

高級中學課本

代 数

DAISHU

第一冊（第二分冊）

（試用本）

浙江省中小學教材編輯委員會編
浙 江 人 民 出 版 社

目 录

第五章 二元二次方程組	(1)
第六章 数列与极限	(30)
I 数列的概念	(30)
II 等差数列	(37)
III 等比数列	(49)
IV 极限初步概念	(60)
V 无穷递缩等比数列	(80)
第七章 幂的一般概念、指数函数	(92)
I 幂的一般概念	(92)
II 指数函数	(109)

第五章 二元二次方程組

§1 二元二次方程組 在物理学中我們学过落体运动的公式。

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

这是表示落体运动中物理量 s, v, g, t 的相互关系。如果我們已經知道某一落体，它的初速 $v_0 = 5$ 厘米/秒，落体加速度 $g = 980$ 厘米/秒²，那末这个落体运动的落下路程和时间的关系可用下式表达。

$$s = 5t + 490t^2. \quad (1)$$

另外，在我們計算許多有关实际問題中，也常常采用象下面这一种方程一样来表达。例如，我們已經知道一块长方形的地的面积为 A ，它的周长等于 $2l$ 。求这长方形的长和寬。

設这个长方形的长为 x ，寬为 y ，那末得方程組：

$$\begin{cases} x + y = l, \\ xy = A. \end{cases} \quad (2)$$

在上面(1)式中，它有两个未知量 s 和 t ，其中 t^2 是二次項，是各項中次数最高的。象这样的方程，叫做二元二次方程。

二元二次方程的一般形式是：

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

这里 a, b, c 不能都是零。 ax^2, bxy 、和 cy^2 叫做二次項， dx 和 ey 叫做一次項， f 叫做常数項。如

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 25,$$

$$y^2 = 4x$$

等等，都是二元二次方程。

很明显，一个二元二次方程一般可以有无数组解。因为，任意假定一个未知数的一个值，代入已知的二元二次方程，就可以得出另一个未知数的一元方程。只要这个一元方程有一个根或者两个根，我们就可以得出已知的二元二次方程的一组解或者两组解。如上面(1)式中，当

$$t = 1, 2, 3, 4, \dots$$

时，我们可以得到：

$$s = 495, 1,970, 4,425, 7,860, \dots$$

二元二次方程在研究两个量之间的相互关系中有它广泛的应用。象许多物理上、工程技术和几何的公式都用到它来表达量之间的相互关系。

由一个二元二次方程和一个二元一次方程，或者由两个二元二次方程组成的方程组，都叫做二元二次方程组。如上面(2)式，就是一个由二元二次方程和二元一次方程所组成的二元二次方程组。

下面我们来研究比较简单的二元二次方程组的解法。

§2 由一个二元二次方程和一个二元一次方程所组成的方程组 它的一般形式是：

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 & (a, b, c \text{ 不都是零}), \\ mx + ny + p = 0 & (m, n \text{ 不都是零}). \end{cases}$$

这种形式的方程组都可以用代入法来解。就是，把二元一次方程里的一个未知数用另一个未知数来表示(例如，把 y 用 x 来表示)，然后代入二元二次方程。这样，原来的二元二次方程就变成

了一元方程,并且它的次数总不大于2。解这个方程,我們就可以求得一个未知数(例如 x)的值。用这个值代入已知的二元一次方程,又可以求得另一个未知数(例如 y)的值。下面我們举出一些例子。

例 1 解方程組:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + x + 3y = 1, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1. & (2) \end{cases}$$

解 从(2), $y = 2x - 1.$ (3)

代入(1),得:

$$x^2 - 4(2x - 1)^2 + x + 3(2x - 1) = 1.$$

整理后得到:

$$15x^2 - 23x + 8 = 0.$$

解这个方程,得:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{8}{15}.$$

用 $x_1 = 1$ 代入(3),得:

$$y_1 = 1.$$

用 $x_2 = \frac{8}{15}$ 代入(3),得:

$$y_2 = \frac{1}{15}.$$

因此,这个方程組有两組解:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{8}{15}, \\ y_2 = \frac{1}{15}. \end{cases}$$

例 2 解方程組:

$$\begin{cases} x-3y-2=0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2+2x-3y+14=0. \end{cases} \quad (2)$$

解 从(1), $x=3y+2.$ (3)

