现代数学译丛 27

凸分析及应用捷径

〔美〕Boris S. Mordukhovich, Nguyen Mau Nam 著

赵亚莉 王炳武 译

科学出版社

现代数学译丛 27

凸分析及应用捷径

〔美〕Boris S. Mordukhovich, Nguyen Mau Nam 著

赵亚莉 王炳武 译

科学出版社

北京

图字：01-2015-5618

内 容 简 介

凸最优化在数学、应用科学和实际应用的许多领域中的影响日益增长.现在许多大学正讲授它，而且被不同领域的研究人员应用. 由于凸分析是凸最优化的数学基础，深入的凸分析知识可帮助学生和研究人员更有效地利用其中的工具. 本书的主要目的是提供一个容易进入到凸分析及其在最优化中应用的最基础部分. 变分分析的现代技术被用来阐明和简化凸分析中的一些基本证明，并且在有限维空间中建立凸函数和凸集的广义微分理论. 我们还给出凸分析在选址问题以及许多令人感兴趣的几何问题，如Fermat-Torricelli 问题、Heron 问题、Sylvester 问题及其推广中的新应用. 当然，我们不期望触及凸分析的每个方面，但是对这个学科的初级教程来说本书包含足够的素材. 它也可作为凸最优化及应用课程的补充阅读材料.

本书可作为高年级本科生及研究生凸分析及其应用课程的教科书.也可供相关专业科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

凸分析及应用捷径/(美)莫尔杜霍维奇(Mordukhovich, B.S.)等著；赵亚莉，王炳武译. —北京：科学出版社，2015.9
(现代数学译丛)
书名原文：An Easy Path to Convex Analysis and Applicantions
ISBN 978-7-03-045654-0

Ⅰ. ①凸… Ⅱ. ①莫… ②赵… ③王… Ⅲ. ①凸分析 Ⅳ. ①O174.13
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 216527 号

责任编辑：李 欣 / 责任校对：钟 洋
责任印制：张 伟 / 封面设计：耕者设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 9 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2015 年 9 月第一次印刷 印张：12 1/4
字数：242 000

定价：78.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

原著第一作者以此书纪念他的父亲 Sholim Mordukhovich (1924-1993): 一位善良的人, 一位勇士.

原著第二作者以此书纪念他的父母.

作 者 简 介

Boris S. Mordukhovich (莫尔杜霍维奇) 是州立韦恩大学的数学 “大学精英教授” (Distinguished University Professor), 也是法赫德国王石油矿产大学数学与统计学的讲席教授. 他已经发表了 350 多篇文章并出版数部专著. 他最著名的成就是强有力广义微分结构的引入和发展及其在变分分析、最优化、均衡、控制、经济、工程以及其他领域的许多类问题中的应用. Mordukhovich 是 SIAM 院士, AMS 院士和许多国际奖以及荣誉的获得者, 包括世界上六所大学授予的荣誉博士学位. 他被 ISI(Institute of Scientific Information) 评为数学方面高引用学者. 他的研究连续受到美国国家自然科学基金的资助. 地址：美国密歇根州底特律市州立韦恩大学数学系. 邮编：48202. 电子邮件：boris@math.wayne.edu. 网页: math.wayne.edu/~boris.

Nguyen Mau Nam(阮茂南) 于 1998 年在越南顺化大学获得理学学士学位, 于 2007 年在州立韦恩大学获得理学博士学位. 他目前是州立波特兰大学的数学助理教授. 他已有大约 30 篇关于凸分析和变分分析、最优化及其应用的论文被高水平的数学杂志发表或接收. 他的研究得到西蒙斯基金会合作项目资助. 地址：美国俄勒冈州波特兰市州立波特兰大学马席赫数学与统计系. 邮编：97201. 电子邮件：mau.nam.nguyen@pdx.edu. 网页: web.pdx.edu/~mnn3.

