新课标**高考数学**
第一轮复习用书

2014

洞穿高考
数学辅导丛书

# 新课标高考数学题型全归纳

## 变式题参考答案

## 文科版

本书独创了“题型+模型”教学法，囊括176个核心题型，演绎各种变式及方法技巧，帮你轻松搞定高考！

主　编●张永辉
副主编●徐贵冬　余　臣　张宏卫
徐宣庆　王晓明

清华大学出版社

洞穿高考

数学辅导丛书

# 新课标高考数学题型全归纳

## 变式题参考答案

## 文科版

主　编●张永辉

副主编●徐贵冬　余　臣　张宏卫

徐宣庆　王晓明

清华大学出版社

北　京

# 变式题参考答案

## 第一章　集合与常用逻辑用语

**【例 1.1 变式 1】**

**分析**　由 $A\cup B=A$，得 $B\subseteq A$，利用子集的定义和集合元素的性质求解.

**解析**　由已知得 $B\subseteq A$，所以 $x^2\in A$，又 $x^2\neq 1$，所以 $x^2=3$ 或 $x^2=x$.

(1)当 $x^2=3$ 时，得 $x=\pm\sqrt{3}$，都符合；

(2)当 $x^2=x$ 时，得 $x=0$ 或 $x=1$，而 $x\neq 1$，所以 $x=0$.

综上所述，共有 3 个值.故选 B.

**评注**　求解过程中一定要分类讨论，同时要注意集合元素的互异性.

**【例 1.1 变式 2】**

**解析**　依题意 $A*B=\{0,2,4\}$，则集合 $A*B$ 的所有元素之和为 6.故选 D.

**【例 1.2 变式 1】**

**解析**　因为 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{0,-1\}$，所以 $N\subsetneqq M$.故选 B.

**【例 1.4 变式 1】**

**解析**　由 $A\subseteq B$，如图 1-9 所示得 $a\geqslant 6$.故实数 $a$ 的取值范围是 $[6,+\infty)$.

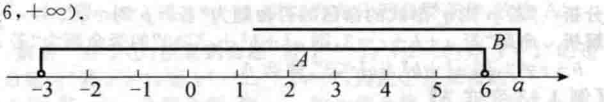

图 1-9

**评注**　端点值的判断通常是初学者的难题，我们可用假设法帮助判断.即假设参数可取端点，与已知吻合，假设成立；与已知不吻合，假设不成立.

**【例 1.4 变式 2】**

**解析**　如图 1-10所示，$A$ 为 $(-\infty,1]$，$B$ 为 $[a,+\infty)$，要使 $A\cup B=\mathbf{R}$，只需 $a\leqslant 1$.故实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

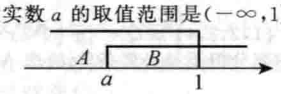

图 1-10

**【例 1.4 变式 3】**

**解析**　由 $P\cup M=P$，得 $M\subseteq P$，则 $a\in[-1,1]$.故选 C.

**【例 1.7 变式 1】**

**解析**　由 $\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{x\mid x\leqslant 10,x\in\mathbf{N}^*\}$ 知，集合 $M$ 为集合 $\{1,2\}$ 与集合 $\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 任一非空子集的并集，所以集合 $M$ 的个数为 $2^8-1=255$.

**评注**　求有限集的子集个数问题，有以下结论：

结论 1：含有 $n$ 个元素的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的子集个数为 $2^n$，真子集个数为 $2^n-1$，非空子集个数为 $2^n-1$，非空真子集个数为 $2^n-2(n\in\mathbf{N}^*)$.

结论 2：设 $m,n\in\mathbf{N}^*$，$m<n$，$B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则有，

①满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\subseteq A\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的集合 $A$ 的个数是 $2^{n-m}$；

②满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\subseteq A\subsetneqq\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的集合 $A$ 的个数是 $2^{n-m}-1$；

③满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\subsetneqq A\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的集合 $A$ 的个数是 $2^{n-m}-1$；

④满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\subsetneqq A\subsetneqq\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的集合 $A$ 的个数是 $2^{n-m}-2$.

**【例 1.8 变式 1】**

**解析**　$A$ 表示圆 $x^2+y^2=1$ 上的点的集合，$B$ 表示直线 $x+y=1$ 上的点的集合，由直线与圆的位置关系的判定知直线与圆相交，因此集合 $A\cap B$ 的元素个数为 2.故选 C.

**【例 1.8 变式 2】**

**分析**　本题考查集合的概念与运算.

**解析**　先化简再求交集，由已知得 $P=\{0,1,2\}$，$M=\{-3\leqslant x\leqslant 3\}$，故 $P\cap M=\{0,1,2\}\cap\{-3\leqslant x\leqslant 3\}=\{0,1,2\}$.故选 B.

**评注**　本题若忽视集合 $P$ 中元素的属性，易误将集合 $P$ 等同于集合 $\{x\mid 0\leqslant x<3\}$.

**【例 1.9 变式 1】**

**解析**　由已知条件可得 $A=\{x\mid \log_2 x\leqslant 2\}=(0,4]$，$B=(-\infty,a)$，若 $A\subseteq B$，则 $a>4$，

又实数 $a$ 的取值范围是 $(c,+\infty)$，得 $c=4$.

**【例 1.9 变式 2】**

**解析**　$\complement_U B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$.故选 D.

**【例 1.10 变式 1】**

**解析**　由 $M\cap\complement_U N=\{2,4\}$ 可得集合 $N$ 中不含有元素 2，4，由排除法可知选项 B 正确.故选 B.

**【例 1.10 变式 2】**

**分析**　本题中的集合关系比较抽象，可以考虑使用韦恩图求解.

**解析**　作出韦恩图，如图 1-11所示，设所求为 $x$ 人，则喜爱篮球又喜爱足球的有 $15-x$ 人，喜爱足球不喜爱篮球的有 $8-(15-x)=x-7$ 人，故有 $x+(15-x)+(x-7)+8=30$，即 $x=14$.

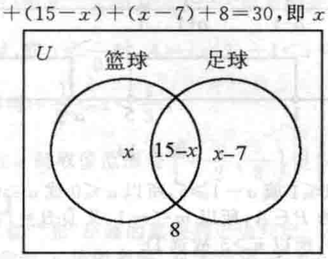


图 1-11

**【例 1.11 变式 1】**

**解析**　由已知阴影部分表示集合 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\{1,2,3,4,5\}\cap\{x\in\mathbf{R}\mid x<2\}=\{1\}$.故选 A.

**【例 1.11 变式 2】**

**解析**　如图 1-12所示，因为 $N\cap\complement_I M=\varnothing$，所以 $N\subseteq M$，所以 $M\cup N=M$.故选 A.

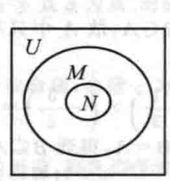


图 1-12

**【例 1.12 变式 1】**

**解析**　(1)$A-B=(|0-1|,|1-1|,|0-1|,|0-0|,|1-0|)=(1,0,1,0,1)$，$d(A,B)=3$.

(2)证：设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$，因为 $a_i,b_i\in\{0,1\}$，所以 $|a_i-b_i|\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，从而 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)\in S_n$.又 $d(A-C,B-C)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left||a_i-c_i|-|b_i-c_i|\right|$，

由题意知 $a_i,b_i,c_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，

当 $c_i=0$ 时，$\left||a_i-c_i|-|b_i-c_i|\right|=|a_i-b_i|$；

当 $c_i=1$ 时，$\left||a_i-c_i|-|b_i-c_i|\right|=|(1-a_i)-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$，所以 $d(A-C,B-C)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=d(A,B)$.