代入(2),得:

$$(3y+2)^2-2(3y+2)y-3y^2+2(3y+2)-3y+14=0.$$

整理后得到:

$$11y+22=0.$$

$$\therefore y=-2.$$

代入(3),得:

$$x=-4.$$

因此,这个方程组有一组解:

$$\begin{cases} x=-4, \\ y=-2. \end{cases}$$

某些方程组,经过变形以后,如果可以化成由一个二元二次方程和一个二元一次方程所组成的方程组,那末,就可以用上面的方法来解。

例 3 解方程组:

$$\begin{cases} \frac{4}{x-1}-\frac{5}{y+1}=1, \\ \frac{3}{x+3}=\frac{2}{y}. \end{cases}$$

解 这个方程组经过变形后可以化成方程组:

$$\begin{cases} xy+6x-5y-10=0, \\ y=\frac{2}{3}(x+3). \end{cases}$$

解这个方程组,得:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -10, \\ y_2 = -\frac{14}{3}. \end{cases}$$

这两组解代入原方程组都能适合, 所以都是原方程组的解。

例 4 解方程组:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

解 这个方程组经过变形后可以化成方程组:

$$\begin{cases} 4x^2 - 17xy + 4y^2 = 0, \\ y = 10 - x. \end{cases}$$

解 这个方程组, 得:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 8. \end{cases}$$

验算后, 知道这两组解都是原方程组的解。

§ 3 方程组: $\begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases}$ 的特殊解法

(1) 方程组

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases}$$

除了可以用上面所说的一般方法来解外, 还可以利用韦达定理来解。由这个方程组, 我们知道两个未知数的和是 a , 积是 b , 所以这两个未知数就是方程

$$z^2 - az + b = 0$$

的两个根。

例 1 解方程组:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

解 x 和 y 是方程

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

的两个根。

解这个方程,得:

$$z_1=3, \quad z_2=2.$$

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=3. \end{cases}$$

例 2 解方程組:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8, \\ \frac{1}{xy} = 7. \end{cases}$$

解 先把 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{y}$ 作为未知数,它們就是方程

$$z^2 - 8z + 7 = 0$$

的两个根。

解这个方程,得:

$$z_1=7, \quad z_2=1.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1}=7, \\ \frac{1}{y_1}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x_2}=1, \\ \frac{1}{y_2}=7. \end{cases}$$

就是:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{7}, \\ y_1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=\frac{1}{7}. \end{cases}$$

驗算后,知道這兩組解都是原方程組的解。

(2) 方程組:

$$\begin{cases} x-y=a, \\ xy=b. \end{cases}$$

也可以利用韋達定理來解。因為這個方程組可以變形為:

$$\begin{cases} x+(-y)=a, \\ x \cdot (-y)=-b; \end{cases}$$

所以 x 和 $-y$ 就是方程

$$z^2 - az - b = 0$$

的兩個根。

例 3 解方程組:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ xy = 36. \end{cases}$$

解 原方程組可以變形為:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + (-\sqrt{y}) = 1, \\ \sqrt{x} \cdot (-\sqrt{y}) = -6. \end{cases}$$

由此可知, $\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{y}$ 是方程

$$z^2 - z - 6 = 0$$

的兩個根。

解這個方程,得:

$$z_1 = 3, \quad z_2 = -2.$$

因為 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{y}$ 分別是 x 和 y 的算術平方根,所以

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 3, \\ -\sqrt{y} = -2. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} x = 9, \\ y = 4. \end{cases}$$

驗算后,知道这組解是原方程組的解。

§4 方程組: $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x \pm y=b \end{cases}$ 的特殊解法 方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x+y=b \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=b \end{cases}$$

也可以利用韦达定理来解,只要設法求出 xy 的值就可以了。

例 1 解方程組:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7, \end{cases} \quad (2)$$

解 把(2)的两边都平方,得:

$$x^2+2xy+y^2=49; \quad (3)$$

从(3)的两边分別减去(1)的两边,得:

$$2xy=24,$$

$$xy=12. \quad (4)$$

从(2)和(4),知道 x 和 y 是方程

$$z^2-7z+12=0$$

的两个根。

解这个方程,得:

$$z_1=4, \quad z_2=3.$$

$$\therefore \begin{cases} x_1=4, \\ y_1=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=4. \end{cases}$$

驗算后,知道这两組解都是原方程組的解。

例 2 解方程組:

$$\begin{cases} x^2+y^2=6, \\ x-y=2. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=6, \\ x-y=2. \end{cases} \quad (2)$$

解 把(2)的两边都平方,得:

$$x^2-2xy+y^2=4. \quad (3)$$

从(3)的两边分别减去(1)的两边,得:

$$\begin{aligned} -2xy &= -2, \\ -xy &= -1. \end{aligned} \quad (4)$$

从(2)和(4),知道 x 和 $-y$ 是方程

$$z^2 - 2z - 1 = 0$$

的两个根.