关键词: 仿射集, Carathéodory 定理, 凸函数, 凸集, 方向导数, 距离函数, Fenchel 共轭, Fermat-Torricelli 问题, 广义微分, Helly 定理, 极小时间函数, Nash 均衡, 法锥, Radon 定理, 最优值函数, 最优化, 最小封闭圆问题, 集值映射, 次微分, 次梯度, 次梯度算法, 支撑函数, Weiszfeld 算法.

译 者 序

本书是关于凸分析的一本新著, 原著作者都是变分分析领域的著名学者, 其中 Boris S. Mordukhovich 是现代变分分析的创始人之一. 本书涵盖了有限维空间上凸分析的一些基本结果, 并涉及了凸分析的一些最新应用; 现代变分分析的思想方法融入了整个理论的阐释与处理, 因此本书不仅是凸分析的入门教材, 也为读者进一步进入变分分析领域打下了基础.

本书译者曾经参与翻译 Mordukhovich 教授的专著《变分分析与广义微分》上、下卷, 分别于 2011 年与 2014 年由科学出版社出版. 在 Mordukhovich 教授和王炳武教授的支持下, 赵亚莉完成译本的初稿, 然后由王炳武修改定稿.

译者感谢渤海大学张守波副校长, 研究生院姜德刚院长, 数理学院王志福院长、张盛副院长对本书翻译工作的支持. 本书的翻译也得到了原著作者 Mordukhovich 教授和 Nam 教授的支持和鼓励, 在此表示感谢. 感谢第一译者的硕士研究生王超、鲁红、沈璐、韩冬雪、王凤娇、孙圆圆用 CTEX 录入了中译本的原稿. 中译本的出版得到了国家自然科学基金 (基金项目编号 11371070) 和国家重点基础研究发展计划课题项目 (项目编号 2011CB808902) 的资助, 在此表示感谢.

由于译者水平有限, 书中疏漏或不当之处在所难免, 恳请读者批评指正.

译 者

2015 年 7 月 31 日

前　　言

凸集和凸函数的一些几何性质在 20 世纪 60 年代之前已被许多杰出的数学家所研究 (其中对凸函数的研究程度相对低一些), 其中首推 Hermann Minkowski 和 Werner Fenchel. 20 世纪 60 年代初, R.Tyrrell Rockafellar 和 Jean-Jacques Moreau 的工作使得凸分析得到了很大的发展, 他们奠基了这个新领域的系统研究. 凸分析是变分分析的基础部分, 其中广义微分理论可用于研究初始数据不加任何可微假设的大量数学模型. 凸分析在许多应用中的重要性至今已经得到了公认, 这些应用领域中首先包括凸最优化. 凸性的存在不仅使全面地定性研究最优解以及导出最优性的必要和充分条件成为可能, 也有助于发展解凸最优化问题的行之有效的数值算法, 即使对不可微数据也如此. 凸分析和最优化理论正在对数学的许多方面及其应用发挥着日益增长的影响, 这些应用特别包括控制系统、评估与信号处理、通信与网络、电路设计、数据分析与建模、统计、经济与金融等.

现在已经有致力于凸分析与最优化的不同方面的基础书籍, 这里我们特别指出 Rockafellar 的《凸分析》[26], Hiriart-Urruty 与 Lemaréchal 的《凸分析与最小化算法》(两卷)[8] 及其精简版本[9], Borwein 与 Lewis 的《凸分析与非线性最优化》[4], Nesterov 的《凸最优化入门讲义》[21] 和 Boyd 与 Vandenberghe 的《凸最优化》[3], 以及书末参考文献中的其他书籍.

