M×N棋盘的完全覆盖60例

（中学数学奥林匹克专题讲座之一）

张宁生　编著

职工教育出版社

M×N棋盘的完全覆盖60例

（中学数学奥林匹克专题讲座之一）

张宁生　编著

职 工 教 育 出 版 社

内 容 简 介

m×n棋盘的完全覆盖问题是组合数学的一部分，近几年国内外奥林匹克数学竞赛中，常出现此类问题。

为了帮助参加奥林匹克数学竞赛的中学生及数学爱好者了解、学习这部分内容，作者对这一问题进行了较为系统地整理介绍。内容包括：基本概念，利用反证法、染色技术、数学归纳法，完全覆盖数，利用上、下限夹逼的方法，猜想等。

作者以此为讲稿，在北京市以及北京市东城、西城等区数学奥林匹克学校、数学课外小组讲授，受到学生欢迎。

m×n棋盘的完全覆盖60例

（中学数学奥林匹克专题讲座之一）

张宁生 编著

责任编辑 翟连林

职工教育出版社出版

（北京西城教场胡同4号）

绥中印刷厂印刷

新华书店首都发行所发行

•

787×1092毫米 1/32 印张1.5 30千字

1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷

印数1—10000 定价0.60元

统一书号ISBN7—80059—278—2/G·106

目　录

引　言

m×n棋盘的完全覆盖问题等价于分子物理学中著名的所谓二聚物问题。它起源于表面上双原子的分子——二聚物吸收作用的研究。棋盘上的方格相当于分子，而骨牌（即2×1的矩形）相当于二聚物。〔1〕

m×n棋盘的完全覆盖问题是组合数学的一个部分，近几年国内外中学奥林匹克数学竞赛中，常出现此类问题。编写本书的目的就是想对此类问题作一系统整理介绍。

编写本书之前，作者曾在北京师院分院数学系86级、85级，北大附中高一数学小组，北京市奥林匹克数学学校高二组，北京市东城区数学奥林匹克学校等处讲过，本书就是在此基础上扩充修改而成。感谢上述学校师生们的支持。

§1 基本概念

若用一些各种不同的形块去铺盖m×n棋盘，使得棋盘上的所有方格都被形块盖住，并且没有形块交叉重叠地盖在棋盘上，则称这一铺盖为m×n棋盘的一个完全覆盖，简称覆盖。

常见的形块有

1 骨牌，也叫日形块。即2×1的矩形。如图1（1）。

2 目形块。即3×1的矩形。如图1（2）。

3 3—L形块。如图1（3）。

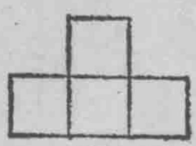
4 4—L形块。如图1（4）。

5 凸形块。如图1（5）

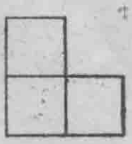
其它各种形块，不再一一列举。

(1)

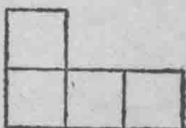
(2)



(5)



(3)



(4)