解这个方程,得:

$$z_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad z_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2}, \\ -y_1 = 1 - \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 - \sqrt{2}, \\ -y_2 = 1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2}, \\ y_1 = -1 + \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 - \sqrt{2}, \\ y_2 = -1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

驗算后,知道这两组解都是原方程组的解.

§ 5 方程组: $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x \pm y = b \end{cases}$ 的特殊解法 我們知道,

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, 所以在 $b \neq 0$ 的时候, 可以把方程组:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x + y = b; \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

中的第一个方程的两边分别除以第二个方程的两边, 而把原方程组变形为方程组:

$$\begin{cases} x + y = b, \\ x - y = \frac{a}{b}; \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x - y = b, \\ x + y = \frac{a}{b}. \end{cases}$$

要解原方程组, 只要解变形后的方程组就可以了.

例 1 解方程组:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 48, \\ x + y = 6. \end{cases} \quad \begin{aligned} (1) \\ (2) \end{aligned}$$

解 把(1)的两边分别除以(2)的两边,得:

$$x-y=8.$$

解方程组:

$$\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=8, \end{cases}$$

可以得到:

$$\begin{cases} x=7, \\ y=-1. \end{cases}$$

这就是原方程组的解.

例 2 解方程组:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a^4-1, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=a^2+1. & (2) \end{cases}$$

解 把(1)的两边分别除以(2)的两边,得:

$$x+y=a^2-1.$$

解方程组:

$$\begin{cases} x+y=a^2-1, \\ x-y=a^2+1, \end{cases}$$

可以得到:

$$\begin{cases} x=a^2, \\ y=-1. \end{cases}$$

这就是原方程组的解.

上面的方法也可以用来解下列形式的方程组:

$$\begin{cases} x^3+y^3=a, \\ x+y=b(b \neq 0) \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x^3-y^3=a, \\ x-y=b(b \neq 0). \end{cases}$$

因为把第一个方程的两边分别除以第二个方程的两边,就可以把原方程组变形为:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = \frac{a}{b}, \\ x + y = b \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = \frac{a}{b}, \\ x - y = b. \end{cases}$$

例 3 解方程組:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x + y = 1. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x + y = 1. \end{cases} \quad (2)$$

解 把(1)的两边分别除以(2)的两边,得:

$$x^2 - xy + y^2 = 7.$$

解方程組:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

可以得到:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

这两組解都是原方程組的解.

例 4 解方程組:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} = 26, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2. \end{cases}$$

解 設 $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v$, 那末原方程組就成为:

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = 26, \\ u - v = 2. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = 26, \\ u - v = 2. \end{cases} \quad (2)$$

把(1)的两边分别除以(2)的两边,得:

$$u^2 + uv + v^2 = 13.$$

解方程組：

$$\begin{cases} u^2 + uv + v^2 = 13, \\ u - v = 2, \end{cases}$$

可以得到：

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ v_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = -1, \\ v_2 = -3. \end{cases}$$

就是：

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} = 3, \\ \frac{1}{y_1} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x_2} = -1, \\ \frac{1}{y_2} = -3. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

驗算后，知道這兩組解都是原方程組的解。

§6 列出方程來解應用題

例 1 生產隊的一個打麥組，用兩台打麥機在4天內可以把所有的麥子打完。如果先用第一台打麥機打了一半，然後用第二台打麥機打余下的一半，那末一共要打9天。問每一台打麥機單獨打所有的麥子各需多少天？

解 設第一台打麥機單獨打完需要 x 天，第二台打麥機單獨打完需要 y 天，那末第一台打麥機每天可打所有麥子的 $\frac{1}{x}$ ，第二台打麥機每天可打所有麥子的 $\frac{1}{y}$ 。根據題意，得：