在凸分析与最优化这个大的框架下, 对刚刚开始利用凸分析接触该领域更深的课题的学生和研究人员来说, 本书可以充当一个桥梁. 书中陈述的大多结果都给出了详细的证明, 并包括了许多图表和练习, 以便更好地理解这些素材. 本书采用了现代变分分析中建立的强有力的几何方法, 这种方法在凸的情形得到了简化, 以此给读者提供了一个进入有限维空间中凸结构的广义微分理论的捷径, 因此本书也可作为感兴趣的读者继续研究非凸变分分析与应用的一个起点. 从此角度来说, 它对凸分析和变分分析方面的专家也可能是有意义的. 最后, 本书的应用部分不仅涉及了与最优性条件和次梯度算法有关的凸最优化的经典课题, 而且给出了一些近期的一类重要的选址问题的易于理解的定性和数值结果.

本书包括四章, 安排如下: 在第 1 章中我们研究凸集和凸函数的基本性质, 其中特别关注在最优化中起着重要作用的凸函数类. 第 2 章主要致力于建立凸集的法锥和凸函数次梯度的基本运算法则, 它们是凸理论的主流. 第 3 章包含了凸分析的其他一些课题, 它们在应用中有广泛的用途. 第 4 章则完全把注意力放在应用问题上, 从定性和数值两个角度讨论了凸分析的基本结果在凸最优化问题和选址问题

的某些选题中的应用. 最后, 书末给出了某些练习的答案和提示.

每章的最后都有练习题, 而图表和例子则贯穿全书. 参考文献包含一些书籍和选取的论文, 它们密切关联于本书所讨论的课题, 也可以帮助读者进一步学习更深的凸分析理论及其应用与扩展.

本书只需要线性代数和基础微积分的基本知识, 因此可用作本科生和研究生层次的凸分析及其应用课程的教科书. 事实上, 作者已经应用这些讲义在他们的大学以及作为访问学者在其他一些学校讲授过这样的课程. 我们希望本书能使本科生和研究生、不同学科的研究人员以及从业者等广泛群体更易于理解和进入凸分析这个领域.

Boris S. Mordukhovich, Nguyen Mau Nam

2013 年 12 月

符　号　表

$\mathbb{R}$	the real numbers (实数)
$\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, \infty]$	the extended real line (增广实直线)
$\mathbb{R}_+$	the nonnegative real numbers (非负实数)
$\mathbb{R}_>$	the positive real numbers (正实数)
$\mathbb{N}$	the positive integers (正整数)
$\operatorname{co}\Omega$	convex hull of Ω (Ω 的凸包)
$\operatorname{aff}\Omega$	affine hull of Ω (Ω 的仿射包)
$\operatorname{int}\Omega$	interior of Ω (Ω 的内部)
$\operatorname{ri}\Omega$	relative interior of Ω (Ω 的相对内部)
$\operatorname{span}\Omega$	linear subspace generated by Ω (由 Ω 生成的线性子空间)
$\operatorname{cone}\Omega$	cone generated by Ω (由 Ω 生成的锥)
K_Ω	convex cone generated by Ω (由 Ω 生成的凸锥)
$\dim\Omega$	dimension of Ω (Ω 的维数)
$\overline{\Omega}$	closure of Ω (Ω 的闭包)
$\operatorname{bd}\Omega$	boundary of Ω (Ω 的边界)
$\mathbb{B}$	closed unit ball (闭单位球)
$\mathbb{B}(\bar{x}; r)$	closed ball with center $\bar{x}$ and radius r (以 $\bar{x}$ 为中心 r 为半径的闭球)
$\operatorname{dom} f$	domain of f (f 的定义域)
$\operatorname{epi} f$	epigraph of f (f 的上图)
$\operatorname{gph} F$	graph of mapping F (映射 F 的图)
$\mathcal{L}[a; b]$	line connecting a and b (连接 a 与 b 的直线)
$d(x; \Omega)$	distance from x to Ω (x 到 Ω 的距离)
$\Pi(x; \Omega)$	projection of x to Ω (x 到 Ω 的投影)
$\langle x, y \rangle$	inner product of x and y (x 与 y 的内积)
A^*	adjoint/transpose of linear mapping/matrix A (线性映射/矩阵 A 的共轭/转置)
$N(\bar{x}; \Omega)$	normal cone to Ω at $\bar{x}$ (Ω 在 $\bar{x}$ 的法锥)
$\ker A$	kernel of linear mapping A (线性映射 A 的核)
$D^*F(\bar{x}, \bar{y})$	coderivative to F at $(\bar{x}, \bar{y})$ (F 在 $(\bar{x}, \bar{y})$ 点的上导数)