例1　一个$2\times n$的棋盘存在日形块覆盖（$n\in N$）。如图2

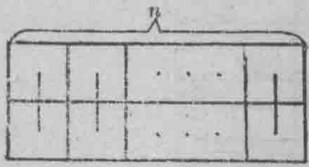


图2

练习1　一个4×4的棋盘存在日形块覆盖。

练习2　一个$3\times n$的棋盘存在日形块覆盖（$n\in N$）

例2　一个2×3的棋盘存在3—L形块覆盖。如图3

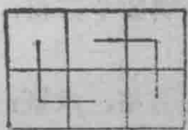


图3

练习3　一个2×4的棋盘存在4—L形块覆盖。

练习4　一个2×5的棋盘存在5—L形块覆盖。

例3　一个2×2的棋盘存在几种日形块覆盖？

答：有两种。如图4

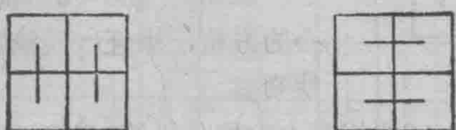


图4

练习5　一个2×3的棋盘存在几种日形块覆盖？

练习6　一个2×4的棋盘存在几种日形块覆盖？

练习7　一个3×4的棋盘存在几种日形块覆盖？

定理1　$m\times n$存在日形块覆盖的充要条件是m、n中至少有一个是偶数。

证　（1）充分性

不失一般性，可设$m=2k$，则

$$m\times n=2k\times n=k\ (2\times n)$$

$$=\overbrace{2\times n+2\times n+\cdots\cdots+2\times n}^{k个}$$

由例1知$m\times n$存在日形块覆盖。

（2）必要性

若$m\times n$存在日形块覆盖，则必覆盖偶数个方格，即mn是偶数，故m、n中至少有一个是偶数。

例4 在3×3的棋盘上，去掉中心的方格，求证：残缺棋盘存在日形块覆盖。

如图5

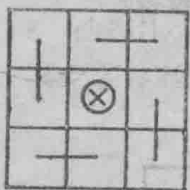


图5

练习8 在3×3的棋盘上去掉角上的一个方格，求证：残缺棋盘存在日形块覆盖

练习9 在5×5的棋盘上去掉中心的方格，求证：残缺棋盘存在日形块覆盖

例5 在5×7的棋盘上去掉位于第3行第3列的方格，求证：残缺棋盘存在日形块覆盖。