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}, \\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{y}} = 9. \end{cases}$$

解这个方程組，得：

$$x=12 \text{ 或 } 6;$$

$$y=6 \text{ 或 } 12.$$

答：一台打麦机单独打完所有的麦子需要 12 天，另一台打麦机单独打完所有的麦子需要 6 天。

例 2 甲乙两人作 400 米竞走。第一次甲让乙先走 25 米，結果还比乙早到 15 秒。第二次甲让乙先行 36 秒，結果甲落后 40 米。問两人走 400 米各需多少时间？

解一：設甲需 x 秒，乙需 y 秒。第一次甲以 x 秒走 400 米，故速度为每秒 $400/x$ 米，乙以 $(x+15)$ 秒走 $(400-25)$ 米，故速度为每秒 $375/(x+15)$ 米。第二次甲的速度为每秒 $360/(y-36)$ 米，乙的速度为每秒 $400/y$ 米。故得：

$$\begin{cases} \frac{400}{x} = \frac{360}{y-36}, \\ \frac{375}{x+15} = \frac{400}{y}. \end{cases}$$

解这个方程組，得：

$$x=120, \quad y=144.$$

答：甲需 120 秒，乙需 144 秒。

解二：設甲的速度为 A 米/秒，乙的速度为 B 米/秒，根据題意，得：

$$\begin{cases} \frac{400-25}{B} - \frac{400}{A} = 15, \\ \frac{400}{B} - \frac{400-40}{A} = 36. \end{cases}$$

解这个方程组,得:

$$\frac{1}{A} = \frac{3}{10}, \quad \frac{1}{B} = \frac{9}{25}.$$

答:甲需 $400\left(\frac{1}{A}\right) = 120$ (秒), 乙需 $400\left(\frac{1}{B}\right) = 144$ (秒).

习 题

解下列各方程组(第1--3题):

$$1. (1) \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0, \\ x + 2y = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x^2 - 5xy + y^2 + 10x + 12y = 100, \\ 2x - 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

$$2. (1) \begin{cases} 2(y+3) = (3x-y)(3y-x), \\ 5(x-y) = 2(x+y); \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{2x-5}{x-2} + \frac{2y-3}{y-1} = 2, \\ 3x-4y = 1. \end{cases}$$

$$3. (1) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{41}{20}, \\ x+y = 41; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{5}{6}, \\ x-y-5 = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 3, \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 0; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} (x+2)(y-2) = xy, \\ \sqrt{(x+1)(y+4)} - x = 3. \end{cases}$$

4. (1) 如果方程组:

$$\begin{cases} y^2 - 4x - 2y + 1 = 0, \\ y = mx + 2. \end{cases}$$

有相同的两组实数解,求 m 的值;

(2) m 取什么值的时候,这个方程组没有实数解?

5. 解方程組:

$$\begin{cases} x-y=2, \\ y+z=7, \\ x^2+z^2=41. \end{cases}$$

提示: 把前两个方程里的 x 和 z 都用 y 来表示.

6. 解下列方程組:

$$(1) \begin{cases} x+y=5, \\ x+z=6, \\ xy+xz+yz=29; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x-2y+z=-1, \\ 3x-5y+2z=2, \\ x^2+y^2+z^2=49. \end{cases}$$

利用韦达定理解下列各方程組(第 7—9 題):

$$7. (1) \begin{cases} x+y=2, \\ xy=-15; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a+y=2a, \\ xy=-3a^2. \end{cases}$$

$$8. (1) \begin{cases} x-y=16, \\ xy=-48; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x-y=b, \\ xy=2b^2. \end{cases}$$

$$9. (1) \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ xy=4; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \\ xy=6; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \sqrt{x+1}-\sqrt{y-1}=1, \\ (x+1)(y-1)=4; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} ax+by=a^2+b^2, \\ xy=ab. \end{cases}$$

10. 在下列各种情况, 解方程組 $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$

$$(1) a^2 > 4b;$$

$$(2) a^2 = 4b;$$

$$(3) a^2 < 4b.$$

利用韦达定理解方程組:

$$11. (1) \begin{cases} x+y=5, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{4}{x^2}+\frac{9}{y^2}=6, \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=2. \end{cases}$$

12. 解方程組 $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ xy=b; \end{cases}$ 并且加以討論.

利用除法解下列各方程組: