 即当$n=k+1$时，不等式也成立。

据(1)、(2)知，对$n\geqslant5$时，不等式$2^n>n^2$成立。

练　习　二

1．已知数列3，5，9，15，……，各相邻项的差构成等差数列，求此数列的通项公式。

2．设一等比数列第p项、第q项、第r项依次为a、b、c。求：$(q-r)\lg a+(r-p)\lg b+(p-q)\lg c$的值。

3．有成等比数列的三个数，其和等于14，各自平方之和等于84。求其中第一项和公比。

4．已知等差数列的第k、n、p项构成等比数列的连续三项，并且这个数列不是常数列。

求证： 等比数列的公比是$\frac{p-n}{n-k}$。

5．三角形三边若成等比数列，则此数列之公比大于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$而小于$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$。

6．已知$\lim x=-2$，求$\frac{(3x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2+3x+2)}$的极限。

7．连结正三角形三边的中点成一新三角形，再连结新三角形各边中点，又成一新三角形，这样连续无限次。如果所有三角形面积和的极限是$27\sqrt{3}\,cm^2$，求原三角形的边长。

8．求$\lim\limits_{n\to\infty} a\sin\alpha(1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cdots\cdots+\cos^n\alpha)$。

（a为任意常数，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$）

9．用数学归纳法证明：$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots\cdots 2^nC_n^n=3^n$

10．证明三个连续自然数的立方和是9的倍数。

（三）不　等　式

例1　设a、b、c是互不相等的正数。求证：

$$a^{2a}\cdot b^{2b}\cdot c^{2c}>a^{b+c}\cdot b^{c+a}\cdot c^{a+b}.$$

【证明】　$\because$ a、b、c是互不相等的正数，不妨设

$$a>b>c>0,\ \therefore \frac{a}{b}>1,\ a-b>0.$$

$\therefore(\frac{a}{b})^{a-b}>1$；同理，得

$$(\frac{b}{c})^{b-c}>1;\quad (\frac{a}{c})^{a-c}>1.$$

$$\therefore (\frac{a}{b})^{a-b}\cdot(\frac{b}{c})^{b-c}\cdot(\frac{a}{c})^{a-c}>1,$$

$$\therefore(\frac{a^a}{a^b}\cdot\frac{b^b}{b^a})(\frac{b^b}{b^c}\cdot\frac{c^c}{c^b})(\frac{a^a}{a^c}\cdot\frac{c^c}{c^a})>1.$$

$\therefore \dfrac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}\cdot b^{c+a}\cdot c^{a+b}}>1$,

故$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}\cdot b^{c+a}\cdot c^{a+b}$.

例2 解不等式$x^{\log_a x}<\dfrac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}$.

【解】 $\because a>0$，且$a\neq 1$，所以原不等式两边同乘以a^2，得 $a^2\cdot x^{\log_a x}>x^{\frac{9}{2}}$.

（1）当$a>1$时，不等式两边取对数，得

$$2\log_a a+\log^2_a x>\frac{9}{2}\log_a x,$$

$$2\log^2_a x-9\log_a x+4>0,$$

$$(2\log_a x-1)(\log_a x-4)>0,$$

$\therefore \log_a x<\dfrac{1}{2}$或$\log_a x>4$，故$0<x<\sqrt{a}$或$x>a^4$;

（2）当$0<a<1$时，不等式两边取对数，整理得

$$(2\log_a x-1)(\log_a x-4)<0。$$

$\therefore \dfrac{1}{2}<\log_a x<4$，故$a^4<x<\sqrt{a}$。

说明 当$0<a<1$时，要注意改变不等号的方向。

例3 n是自然数，求证$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2^n}<4$.

分析 由不等式的左边，容易看出，根指数是等比数列，被开方数也是等比数列，且它们的通项都是2^n。左边还容易变为同底数的幂相乘的形式，先求出指数的和，则是该题证明的关键。

【证明】 左边$=2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{8}}\cdots\cdots(2^n)^{\frac{1}{2^n}}$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{8}}\cdots\cdots 2^{\frac{n}{2^n}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^n}}.$$

设$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^n}$ ①

$\frac{1}{2}\times S=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$ ②

①—②，得$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$

$$\frac{1}{2}S=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$\therefore S=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$，它是2的指数。

$$\therefore 左边=2^{2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}}<2^2$$

所以，原不等式得证。

例4 已知a、b为不等的正数，试比较a^3+b^3与a^2b+ab^2的大小。

分析 要比较这两个代数式的大小，就看a^3+b^3与a^2b+ab^2之差是大于零还是小于零。由此判断它们的大小。

【证明】 $a^3+b^3-(a^2b+ab^2)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2-ab)=(a+b)(a-b)^2$

或者 $a^3+b^3-(a^2b+ab^2)=(a^3-a^2b)+(b^3-ab^2)$

$=a^2(a-b)+b^2(b-a)=(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a+b)(a-b)^2$

$\because a>0$，$b>0$，且$a\neq b$，

$\therefore a+b>0$，$(a-b)\neq 0$，$(a-b)^2>0$.

由此而知，$(a+b)(a-b)^2>0$。