证：如图6那样先覆盖第3行、第3列。剩余的4个矩形由定理1知也被日形块覆盖。

练习10 在5×7的棋盘上去掉位于第2行第4列的方格。求证：残缺棋盘存在日形块覆盖。

练习11 由例5及练习10，试寻求一般的结果。

例6 一个3×8的棋盘存在4—L形块覆盖。如图7

例7 一个5×9的棋盘存在3—L形块覆盖。如图8

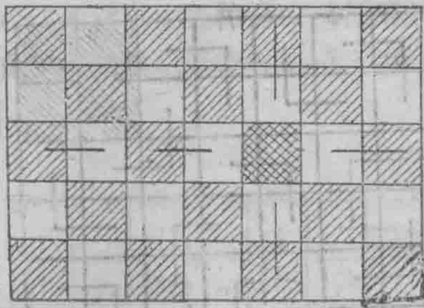


图6

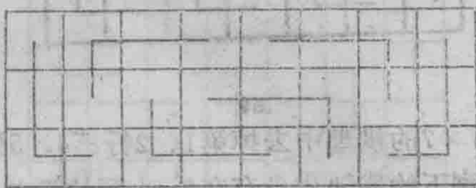


图7

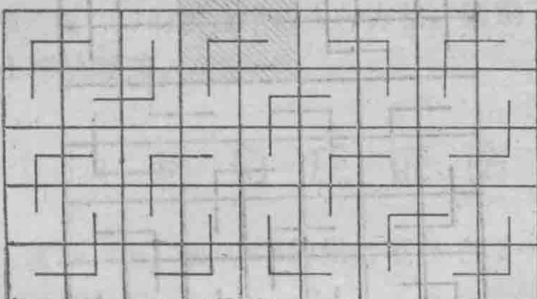


图8

例8　在7×7的棋盘中去掉一个2×2的矩形角， 则剩下的残缺棋盘存在3—L形块覆盖.如图9

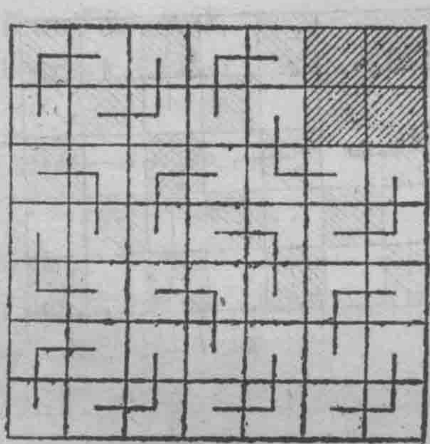


图9

例9 在7×7的棋盘中去掉第1、2行第4、5列所组成的2×2矩形，则剩下的残缺棋盘存在3—L形块覆盖．如图10

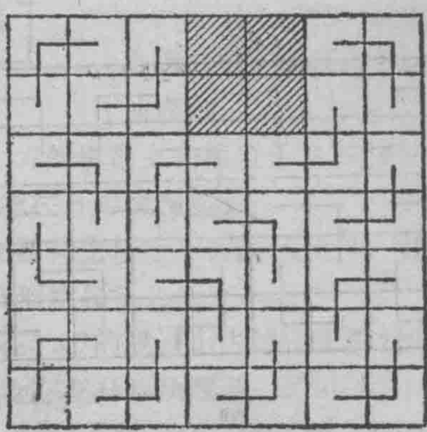


图10

例10 在7×7的棋盘中去掉第3、4行第4、5列所组成的2×2矩形，则剩下的残缺棋盘存在3—L形块覆盖．如图11

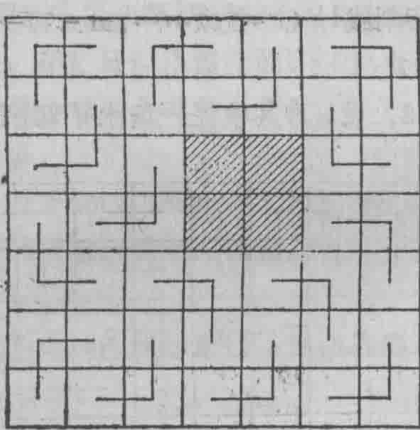


图11

练习12 在7|7的棋盘中任去一方格，则剩下的残缺棋盘存在3—L形块覆盖。

§2 利用反证法

例11 若$3\nmid mn$，则$m\times n$的棋盘不存在3—L形块覆盖。

证： 若$m\times n$存在3—L形块覆盖，设被k个3—L形块覆盖，则

$mn=3k$

因而$3\mid mn$与已知$3\nmid mn$矛盾。

故$m\times n$不存在3—L形块覆盖。

练习13 若m、n都是奇数，则$m\times n$的棋盘不存在日形块覆盖

定理2 若n是偶数，则在矩形$m\times n$中将边长为m的边m等分的水平切割线l_i（$i=1,2\cdots\cdots,m-1$）一定切割偶数个日形块。

证：如图12。设l_i为其中任一条水平切割线。

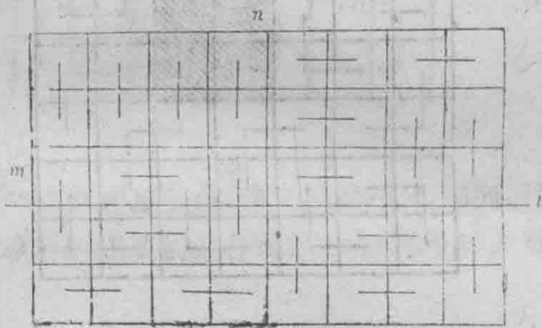


图12

由于n是偶数，故l_i以上那一部分有偶数个方格。设为$2n_1$，它可以看成两部分的和。

一部分为l_i切割x个日形块所剩下的x个方格；

另一部分为l_i上为日形块覆盖的偶数个方格，设为$2n_2$，

则$x+2n_2=2n_1$

故x为偶数。

例12 求证：对于6×6棋盘的任一日形块覆盖，一定存在水平的或垂直的切开棋盘的方法，使切割线不穿过任一日形块。

证（利用反证法）

如果不存在这种不穿过任一日形块的切割线。则每一条切割线至少要切割一个日形块。由定理2知每条切割线至少要切割2个日形块。

5条水平切割线至少要切割10个日形块；

5条垂直切割线至少要切割10个日形块。

因此推出：存在日形块覆盖的6×6棋盘至少要20个日形块去覆盖。即至少有40个方格，矛盾。

故例12得证。

练习14　对于2m×2和2m×4棋盘的任一日形块覆盖，一定存在水平的或垂直的切开棋盘的方法，使切割线不穿过任一日形块。

练习15　如图13的残缺矩形不存在日形块覆盖。

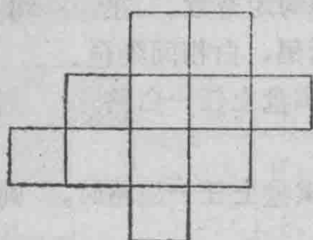


图13

§3 利用染色技术

例13　若在一个3×5的棋盘上去掉位于第2行第1列的方格，则残缺棋盘不存在日形块覆盖。

分析：（1）若干个日形块覆盖偶数个方格。而残缺棋盘有14个方格，也是偶数个方格。从这里显示不出矛盾。

（2） 如果利用染色技术，将3×5中的方格黑、白相间染色，将会突出日形块覆盖的本质：一个日形块不论怎样去覆盖，一定恰盖住黑、白各一个方格。由此不难得到证明。

证：将3×5的棋盘黑、白相间染色。如图14。

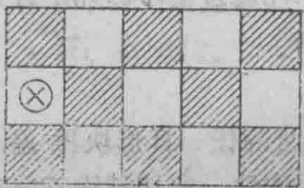


图14

今去掉位于第2行第1列的方格（见图14中的⊗）

现在观察残缺棋盘中有8个黑格，6个白格。

如果存在日形块覆盖，则必盖住黑、白格各7个，矛盾

故不存在日形块覆盖。

定理3 若m、n均为奇数，在$m\times n$棋盘中假定左上角的方格染黑色，然后黑、白相间染色。

（1） 当去掉棋盘上任一白格时，则残缺棋盘不存在日形块覆盖；

（2） 当去掉棋盘上任一黑格时，则残缺棋盘存在日形块覆盖。

证：由已知可设$m=2k-1$，$n=2l-1$（$k, l\in N$），则

$m\times n=(2k-1)\times(2l-1)$

$=(2kl-k-l+1)+(2kl-k-l)$

因为左上角的方格染成黑色，则必有$2kl-k-l+1$个黑格、$2kl-k-l$个白格。

（1） 当去掉棋盘上任一白格时，若残缺棋盘存在日形块覆盖，则一定覆盖相同数目的黑、白格，矛盾。

故不存在日形块覆盖。

（2） 当去掉棋盘上任一黑格时，分两种情况讨论：

1） 此黑格位于奇数行奇数列，仿例5证之；

2） 此黑格位于偶数行偶数列，仿练习10证之。

练习16 在8×8棋盘中剪去左上角与右下角的方格，剩下的62个方格是否存在日形块覆盖？

练习17 在8×8棋盘中，若黑、白相间染色，今剪去黑、白各一个方格时如何？例如

（1） 当去掉的黑格位于第1行第3列、白格位于第4行第5列时；

（2） 当去掉的黑格位于第2行第6列、白格位于第5行第4列时

例14 一个6×6的棋盘，黑、白相间染色，今去掉一些黑格、白格后残缺棋盘如图15。问：是否存在日形块覆盖？

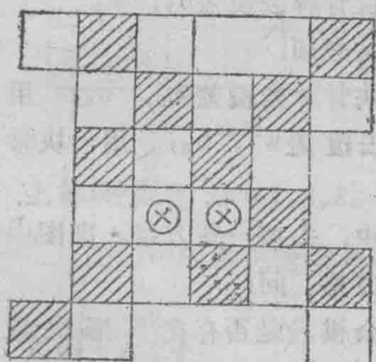


图15

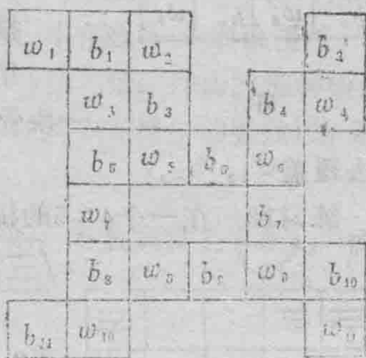


图16

分析 首先检查黑、白格数目是否相同。如不相同，则不存在日形块覆盖。今相同，只好用染色的方法了。

解：给黑、白格分别编号

用w_i表示第i个白 格， b_j表示第j个黑格。如图16。

（1） w_1只与b_1相邻，要存在日形块覆盖的话，必盖住w_1，这只有用一块骨牌去覆盖w_1，b_1；

同理

（2） 必须用一块骨牌去覆盖b_2，w_4；

用一块骨牌去覆盖b_{11}，w_{10}；

用一块骨牌去覆盖b_{10}，w_{11}。

（3） 再看残余的图形。如图17

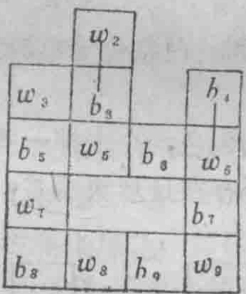


图17

显然又必须用一块骨牌去覆盖w_2，b_3；用一块骨牌去覆盖b_4，w_6

（4） 再看残余图形， 显然又必须：

用一块骨牌去覆盖w_3，b_5；

用一块骨牌去覆盖b_7，w_9。

接着又必须：

用一块骨牌去覆盖w_5，b_6；用一块骨牌去覆 盖w_7，b_8；用一块骨牌去覆盖w_8，b_9。

练习18 在一个4×5的棋盘中，去掉一些方格，即图中$\boxed{三}$的方格。问：

残余棋盘是否存在日形块覆盖？（见图18）

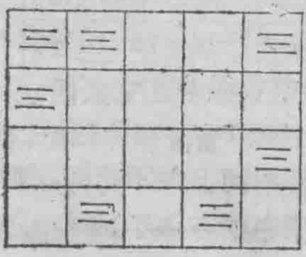


图18

练习19 在一个4×5的棋盘中，去掉一些方格，即图中$\boxed{三}$的方格中。问：

残余棋盘是否存在日形块覆

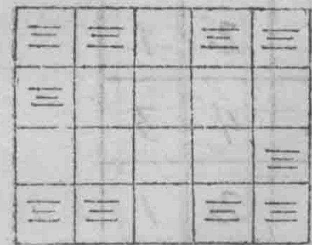


图19

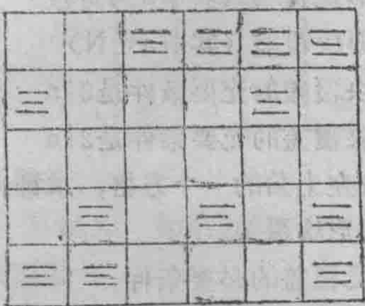


图20

盖？（见图19）

练习20　在一个5×6的棋盘中，去掉一些方格，即图中$\boxed{\text{三}}$的方格。如图20。问：

残缺棋盘是否存在日形块覆盖？

练习21　在一个m×n的棋盘中，$m\geqslant 2$，$n\geqslant 2$，且m、n中至少有一个为偶数，今黑、白相间染色（左上角染为黑格），若在边沿上任去掉一黑格、一白格，则此残缺棋盘存在日形块覆盖。

例15　一个3×7的棋盘不存在3—L形块覆盖。

证：如图21那样染色。其中方格中的整数i表示染上第i种颜色（i=1,2,3，4）

图21中的染色规律是这样的，奇数列染上$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$，偶数列染上$\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$

如果3×7棋盘存在3—L形块覆盖的话，由于任一3—L形块恰盖住三种不同颜色的方格各一个，最多盖住一个1色格。

7个3—L形块最多盖住7个1色格，但图21中出现8个1色格。矛盾。