$T(\bar{x};\Omega)$	tangent cone to Ω at $\bar{x}$ (Ω 在 $\bar{x}$ 的切锥)
F_∞	horizon/asymptotic cone of F (F 的地平/渐近锥)
$\mathcal{T}_\Omega^F$	minimal time function defined by constant dynamic F and target set Ω (由恒定动态 F 和目标集合 Ω 定义的极小时间函数)
$L(x,\lambda)$	Lagrangian (Lagrange 函数)
ρ_F	Minkowski gauge of F (F 的 Minkowski 度规)
$\Pi_F(\cdot;\Omega)$	generalized projection defined by the minimal time function (由极小时间函数定义的广义投影)
$G_F(\bar{x};t)$	generalized ball defined by dynamic F with center $\bar{x}$ and radius t (由以 $\bar{x}$ 为中心 t 为半径的动态 F 定义的广义球)

目　录

第 1 章　凸集和凸函数

本章介绍 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中凸集和凸函数的定义、例子和基本性质, 也包含了一些相关的材料.

1.1　预 备 知 识

我们从回顾 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的经典概念和性质开始. 本节给出结果的证明可在高等微积分和线性代数的标准教科书中找到.

用 $\mathbb{R}^n$ 表示实数的 n 元数组 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的全体构成的集合, 则在如下运算下 $\mathbb{R}^n$ 构成一个线性空间:

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n)=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n),$$

其中 $(x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R}$. 在不致引起混淆的情况下, $\mathbb{R}^n$ 中的零元和 $\mathbb{R}$ 中的数零通常用相同的记号 0 表示.

对任意的 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 我们将其等同于列向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 其中记号“T”表示向量的转置. 给定 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, x 与 y 的内积定义为

$$\langle x,y\rangle:=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

下面的命题列出了 $\mathbb{R}^n$ 中内积的一些性质.

命题 1.1　对 $x,y,z\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R}$, 有

(i) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$, $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$.

(ii) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$.

(iii) $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$.

(iv) $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$.

$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 的 Euclid 范数定义为

$$\|x\|:=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}.$$

由定义直接得 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

命题 1.2　对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$, 有

(i) $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (三角不等式).

(iv) $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ (Cauchy-Schwarz 不等式).

利用 Euclid 范数可引入 $\mathbb{R}^n$ 中的球, 另外球可用于定义 $\mathbb{R}^n$ 中其他的拓扑概念.

定义 1.3　以 $\bar{x}$ 为中心, $r \geqslant 0$ 为半径的闭球和 $\mathbb{R}^n$ 的闭单位球分别定义为

$$\mathbb{B}(\bar{x}; r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\| \leqslant r\}, \quad \mathbb{B} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

易见, $\mathbb{B} = \mathbb{B}(0; 1), \mathbb{B}(\bar{x}; r) = \bar{x} + r\mathbb{B}$.

定义 1.4　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 则 $\bar{x}$ 是 Ω 的一个内点, 如果存在 $\delta > 0$ 使得

$$\mathbb{B}(\bar{x}; \delta) \subset \Omega.$$

Ω 的所有内点构成的集合记为 $\operatorname{int}\Omega$. Ω 称为是开的, 如果 Ω 的每个点都是它的内点.

Ω 是开的当且仅当对每一个 $\bar{x} \in \Omega$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $\mathbb{B}(\bar{x}; \delta) \subset \Omega$. 显然, 空集 $\varnothing$ 和全空间 $\mathbb{R}^n$ 是开的. 而且, 以 $\bar{x}$ 为中心 r 为半径的任意开球 $\mathbb{B}(\bar{x}; r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\| < r\}$ 是开的.

定义 1.5　集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是闭的, 如果它的余集 $\Omega^c = \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是开的. 因此, 空集、全空间、任意球 $\mathbb{B}(\bar{x}; r)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是闭的.

命题 1.6　(i) $\mathbb{R}^n$ 中任意开集族的并是开的.

(ii) $\mathbb{R}^n$ 中任意有限开集族的交是开的.

(iii) $\mathbb{R}^n$ 中任意闭集族的交是闭的.

(iv) $\mathbb{R}^n$ 中任意有限闭集族的并是闭的.

定义 1.7　设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的序列, 称 $\{x_k\}$ 收敛于 $\bar{x}$, 如果 $\|x_k - \bar{x}\| \to 0$(当 $k \to \infty$). 此时, 记

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x}.$$

由定义 1.7 可用来定义下面关于集合的重要的拓扑概念.

定义 1.8　设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集, 则:

(i) Ω 的闭包, 记为 $\overline{\Omega}$ 或 $\operatorname{cl}\Omega$, 定义为属于 Ω 的所有收敛序列的极限的全体.

(ii) Ω 的边界, 记为 $\operatorname{bd}\Omega$, 定义为集合 $\overline{\Omega} \setminus \operatorname{int}\Omega$.

我们能看到, Ω 的闭包是包含 Ω 的所有闭集的交, Ω 的内部是包含在 Ω 中的所有开集的并. 由定义得 $\bar{x} \in \overline{\Omega}$ 当且仅当对任意的 $\delta > 0$, 有 $\mathbb{B}(\bar{x}; \delta) \cap \Omega \neq \varnothing$. 而且, $\bar{x} \in \operatorname{bd}\Omega$ 当且仅当对任意的 $\delta > 0$, 闭球 $\mathbb{B}(\bar{x}; \delta)$ 均与集合 Ω 和它余集 Ω^c 相交.

定义 1.9 设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的序列, $\{k_\ell\}$ 是严格递增的正整数数列, 则新序列 $\{x_{k_\ell}\}$ 称为 $\{x_k\}$ 的子序列.

称一个集合 Ω 是有界的, 如果它包含在一个以原点为中心, 以某 $r>0$ 为半径的球内, 即 $\Omega \subset \mathbb{B}(0;r)$. 于是, 序列 $\{x_k\}$ 是有界的, 如果存在 $r>0$ 使得

$$\|x_k\| \leqslant r(\forall k \in \mathbb{N}).$$

下面重要的结果称为 Bolzano-Weierstrass 定理.

定理 1.10 $\mathbb{R}^n$ 中的任何有界序列都包含收敛的子序列.

下面的概念在分析和最优化中都起着非常重要的作用.

定义 1.11 称集合 Ω 在 $\mathbb{R}^n$ 中是紧的, 如果 Ω 中的每个序列都有收敛于 Ω 中某点的子序列.

下面的结果是 Bolzano-Weierstrass 定理的推论.

定理 1.12 $\mathbb{R}^n$ 的子集 Ω 是紧的当且仅当它是闭的和有界的.

对于 $\mathbb{R}^n$ 的子集 Ω, Ω_1 和 Ω_2, 以及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义运算:

$$\Omega_1+\Omega_2 := \{x+y \mid x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}, \quad \lambda\Omega := \{\lambda x \mid x \in \Omega\}.$$

易证下面的命题.

命题 1.13 设 Ω_1 和 Ω_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子集.

(i) 如果 Ω_1 是开的或者 Ω_2 是开的, 那么 $\Omega_1+\Omega_2$ 是开的.

(ii) 如果 Ω_1 是闭的且 Ω_2 是紧的, 那么 $\Omega_1+\Omega_2$ 是闭的.

先回顾实直线的子集有界性的概念.

定义 1.14 设 D 是实直线的子集, 数 $m \in \mathbb{R}$ 是 D 的一个下界, 如果有

$$x \geqslant m(\forall x \in D),$$

如果集合 D 有下界, 那么它是下有界的. 类似地, 数 $M \in \mathbb{R}$ 是 D 的一个上界, 如果

$$x \leqslant M(\forall x \in D),$$

那么 D 是上有界的, 如果它有一个上界. 而且, 称集合 D 是有界的, 如果它同时是下有界和上有界的.

下面给出集合的下确界和上确界的概念.

定义 1.15 设 $D \subset \mathbb{R}$ 是非空下有界的, D 的下确界, 记为 $\inf D$, 是 D 的最大下界. 当 D 是非空上有界时, 它的上确界, 记为 $\sup D$, 是 D 的最小上界. 如果 D 不是下有界 (上有界) 的, 则令 $\inf D := -\infty(\sup D := \infty)$. 我们约定 $\inf \varnothing := \infty$, $\sup \varnothing := -\infty$.

下面的基本公理确保这些概念是良好定义的.

完备性公理　对于 $\mathbb{R}$ 的任何非空子集 D, 如果它是上有界的, 那么它的最小上界存在且为一个实数.

利用完备性公理, 易见如果非空集合是下有界的, 那么它的最大下界存在且为一个实数.

全书为方便起见将考虑增广实值函数, 它在 $\overline{\mathbb{R}} := (-\infty, \infty]$ 中取值. 这里约定 $a + \infty = \infty (\forall a \in \mathbb{R})$, $\infty + \infty = \infty$, $t \cdot \infty = \infty (t > 0)$.

定义 1.16　设 $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ 是增广实值函数, $\bar{x} \in \Omega$ 且 $f(\bar{x}) < \infty$, 则称 f 在 $\bar{x}$ 是连续的, 如果对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得

$$|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \ (\|x - \bar{x}\| < \delta, \forall x \in \Omega).$$

称 f 在 Ω 上连续, 如果它在 Ω 中的任意点处是连续的.

显然, 由定义得如果 $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ 在 $\bar{x}$ 是连续的(其中 $f(\bar{x}) < \infty$), 那么它在 Ω 和以 $\bar{x}$ 为中心, 以某 $r > 0$ 为半径的球的交集上是有限的. 而且, $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ 在 $\bar{x}$ 连续 (其中 $f(\bar{x}) < \infty$) 当且仅当对 Ω 中收敛于 $\bar{x}$ 的任何序列 $\{x_k\}$, 有序列 $\{f(x_k)\}$ 收敛于 $f(\bar{x})$.

定义 1.17　设 $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in \Omega$ 且 $f(\bar{x}) < \infty$. 称 f 在 $\bar{x}$ 相对于 Ω 有局部极小值, 如果存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}), \quad \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}; \delta) \cap \Omega.$$

又称 f 在 $\bar{x}$ 相对于 Ω 有全局/绝对极小值, 如果

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}), \quad \forall x \in \Omega.$$

局部和全局极大值的概念可类似地定义.

在本节的最后, 给出数学分析和最优化中被称为 Weierstrass 存在性定理的基本结论.

定理 1.18　设 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧子集, 则存在 $\bar{x} \in \Omega$ 和 $\bar{u} \in \Omega$ 满足

$$f(\bar{x}) = \inf\{f(x) \mid x \in \Omega\}, \quad f(\bar{u}) = \sup\{f(x) \mid x \in \Omega\}.$$

在 4.1 节将给出一些定理 1.18 的“单边”版本.

1.2　凸　　集

下面我们先研究集合凸性, 接着研究凸函数. 几何的思想在凸分析及其推广和应用中起着基本的作用, 因此在本书中将利用几何的方法.