**最有效训练题**

1.D 解析 解法一：因为 $A\cap B=\{3\}$，所以 $3\in A$，又因为 $\complement_I B\cap A=\{9\}$，所以 $9\in A$. 又 $\forall x\in U(x\neq3,x\neq9)$，若 $x\in A$，则 $x\notin B$，$x\in\complement_U B$，$x\in(\complement_U B)\cap A$，与 $(\complement_U B)\cap A=\{9\}$ 矛盾，即 $A=\{3,9\}$. 故选 D.

解法二：$(A\cap B)\cup[A\cap(\complement_U B)]=A\cap[B\cup(\complement_U B)]=A\cup U=A$. 即 $A=\{3,9\}$. 故选 D.

解法三：本题也可以用 Venn 图的方法帮助理解. 如图 1-13所示，$A=\{3,9\}$. 故选 D.

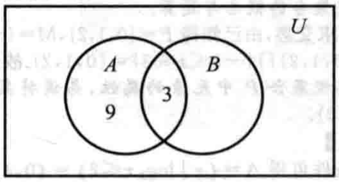


图 1-13

2.B 解析 因为 $A=\{x\mid y=\sqrt{4-x^2}\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y\mid y=x^2+1\}=\{y\mid y\geqslant1\}$，所以 $A\cap B=[1,2]$. 故选 B.

3.B 解析 $A\cap B=\{0,1\}$，$A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$，则 $A*B=\{(0,-1),(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,-1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)\}$ 共有 10 个元素. 故选 B.

4.D 解析 由 $\complement_U M=\{5,7\}$，且 $U=\{1,3,5,7\}$，得 $M=\{1,3\}=\{1,|a-5|\}$，所以 $|a-5|=3$，得 $a=2$ 或 8. 故选 D.

5.C 解析 由 $|x-a|<1$ 得 $-1<x-a<1$，即 $a-1<x<a+1$. 如图 1-14所示.

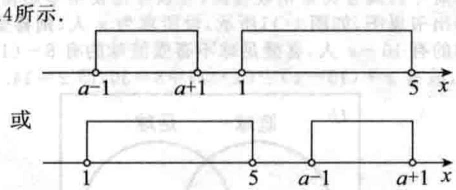


图 1-14

由图可知 $a+1\leqslant1$ 或 $a-1\geqslant5$，所以 $a\leqslant0$ 或 $a\geqslant6$. 故选 C.

6.D 解析 因为 $P\in A$，所以 $m<-1$，又 $\complement_U B=\{(x,y)\mid x+y-n<0\}$，$P\in\complement_U B$，所以 $n>5$. 故选 D.

7.$-1$ 解析 $3\in B$ 所以 $a+2=3$ 或 $a^2+2=3$. 若 $a+2=3$，得 $a=1$，此时 $a+2=a^2+2$，不满足集合元素的互异性，故舍去. 若 $a^2+2=3$ 得 $a=1$ 或 $-1$，同样 $a=1$ 舍去，当 $a=-1$ 时，$B=\{1,3\}$，$A\cap B=\{3\}$，满足题意，所以 $a=-1$.

8.1 解析 依题意，$2\in A$，所以 $\frac{-1}{2+1}=-\frac{1}{3}\in A$，从而 $\frac{-1}{-\frac{1}{3}+1}=-\frac{3}{2}\in A$，$\frac{-1}{-\frac{3}{2}+1}=2\in A$，故 A 中只有 $2,-\frac{1}{3},-\frac{3}{2}$ 三个元素，它们的积为 $2\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=1$.

9.(2,4] 解析 由 $A\cup B=A$，得到 $B\subseteq A$，又 $B\neq\varnothing$，则 $m+1\geqslant-2$ 且 $2m-1\leqslant7$ 且 $2m-1>m+1$，解得 $2<m\leqslant4$，所以 $m$ 的取值范围是(2,4].

10.$(-\infty,-1]$ 解析 设全集

$U=\{m\mid\Delta=(-4m)^2-4(2m+6)\geqslant0\}=\{m\mid 2m^2-m-3\geqslant0\}=\left\{m\,\middle|\,m\leqslant-1 \text{ 或 } m\geqslant\frac{3}{2}\right\}$. 设方程 $x^2-4mx+2m+6=0$ 的两根为 $x_1,x_2$. 若方程 $x^2-4mx+2m+6=0$ 的根 $x_1,x_2$ 均非负，

则 $\begin{cases}m\in U,\\x_1+x_2=4m\geqslant0,\\x_1x_2=2m+6\geqslant0.\end{cases}$ 解得 $m\geqslant\frac{3}{2}$. 因为 $A\cap(-\infty,0)\neq\varnothing$，

所以 $\left\{m\,\middle|\,m\geqslant\frac{3}{2}\right\}$ 关于 $U$ 的补集 $\{m\mid m\leqslant-1\}$ 即为所求.

11.解析 (1)当 $a=1$ 时，由已知得 $x(x-2)<0$，解得 $0<x<2$. 所以 $M=\{x\mid0<x<2\}$.

(2)由已知得 $N=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant3\}$.

①当 $a<-1$ 时，因为 $a+1<0$，所以 $M=\{x\mid a+1<x<0\}$，因为 $M\subseteq N$，所以 $-1\leqslant a+1<0$，解得 $-2\leqslant a<-1$.

②若 $a=-1$ 时，$M=\varnothing$，显然有 $M\subseteq N$，所以 $a=-1$ 成立.

③若 $a>-1$ 时，因为 $a+1>0$，所以 $M=\{x\mid0<x<a+1\}$.

又 $N=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant3\}$，因为 $M\subseteq N$，所以 $0<a+1\leqslant3$，解得 $-1<a\leqslant2$.

综上所述，$a$ 的取值范围是 $[-2,2]$.

12.解析 (1)当 $n=10$ 时，集合 $A=\{1,2,3,\cdots,19,20\}$，

$B=\{x\in A\mid x>9\}=\{10,11,12,\cdots,19,20\}$ 不具有性质 $P$.

因为对任意不大于 10 的正整数 $m$，都可以找到集合 $B$ 中两个元素 $b_1=10$ 与 $b_2=10+m$，使得 $|b_1-b_2|=m$ 成立. 集合 $C=\{x\in A\mid x=3k-1,k\in\mathbf{N}^*\}$ 具有性质 $P$.

因为可取 $m=1<10$，对于该集合中任意一对元素 $c_1=3k_1-1$，$c_2=3k_2-1$，$k_1,k_2\in\mathbf{N}^*$ 都有 $|c_1-c_2|=3|k_1-k_2|\neq1$.

(2)若集合 $S$ 具有性质 $P$，那么集合 $T=\{(2n+1)-x\mid x\in S\}$ 一定具有性质 $P$.

首先因为 $T=\{(2n+1)-x\mid x\in S\}$，任取 $t=(2n+1)-x_0\in T$，其中 $x_0\in S$，因为 $S\subseteq A$，所以 $x_0\in\{1,2,3,\ldots,2n\}$，从而 $1\leqslant(2n+1)-x_0\leqslant2n$，即 $t\in A$，所以 $T\subseteq A$. 由 $S$ 具有性质 $P$，可知存在不大于 $n$ 的正整数 $m$，使得对 $S$ 中的任意一对元素 $s_1,s_2$，都有 $|s_1-s_2|\neq m$，对上述取定的不大于 $n$ 的正整数 $m$，从集合 $T=\{(2n+1)-x\mid x\in S\}$ 中任取元素 $t_1=2n+1-x_1$，$t_2=2n+1-x_2$，其中 $x_1,x_2\in S$，都有 $|t_1-t_2|=|x_1-x_2|$；因为 $x_1,x_2\in S$，所以有 $|x_1-x_2|\neq m$，即 $|t_1-t_2|\neq m$，所以集合 $T=\{(2n+1)-x\mid x\in S\}$ 具有性质 $P$.

**【例 1.13 变式 1】**

解析 由原命题为真命题，则逆否命题为真，且逆命题为假，则否命题为假. 因此逆命题、否命题、逆否命题这三个命题中正确的个数是 1.

**【例 1.13 变式 2】**

分析 "若 $p$ 则 $q$"形式的命题的否命题为"若 $\neg p$ 则 $\neg q$".

解析 命题"若 $a+b+c=3$，则 $a^2+b^2+c^2\geqslant3$"的否命题为"若 $a+b+c\neq3$，则 $a^2+b^2+c^2<3$". 故选 A.

**【例 1.13 变式 3】**

解析 "若 $a,b$ 都是奇数，则 $a+b$ 是偶数"显然是真命题，那么其逆否命题也为真命题，故 A,C 不成立，那么只能从 B,D 中选择，从原命题的逆否命题出发，可得到条件为"若 $a+b$ 不是偶数".

故选 B.

评注 由本题可总结出："都是"的否定是"不都是"，直接由逆否命题的概念得选选项 B.

**【例 1.14 变式 1】**

解析 依题意 $P=\{1,2,3,4\}\subsetneqq Q=\{x\mid0<x<5,x\in\mathbf{R}\}$，则"$x\in P$"是"$x\in Q$"的充分但不是必要条件. 故选 A.

**【例 1.14 变式 2】**

解析 由"$0<ab<1$"可知 $a,b$ 同号.

若 $b>0$，则有"$0<ab<1$"⇒"$a<\frac{1}{b}$"；若 $b<0$，则有"$0<ab<1$"⇒"$a<0$ 且 $b>\frac{1}{a}$". 综上，"$0<ab<1$"⇒"$a<\frac{1}{b}$ 或 $b>\frac{1}{a}$"，反之不成立. 如 $a=-2$，$b=\frac{1}{2}$，显然满足"$a<\frac{1}{b}$ 或 $b>\frac{1}{a}$"，但并不满足"$0<ab<1$". 综上可知问题的答案为：充分不必要条件. 故选 A.

**【例 1.15 变式 1】**

分析 可以借助数轴，利用集合与命题之间的关系求解.

解析 由 $-2\leqslant x\leqslant a$ 得 $-1\leqslant2x+3\leqslant2a+3$，即 $B=\{y\mid-1\leqslant y\leqslant2a+3\}$，

当 $-2\leqslant a<0$ 时，$C=\{z\mid a^2\leqslant z\leqslant4\}$；

当 $0\leqslant a\leqslant2$ 时，$C=\{z\mid0\leqslant z\leqslant4\}$；

当 $a>2$ 时，$C=\{z\mid0\leqslant z\leqslant a^2\}$.

所以当 $-2\leqslant a\leqslant2$ 时，$C\subseteq B\Rightarrow2a+3\geqslant4$，即 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant2$，反之亦真.

当 $a>2$ 时，$C\subseteq B\Rightarrow a^2\leqslant2a+3$，即 $2<a\leqslant3$，反之亦真.

所以 $C\subseteq B\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant3$，即使 $C\subseteq B$ 的充要条件是 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant3$.

**【例 1.15 变式 2】**

分析 当命题中的条件与结论是否定形式时，利用"原命题⇔逆否命题"将其转化为肯定形式.

解析 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，则有 $\neg q\subsetneqq\neg p\Leftrightarrow p\subsetneqq q$.

即 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件.

$p:\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2\Rightarrow -2\leqslant\frac{x-1}{3}-1\leqslant 2\Rightarrow -1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant 3\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 10$，

$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0\Rightarrow[x-(1-m)][x-(1+m)]\leqslant 0$　　(*)

因为 $p$ 是 $q$ 的充分而不必要条件，所以不等式 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$ 的解集是 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$ 解集的真子集.

又因为 $m>0$，所以不等式(*)的解集为 $[1-m,1+m]$，

又因为 $1-m=-2$ 与 $1-m=10$ 不同时成立，所以 $\begin{cases}1-m\leqslant -2\\1+m\geqslant 10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant 3\\m\geqslant 9\end{cases}$，故 $m\geqslant 9$，所以 $m$ 的取值范围是 $[9,+\infty)$.

**最有效训练题**

1.D　**解析**　对于命题①：$\ln x+x-2=0$，则 $\ln x=2-x$，

因为函数 $y=\ln x$ 与 $y=2-x$ 的图像只有 1 个交点，

所以 $f(x)=\ln x+x-2$ 的图像与 $x$ 轴只有 1 个交点，故①错误；

对于命题②：因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，所以不存在实数 $\lambda$，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 成立，由 $x^2\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，得 $x^2\boldsymbol{a}=-x\boldsymbol{b}$，所以 $x=0$，故关于 $x$ 的方程 $x^2\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 有唯一实根，故②正确；

对于命题③：因为函数 $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{|x+4|+|x-3|}$ 的定义域为 $[-3,3]$，则 $x+4>0$，$x-3\leqslant 0$，所以 $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{7}$，此函数为偶函数，图像关于 $y$ 轴对称，故③正确.故选 D.

2.A　**解析**　当 $a=1$ 时，直线 $l_1:x+2y-1=0$ 与直线 $l_2:x+2y+4=0$ 显然平行；若直线 $l_1$ 与直线 $l_2$ 平行，则有：$\frac{a}{1}=\frac{2}{a+1}\neq\frac{-1}{4}$，解之得：$a=1$ 或 $a=-2$，所以为充分不必要条件.故选 A.

3.C　**解析**　对于①，注意到命题"若 $x^2-3x+2=0$，则 $x=1$"的逆否命题为"若 $x\neq 1$，则 $x^2-3x+2\neq 0$"，因此①是真命题；

对于②，若 $p\vee q$ 为假命题，则 $p,q$ 均为假命题，因此②是真命题；

对于③，命题 $p$：存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+x+1<0$，则 $\neg p$：对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+x+1\geqslant 0$，因此③是真命题.对于④，在 $\triangle ABC$ 中，$\begin{cases}A<\pi-B\\A<B\end{cases}\Leftrightarrow\sin A<\sin B$，即 $A<B$ 是 $\sin A<\sin B$ 的充要条件，因此④是假命题，综上所述，其中真命题的个数是 3.故选 C.

4.A.

5.C　**解析**　$A=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,\frac{1}{2}<2^x<8\right\}=\{x|-1<x<3\}$，

因为 $x\in B$ 成立的一个充分不必要条件是 $x\in A$，故 $A\subsetneqq B$，所以 $m+1>3$，即 $m>2$.故选 C.

6.D　**解析**　由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数且在区间 $[0,1]$ 上单调递增，可知在 $[-1,0]$ 为减函数，又 2 为周期，所以 $f(x)$ 在 $[3,4]$ 上为减函数.反之也成立.故选 D.

7.①②④　**解析**　①因为 $\Delta=4+4k>0$，所以①是真命题.

②否命题："若 $a\leqslant b$，则 $a+c\leqslant b+c$"是真命题.

③逆命题："对角线相等的四边形是矩形"是假命题.

④否命题："若 $xy\neq 0$，则 $x,y$ 都不为零"是真命题.

8.$\left(-\frac{1}{2},0\right)$　**解析**　首先函数 $f(x)=\log_{2a+1}x$ 是对数函数，所以 $a>-\frac{1}{2}$ 且 $a\neq 0$.命题的大前提要保持不变.因为 $\neg p$ 为真，所以 $p$ 为假，则 $0<2a+1<1$，解得 $-\frac{1}{2}<a<0$，

故 $a$ 的范围是 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

9.$\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$　**解析**　由 $|x-m|<1$ 解得 $\{x|m-1<x<m+1\}$，因为 $|x-m|<1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，则 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\subsetneqq(m-1,m+1)$，

因此 $\begin{cases}m-1\leqslant\frac{1}{3}\\m+1\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$，$\left(m-1=\frac{1}{3},m+1=\frac{1}{2}\text{不同时成立}\right)$.

故 $m$ 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$.

10.$(-2,2)$　**解析**　$A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|b-a<x<b+a\}$，若 $a=1$ 时，则 $B=\{x|b-1<x<b+1\}$，若 $A\cap B=\varnothing$ 时，则 $b+1\leqslant -1$ 或 $b-1\geqslant 1$，得 $b\leqslant -2$ 或 $b\geqslant 2$，所以当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，则 $b\in(-2,2)$.

11.**解析**　设 $A=\{x|(4x-3)^2\leqslant 1\}$，$B=\{x|x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0\}$，故 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$，$B=\{x|a\leqslant x\leqslant a+1\}$.由 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，从而 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，即 $A\subsetneqq B$，$\begin{cases}a\leqslant\frac{1}{2}\\a+1\geqslant 1\end{cases}$，且两不等式不同时取"＝".

故所求实数 $a$ 的取值范围是 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

12.**解析**　(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$A=\left\{x\,\middle|\,2<x<\frac{5}{2}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<\frac{9}{4}\right\}$，$\complement_U B=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\frac{1}{2}\text{或}x\geqslant\frac{9}{4}\right\}$，

则 $(\complement_U B)\cap A=\left\{x\,\middle|\,\frac{9}{4}\leqslant x<\frac{5}{2}\right\}$.

(2)由若 $q$ 是 $p$ 的必要条件，即 $p\Rightarrow q$，可知 $A\subseteq B$，

由 $a^2+2>a$，$B=\{x|a<x<a^2+2\}$，

当 $3a+1>2$ 时，即 $a>\frac{1}{3}$ 时，$A=\{x|2<x<3a+1\}$，

$\begin{cases}a\leqslant 2\\3a+1\leqslant a^2+2\end{cases}$，解得 $\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{3-\sqrt{5}}{2}$；

当 $3a+1=2$ 时，即 $a=\frac{1}{3}$ 时，$A=\varnothing$，不符合题意，故舍去；

当 $3a+1<2$ 时，即 $a<\frac{1}{3}$ 时，$A=\{x|3a+1<x<2\}$，

$\begin{cases}a\leqslant 3a+1\\2\leqslant a^2+2\end{cases}$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a<\frac{1}{3}$，

综上所述，实数 $a$ 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$.

**【例 1.16 变式 1】**

**分析**　根据"且""或""非"命题的真假判定法判定.

**解析**　若 $p$ 是真命题，$q$ 是假命题，对于选项 A：$p\wedge q$ 是假命题，故选项 A 错误.

对于选项 B：$p\vee q$ 是真命题，故选项 B 错误.对于选项 C：$\neg p$ 是假命题，故选项 C 错误.故选 D.

**【例 1.16 变式 2】**

**解析**　由"$p$ 或 $q$ 为真"$\Rightarrow$命题 $p,q$ 中至少一个为真命题$\nRightarrow$"$p$ 且 $q$ 为真"；但由"$p$ 且 $q$ 为真"$\Rightarrow$命题 $p,q$ 同时为真$\Rightarrow$命题"$p$ 或 $q$ 为真"，故"$p$ 或 $q$ 为真"是"$p$ 且 $q$ 为真"的必要不充分条件.

故选 B.

**【例 1.16 变式 3】**

**解析**　依题意，命题 $p$ 为假命题，命题 $q$ 为假命题.因此 $p\wedge q$ 为假命题.故选 C.

**【例 1.17 变式 1】**

**解析**　对于存在性命题的否定，要先改变量词，再否定结论，所以原命题的否定为"对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$2^x>0$".故选 D.

**【例 1.17 变式 2】**

**解析**　原命题的否定是"任意一个无理数，它的平方不是有理数".故选 B.

**【例 1.17 变式 3】**

**解析**　根据全称命题的否定是存在性命题求解.

$\neg p$：$\exists x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)<0$.故选 C.

**【例 1.18 变式 1】**

**分析**　由命题 $p$ 或 $q$ 为真，$p$ 且 $q$ 为假的含义，说明 $p$ 与 $q$ 中有且只有一个为真命题，由此进行讨论.

**解析**　解法一：由 $p$ 或 $q$ 为真，$p$ 且 $q$ 为假，则 $p$ 与 $q$ 中有且只有一个为真.

①若 $p$ 真 $q$ 假时，$p$ 真则不等式 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故 $\Delta<0$，即 $4a^2-16<0$，得 $-2<a<2$，$q$ 假得 $3-2a\leqslant 1$，所以 $a\geqslant 1$，故 $1\leqslant a<2$.

②若 $p$ 假 $q$ 真时，$p$ 假得 $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -2$，同时 $3-2a>1$，得 $a<1$，故 $a\leqslant -2$.

综上，实数 $a$ 的取值范围为 $\{a|a\leqslant -2$ 或 $1\leqslant a<2\}$.

**解法二**：$p$：由 $\Delta<0$ 得，$4a^2-16<0$，$-2<a<2$；

$q$：由 $3-2a>1$ 得，$a<1$.

如图1-15所示，则 $\complement_{p\cup q}(p\cap q)=\{a|a\leqslant -2$ 或 $1\leqslant a<2\}$，则实数 $a$ 的取值范围为 $\{a|a\leqslant -2$ 或 $1\leqslant a<2\}$.

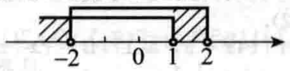

图 1-15

**评注** 正确理解 $p$ 或 $q$ 为真，$p$ 且 $q$ 为假的含义是解本题的关键点.把 $p$ 和 $q$ 在数轴上表示出来，在 $p\cup q$ 中去掉 $p\cap q$，剩余的部分就是所求的，即 $\complement_{p\cup q}(p\cap q)$.

**【例 1.18 变式 2】**

**解析** 对于任意的 $x$ 都有 $ax^2+ax+1>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow a=0$ 或 $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leqslant a<4$.关于 $x$ 的方程 $x^2-x+a=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow \Delta=1-4a\geqslant 0\Leftrightarrow a\leqslant \dfrac{1}{4}$.

如果 $p$ 真，且 $q$ 假，有 $0\leqslant a<4$ 且 $a>\dfrac{1}{4}$，得 $\dfrac{1}{4}<a<4$；

如果 $q$ 真，且 $p$ 假，有 $a<0$ 或 $a\geqslant 4$ 且 $a\leqslant\dfrac{1}{4}$，得 $a<0$，

如图1-16所示.所以实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{1}{4},4\right)$.

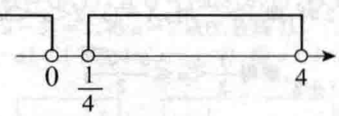

图 1-16

**最有效训练题**

1.D **解析** 根据对命题的否定知，是把量词取否定，然后把结论否定.故选 D.

2.A **解析** 由“$p\wedge q$”是真命题，得命题 $p,q$ 均为真命题，“$\neg p$”是假命题，则 $p$ 是真命题，因此“$p\wedge q$”是真命题是“$\neg p$”为假命题的充分不必要条件.故选 A.

3.B **解析** 由均值不等式可得：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\times(a+b)=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 4\ (a,b\in\mathbf{R}^+)$，故命题 $p$ 为假命题，$\neg p$ 为真命题；任意 $x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，命题 $q$ 为真命题，$\neg q$ 为假命题，$\neg p$ 且 $\neg q$ 为假命题.故选 B.

4.D **解析** 对于命题 $p$，$\exists x=4$，$x-2>\lg x$ 成立，因此命题 $p$ 是真命题；对于命题 $q$，显然 $x=0$ 时，$x^2=0$ 不满足 $x^2>0$，因此命题 $q$ 是假命题，所以命题 $p\wedge(\neg q)$ 是真命题.故选 D.

5.A **解析** 由已知可知 $p$ 和 $q$ 均为真命题，由命题 $p$ 为真得 $a\leqslant 1$，由命题 $q$ 为真得 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 1$，所以 $a\leqslant -2$ 或 $a=1$.故选 A.

6.D **解析** 因为“$\neg p$”为真，所以 $p$ 为假，又“$p$ 或 $q$”为真，所以 $q$ 为真，故 A 正确；B，C 显然正确；因为 $\theta=30°$ 时，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，但 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 时，$\theta$ 不一定为 $30°$，故“$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$”是“$\theta=30°$”的必要不充分条件.故选 D.

7.任意一个无理数，它的平方不是有理数.

8.②③④ **解析** ①因为 $p\vee q$ 为真，所以 $p$ 真或 $q$ 真，故 $p\wedge q$ 不一定为真命题，故①假；②逆命题：若 $A\cup B=B$，则 $A\cap B=A$，因为 $A\cup B=B$，$A\subseteq B$，所以 $A\cap B=A$，故②真；③由条件得，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}=\sqrt{3}$，当 $B=60°$ 时，有 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，注意 $b>a$，故 $A=30°$；但当 $A=30°$ 时，有 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$B=60°$，或 $B=120°$.故③真；④否命题：若 $f(x)$ 不是奇函数，则 $f(-x)$ 不是奇函数，这是一个真命题，假若 $f(-x)$ 为奇函数，则 $f[-(-x)]=-f(-x)$，即 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，与条件矛盾.故填②③④.

9.$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$ **解析** 因为 $|x-1|+|x+1|\geqslant 2$，由 $|x-1|+|x+1|\geqslant 3a$ 恒成立知 $3a\leqslant 2$，即 $a\leqslant\dfrac{2}{3}$.

由 $y=(2a-1)^x$ 为减函数得：$0<2a-1<1$ 即 $\dfrac{1}{2}<a<1$.又因为“$p\wedge q$”为真命题，所以 $p$ 和 $q$ 均为真命题，得 $\dfrac{1}{2}<a\leqslant\dfrac{2}{3}$.则实数 $a$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$.

10.1，①③ **解析** (1)$x\in\mathbf{Q}$ 时，$f(x)=1$，$f[f(x)]=f(1)=1$；若 $x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$ 时，$f(x)=0$，$f[f(x)]=f(0)=1$.

故 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f[f(x)]=1$.

(2)对于①，当 $x\in\mathbf{Q}$ 时，$-x\in\mathbf{Q}$，此时 $f(-x)=1=f(x)$，当 $x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$ 时，$-x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$，则 $f(-x)=0=f(x)$，因此对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=f(x)$，函数 $f(x)$ 是偶函数，①正确.

对于②，若 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle C$ 为直角，如图 1-17(a)所示，显然不满足函数定义.若 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，$\angle C$ 为直角，如图 1-17(b)所示，由 $|CD|=1$，则 $|AB|=2$，且 $x_C-x_A=1$，故点 $A$ 与点 $C$ 的横坐标同为有理数或同为无理数，因此不存在 $f(x_A)=1$，$f(x_C)=0$，故②不正确.

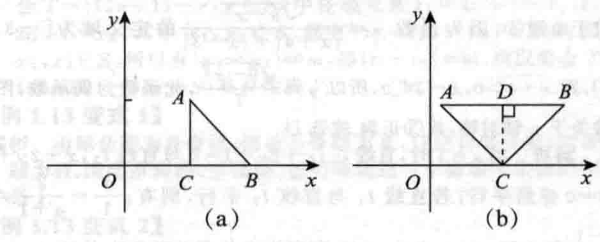

图 1-17

对于③，如 $A(0,1)$，$B(-\sqrt{3},0)$，$C(2-\sqrt{3},0)$，$D(2,1)$，易知点 $A,B,C,D$ 均在函数 $f(x)$ 的图像上，且四边形 $ABCD$ 为菱形，③正确.综上所述，所有真命题的序号是①③.

11.**解析** 由 $y=\log_c x$ 为减函数得 $0<c<1$；当 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 时，因为 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$，故函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上为减函数，在 $(1,2]$ 上为增函数，所以 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上的最小值为 $f(1)=2$.当 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 时，由函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{c}$ 恒成立，得 $2>\dfrac{1}{c}$，解得 $c>\dfrac{1}{2}$，

如果 $p$ 真，且 $q$ 假，则 $0<c\leqslant\dfrac{1}{2}$；如果 $p$ 假，且 $q$ 真，则 $c\geqslant 1$.

所以 $c$ 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

12.**解析** (1)因为 $f(x)=2\left[1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)\right]-2\sqrt{3}\cos 2x-1$

$=2\sin 2x-2\sqrt{3}\cos 2x+1=4\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$，

又因为 $\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$，

$\dfrac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$.

即 $3\leqslant 4\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1\leqslant 5$.

所以 $f(x)$ 的最大值为 5，最小值为 3.

(2)因为 $|f(x)-m|<2$，所以 $m-2<f(x)<m+2$，又因为 $p$ 是 $q$ 的充分条件，$\begin{cases}m-2<3\\ m+2>5\end{cases}$，得 $3<m<5$.所以实数 $m$ 的取值范围是 $(3,5)$.

# 第二章 函 数

【例 2.1 变式 1】

**分析** 判断一个对应是不是映射,应紧扣映射的定义,即在对应法则 $f$ 下,对应集合 $A$ 中的任一元素在 $B$ 中能否都有唯一的象.

**解析** 在(1)中,元素“0”在 $B$ 中没有象,不满足“任意性”,因此,(1)不能构成映射.

在(2)中,当 $x$ 为偶数时,其象为1;当 $x$ 为奇数时,其象为 $-1$,而 $1,-1\in B$,即 $A$ 中任一元素在 $B$ 中都有唯一的象.因此,(2)能构成映射.

在(3)中,因为任一三角形都有唯一的外接圆,所以(3)能构成映射.

在(4)中,因为平面内的任一个圆,其内接矩形有无数个,因此,(4)不能构成映射.

综上所述,能构成映射的有(2)(3).

**评注** 判定一个对应是否能构成映射,应紧扣映射定义,在映射 $f$:$A\to B$ 中,$A$,$B$ 的地位是不对等的,它并不要求 $B$ 中元素均有原象,或有原象也未必唯一.一般地,若 $A$ 中元素的象的集合为 $C$,则 $C\subseteq B$,同时要注意映射中的集合元素的对象是任意的,可以是数、点或其他任意对象.

【例 2.2 变式 1】

**分析** 利用函数的定义解释,对于自变量 $x\in D$,则有唯一的值与其对应.

**解析** 若函数 $y=f(x)$ 中定义域包含 $x=2$,则 $y=f(x)$ 的图像与直线 $x=2$ 有1个公共点;若函数 $y=f(x)$ 定义域中不包含 $x=2$,则 $y=f(x)$ 的图像与直线 $x=2$ 无交点.故选 C.

【例 2.2 变式 2】

**解析** (反证法)假设存在这样的函数 $f$:$A\to\{1,2,3\}$,使得对任意的整数 $x_1,x_2\in A$,若 $|x_1-x_2|\in\{1,2,3\}$,则 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

设 $f(1)=a,a\in\{1,2,3\}$,$f(2)=b,b\in\{1,2,3\}$,由已知 $a\neq b$.

由于 $|3-1|=2$,$|3-2|=1$,所以 $f(3)\neq f(1)$,$f(3)\neq f(2)$.

不妨令 $f(3)=c$,$c\in\{1,2,3\}$,这里 $c\neq a$ 且 $c\neq b$,

同理 $f(4)\neq b$ 且 $f(4)\neq c$,因为$\{1,2,3\}$只有三个元素,所以 $f(4)=a$.即 $f(1)=f(4)$,但是 $|4-1|=3\in\{1,2,3\}$,由已知 $f(1)\neq f(4)$ 矛盾.因此假设不成立,即不存在这样的函数 $f$:$A\to\{1,2,3\}$,使得对任意的整数 $x_1,x_2\in A$,若 $|x_1-x_2|\in\{1,2,3\}$,则 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

【例 2.2 变式 3】

**解析** (1)由题意得“$f$”为从正整数集($\mathbf{N}^*$)到正整数集($\mathbf{N}^*$)的函数,若 $k=1$,则当 $n>1$ 时,$f(n)=n-1$,当 $n=1$ 时,函数“$f$”可以是任意的正整数,可以用 $a$ 表示,$a\in\mathbf{N}^*$.

(2)若 $k=4$,则当 $n>4$ 时,$f(n)=n-4$,当 $n\leqslant 4$,$f(n)$ 为正整数,且 $2\leqslant f(n)\leqslant 3$,故 $f(n)=2$ 或 $f(n)=3$.当 $n=1$ 时,$f(n)=2$ 或3;当 $n=2$ 时,$f(n)=2$ 或3;当 $n=3$ 时,$f(n)=2$ 或3;当 $n=4$ 时,$f(n)=2$ 或3,故共可构成不同的函数 $f$ 的个数为16.

【例 2.3 变式 1】

**分析** 首先判定定义域,再判断对应法则,也可快速判断值域.

**解析** (1)$f$:$x\in\{x|x\neq-3,x\in\mathbf{R}\}$,$g$:$x\in\mathbf{R}$,定义域不同;

(2)$f$:$x\in[1,+\infty)$,$g$:$x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,定义域不同;

(3)$f(x)=x$,$g(x)=|x|$,解析式不同;

(4)$f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$,$g(t)=t\sqrt[3]{t-1}$ 是同一函数;

(5)$f$:$x\in\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$,$g$:$x\in\mathbf{R}$,定义域不同.故选 C.

**评注** 由于值域可由定义域和对应法则唯一确定,所以两个函数当且仅当定义域和对应法则分别相同时,才是同一函数,即使定义域和值域都分别相同的两个函数,也不一定是同一函数,因为函数的定义域和值域不能唯一地确定函数的对应法则.

【例 2.4 变式 1】

**分析** 利用题中的复合变量 $\dfrac{x+1}{x}$ 凑出 $\dfrac{x^2+1}{x^2}$.

**解析** 配凑法:$f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x}=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2-\dfrac{x+1}{x}+1$.即 $f(x)=x^2-x+1(x\neq1)$.

**评注** 本题也可利用换元法:令 $\dfrac{x+1}{x}=t(t\neq1)$,则 $\dfrac{1}{x}=t-1$.

因此 $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=f(t)=1+(t-1)^2+t-1=t^2-t+1$,

所以 $f(x)=x^2-x+1(x\neq1)$.

【例 2.5 变式 1】

**解析** 设 $f(x)=kx+b(k\neq0)$,则 $f(f(x))=kf(x)+b=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b=4x-1$,得 $\begin{cases}k^2=4\\kb+b=-1\end{cases}$,

解得 $\begin{cases}k=2\\b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-2\\b=1\end{cases}$,

所以 $f(x)=2x-\dfrac{1}{3}$ 或 $f(x)=-2x+1$.

【例 2.6 变式 1】

**分析** 利用换元法求解.

**解析** 令 $\dfrac{1-x}{1+x}=t(t\neq-1)$,则 $x=\dfrac{1-t}{1+t}(t\neq-1)$,得

$$f(t)=\frac{1-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}=\frac{\frac{(1+t)^2-(1-t)^2}{(1+t)^2}}{\frac{(1+t)^2+(1-t)^2}{(1+t)^2}}=\frac{4t}{(1+t)^2}\cdot\frac{(1+t)^2}{2(1+t^2)}=$$

$\dfrac{2t}{t^2+1}(t\neq-1)$.所以 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}(x\neq-1)$.

**评注** 对于 $f[g(x)]$ 形式的表达式求解 $f(x)$ 的有效方法:令 $g(x)=t$,解出 $x=\varphi(t)$,代入函数表达式,但应注意新元的范围.

若本题改为选择题:已知 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,则 $f(x)$ 的解析式为( ).

A.$\dfrac{x}{1+x^2}(x\neq-1)$　　B.$-\dfrac{2x}{1+x^2}(x\neq-1)$

C.$\dfrac{2x}{1+x^2}(x\neq-1)$　　D.$-\dfrac{x}{1+x^2}(x\neq-1)$

则不需要按【例 2.6 变式 1】中的方法求解,只需采用特殊值排除法即可.如取 $x=0$,则有 $f(1)=1$,代入选项验证可知,只有选项 C 符合,而选项 A,B,D 都不符合,故答案为 C.这种方法的解题效率往往比常规方法更快.

【例 2.6 变式 2】

**解析** $f_2(x)=\dfrac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}=-\dfrac{1}{x}$,$f_3(x)=f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=$

$\dfrac{x-1}{x+1}$,$f_4(x)=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x$,$f_5(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,

即 $f_5(x)=f_1(x)$,可看作周期为4的变换,

所以 $f_{2014}(x)=f_2(x)=-\dfrac{1}{x}$.故选 A.

**评注** $f_5(x)=f(x)$ 只表示表达式相同,其定义域不同,$y=f(x)(x\neq1)$,$y=f_5(x)(x\neq-1,0,1)$.本题亦可用特殊值法.

$f_1\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$,$f_2\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(3)=-2$,

$f_3\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(-2)=-\dfrac{1}{3}$,$f_4\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$,

$f_5\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$,所以周期 $T=4$,

故 $f_{2014}\left(\dfrac{1}{2}\right)=f_2\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2$.故选 A.

【例 2.7 变式 1】

**解析** 因为 $af(x)+f(-x)=ax$　①

用 $-x$ 代替 $x$,得 $af(-x)+f(x)=-ax$　②

由①②消去 $f(-x)$,得 $(a^2-1)f(x)=a^2x+ax$,

因为 $a\neq\pm1$,所以 $f(x)=\dfrac{a^2x+ax}{a^2-1}$,

即 $f(x)=\dfrac{ax}{a-1}(x\in\mathbf{R})$.

【例 2.8 变式 1】

**解析** $f(f(3))=f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{13}{9}$.故选 D.

【例 2.8 变式 2】

**解析** $f(f(0))=f(2)=4+2a=4a$,$a=2$.

**【例 2.8 变式 3】**

**解析** 当 $a>0$ 时，则 $1-a<1,1+a>1$，

得 $2(1-a)+a=-(1+a)-2a$，解得 $a=-\frac{3}{2}$（不符），故舍去；

当 $a<0$ 时，则 $1-a>1,1+a<1$，

得 $2(1+a)+a=-(1-a)-2a$，解得 $a=-\frac{3}{4}$. 综上，$a=-\frac{3}{4}$.

**最有效训练题**

1.D.

2.D **解析** $f\left(\frac{1}{100}\right)=\lg\frac{1}{100}=-2$，则 $f\left(f\left(\frac{1}{100}\right)\right)=f(-2)=-f(2)=-\lg 2$. 故选 D.

3.D **解析** A 与 B 选项中两个函数的定义域都不相同，C 选项中 $y=|x|+|x-1|=\begin{cases}2x-1 & x\geqslant 1\\ 1 & 0\leqslant x<1\\ 1-2x & x<0\end{cases}$，与 $y=2x-1$ 的对应法则不同. 故选 D.

4.B **解析** 根据题意有 $\begin{cases}x+y=2\\ x-y=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$，所以象 $(2,1)$ 的原象是 $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$. 故选 B.

5.A **解析** 解分段函数方程，由解析式可知 $f(1)=2$，则 $f(a)+2=0$，即 $f(a)=-2$. 当 $a>0$ 时方程无解，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(a)=a+1=-2$ 得 $a=-3$. 故选 A.

6.A **解析** 根据表中的对应关系得，$f[g(1)]=f(4)=1$，$g[f(1)]=g(3)=1$. 故选 A.

7.6 **解析** 先令 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$，则 $f(0)=f(1-1)=f(1)+f(-1)-2$，解得 $f(-1)=0$. $f(-2)=f(-1-1)=f(-1)+f(-1)+2=2$，所以 $f(-3)=f(-2-1)=f(-2)+f(-1)+4=6$.

8.$\log_3 2$.

9.3 **解析** 由 $f(-3)=f(0)$，$f(-1)=-2$ 可得 $b=3,c=0$，所以 $f(x)=\begin{cases}x^2+3x, x\leqslant 0\\ 2, x>0\end{cases}$. 函数 $f(x)$ 的图像如图 2-36 所示. 从而 $f(x)=x$ 的解的个数是 3.

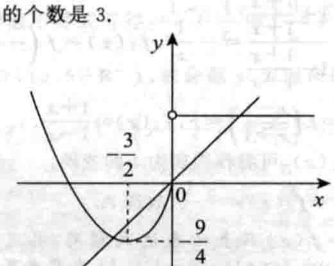


图 2-36

10.$A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{4,7,10,16\}$ **解析** 因为 $f(1)=3\times 1+1=4$，$f(2)=3\times 2+1=7$，$f(3)=3\times 3+1=10$，$f(k)=3k+1$，由映射的定义知 $\begin{cases}a^4=10\\ a^2+3a=3k+1\end{cases}$ (1) 或 $\begin{cases}a^2+3a=10\\ a^4=3k+1\end{cases}$ (2)

因为 $a\in\mathbf{N}^*$，所以方程组 (1) 无解.

解方程组 (2)，得 $a=2$ 或 $a=-5$（舍），$3k+1=16$，$3k=15$，$k=5$.

所以 $A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{4,7,10,16\}$.

11.**解析** (1) 令 $\frac{2}{x}+1=t(t>1)$，则 $x=\frac{2}{t-1}$，

所以 $f(t)=\lg\frac{2}{t-1}$，所以 $f(x)=\lg\frac{2}{x-1}$，$x\in(1,+\infty)$.

(2) 设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$，则

$3f(x+1)-2f(x-1)=3ax+3a+3b-2ax+2a-2b=ax+b+5a=2x+17$，所以 $a=2,b=7$，故 $f(x)=2x+7$.

(3) 令 $t=1-\cos x$，$t\in[0,2]$，则 $\cos x=1-t$，

故 $f(t)=1-(1-t)^2=-t^2+2t$，

所以 $f(x)=-x^2+2x$，$x\in[0,2]$.

(4) 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，

则 $f(x+2)-f(x)=4ax+4a+2b=4x+2$.

所以 $\begin{cases}4a=4\\ 4a+2b=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$，又 $f(0)=3$，得 $c=3$，

所以 $f(x)=x^2-x+3$.

(5) 依题意，对任意的 $x\in(0,+\infty)$，有 $f(x)+\log_{\frac{1}{2}}x=x_0$，且 $f(x_0)=3$，令 $x=x_0$，得 $f(x_0)+\log_{\frac{1}{2}}x_0=x_0$，即 $\log_{\frac{1}{2}}x_0=x_0-3$，解得 $x_0=2$，则 $f(x)=2-\log_{\frac{1}{2}}x=\log_2 x+2$，$x\in(0,+\infty)$.

12.**解析** (1) 由已知，$g(2)=1$，$f(2)=3$，所以 $f[g(2)]=f(1)=0$，$g[f(2)]=g(3)=2$.

(2) 当 $x>0$ 时，$g(x)=x-1$，故 $f[g(x)]=(x-1)^2-1=x^2-2x$；当 $x<0$ 时，$g(x)=2-x$，故 $f[g(x)]=(2-x)^2-1=x^2-4x+3$；所以 $f[g(x)]=\begin{cases}x^2-2x, x>0\\ x^2-4x+3, x<0\end{cases}$.

当 $x>1$ 或 $x<-1$ 时，$f(x)>0$，故 $g[f(x)]=f(x)-1=x^2-2$；

当 $-1<x<1$ 时，$f(x)<0$，故 $g[f(x)]=2-f(x)=3-x^2$.

所以 $g[f(x)]=\begin{cases}x^2-2, x>1 \text{ 或 } x<-1\\ 3-x^2, -1<x<1\end{cases}$

**【例 2.9 变式 1】**

**分析** 分析函数 $f(x)$ 的结构，分母不能为零，分子中对数的真数大于零.

**解析** 由 $\begin{cases}4-x>0\\ x-3\neq 0\end{cases}$，得 $x<4$ 且 $x\neq 3$.

故函数的定义域为 $\{x|x<4$ 且 $x\neq 3\}$.

**【例 2.9 变式 2】**

**解析** $\begin{cases}\log_2(x-1)\neq 0\\ x-1>0\\ |x-2|-1\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x>1\\ x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow x\geqslant 3$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $[3,+\infty)$.

**【例 2.10 变式 1】**

**解析** 由已知得 $0\leqslant 2x\leqslant 2$ 且 $x-1\neq 0$，得 $0\leqslant x<1$. 故选 B.

**【例 2.10 变式 2】**

**解析** 函数 $f(2^x)$ 的定义域是 $[0,1]$，故 $1\leqslant 2^x\leqslant 2$，即 $f(x)$ 中 $x$ 的范围是 $[1,2]$. 因此 $2x-1\in[1,2]$，即 $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$，故 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

**【例 2.12 变式 1】**

**分析** 已知函数的定义域即为使得函数的分母恒不为零的 $x$ 的取值范围.

**解析** 由题意，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$ax^2+4ax+3\neq 0$ 恒成立.

当 $a=0$ 时，$3\neq 0$ 成立；

当 $a\neq 0$ 时，$\Delta=16a^2-12a<0\Rightarrow 0<a<\frac{3}{4}$.

综上所述 $a$ 的取值范围是 $\left[0,\frac{3}{4}\right)$. 故选 D.

**评注** 注意本题中的二次项系数含有参数 $a$，故需对此参数是否为零加以讨论. 一般地，若我们研究的函数或不等式的最高次项系数含有参数，都需要有对此参数是否为零的讨论意识.

**【例 2.12 变式 2】**

**解析** 函数 $y=\lg(ax^2-ax+1)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，即 $ax^2-ax+1>0$ 恒成立. 当 $a=0$ 时，$1>0$ 成立；当 $a\neq 0$ 时，应有 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=a^2-4a<0\end{cases}\Rightarrow 0<a<4$. 综上所述，$a$ 的取值范围是 $[0,4)$.

**【例 2.12 变式 3】**

**解析** 依题意，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}\geqslant 0$ 恒成立.

(1) 当 $a^2-1=0$ 时，因为 $a+1\neq 0$，所以 $a=1$.

此时有 $(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}=1$，可知对任意 $x\in\mathbf{R}$，$(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}\geqslant 0$ 恒成立，所以 $a=1$ 符合题意；

(2) 当 $a^2-1\neq 0$ 时，由题意得 $\begin{cases}a^2-1>0\\ \Delta=(a-1)^2-4(a^2-1)\cdot\frac{2}{a+1}\leqslant 0\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a^2>1\\ a^2-10a+9\leqslant 0\end{cases}$，解得 $1<a\leqslant 9$.

综上所述，实数 $a$ 的取值范围为 $[1,9]$.

**【例 2.13 变式 1】**

**解析** 由 $x^2\geqslant0$，$x^2+1>x^2$，故函数的值域为 $[0,1)$.

**【例 2.14 变式 1】**

**解析** $f(x)=\dfrac{1}{1-x(1-x)}=\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\in\left(0,\dfrac{4}{3}\right]$.

故函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(0,\dfrac{4}{3}\right]$.

**【例 2.14 变式 2】**

**解析** 如图 2-37所示，设二次函数 $g(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$，由图知 $\Delta=b^2-4ac>0$，则抛物线开口方向向下，函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的定义域 $D$ 为不等式 $ax^2+bx+c\geqslant0$ 的解集，$f(t)\in\left[0,\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}\right]$. 设 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 $x_1,x_2$（$x_1<x_2$），则 $D=[x_1,x_2]$，依题意，点 $(s,f(t))$（$s,t\in D$）构成一个正方形区域，所以 $x_2-x_1=\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}$，

且 $x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}$，

$\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}$，得 $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}}=\sqrt{-\dfrac{1}{4a}}$，$a=-4$. 故选 B.

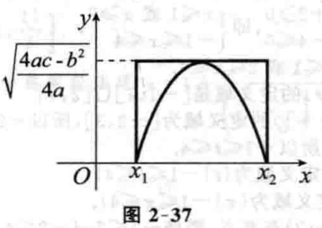


图 2-37

**【例 2.15 变式 1】**

**解析** 由绝对值的几何意义（如图 2-38所示）知 $|x+1|+|x-2|$ 表示数轴上的点 $(x,0)$ 与定点 $(-1,0)$ 和 $(2,0)$ 的距离之和，因此 $|x+1|+|x-2|\geqslant3$，所以函数的值域为 $[3,+\infty)$.

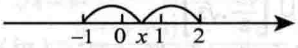


图 2-38

**【例 2.16 变式 1】**

**解析** 由 $y=x+1+\dfrac{1}{x+1}-1$，若 $x+1>0$，则 $x+1+\dfrac{1}{x+1}-1\geqslant1$（当且仅当 $x+1=\dfrac{1}{x+1}$ 时，即 $x=0$ 时取“=”）；若 $x+1<0$ 时，$y=-\left[-(x+1)+\dfrac{1}{-(x+1)}\right]-1\leqslant-3$（当且仅当 $x=-2$ 时取“=”）. 因此函数的值域为 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

**【例 2.17 变式 1】**

**解析** 令 $u=\sqrt{2-x}\geqslant0$，则 $x=2-u^2$，原式可化为 $y=2-u^2+u=-\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$，因为 $u\geqslant0$，所以 $y\leqslant\dfrac{9}{4}$，所以函数的值域是 $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$.

**评注** 对于含根号的无理函数，通过换元将根号脱去，转化为整式函数（特别是二次函数）求值域.

**【例 2.17 变式 2】**

**解析** 令 $x=\sqrt{2}\cos\theta,\theta\in[0,\pi]$，

则 $y=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right),\theta\in[0,\pi]$，

又 $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$，所以 $-\sqrt{2}\leqslant2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant2$.

所以函数的值域是 $[-\sqrt{2},2]$.

**【例 2.18 变式 1】**

**解析** 因为 $y=\dfrac{3(x-1)-2}{x-1}=3-\dfrac{2}{x-1}\neq3$，所以函数的值域为 $\{y\mid y\neq3\}$.

**评注** 对于分式型函数 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$，函数的值域为 $\left\{y\,\middle|\,y\neq\dfrac{c}{a}\right\}$. 若本题中将 $x$ 的范围限定在区间 $[2,+\infty)$，其答案将如何？$[1,3)$.

**【例 2.18 变式 2】**

**解析** 因为 $y=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{x-3}{x+3}(x\neq2)=1-\dfrac{6}{x+3}(x\neq2)$，

所以 $\left\{y\,\middle|\,y\neq-\dfrac{1}{5}\text{ 且 }y\neq1\right\}$（当 $x=2$ 时，$1-\dfrac{6}{x+3}=-\dfrac{1}{5}$）.

**评注** 一般地，$y=\dfrac{(x-m)(ax+b)}{(x-m)(cx+d)}(c\neq0)$ 的值域为 $\left\{y\,\middle|\,y\neq\dfrac{a}{c}\text{ 且 }y\neq\dfrac{am+b}{cm+d}\right\}$（因为 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 且 $x\neq m$，所以把 $x\neq m$ 代入约分后的式子即可）.

**【例 2.19 变式 1】**

**解析** 由 $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 得 $yx^2-ax+y-b=0$.

由 $\Delta=a^2-4y(y-b)\geqslant0$ 得 $a^2-4y^2+4by\geqslant0$，即 $4y^2-4by-a^2\leqslant0$，其解集为 $[-1,4]$，

则方程 $4y^2-4by-a^2=0$ 的两根为 $-1,4$，

由韦达定理得 $-1+4=b$，即 $b=3$，$\dfrac{a^2}{4}=-4$，$a^2=16$，

所以 $a=\pm4$，$b=3$.

**【例 2.19 变式 2】**

**解析** 由题意知 $1\leqslant\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}\leqslant9$，令 $y=\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$，则 $mx^2+8x+n=yx^2+y$，即 $(m-y)x^2+8x+n-y=0$

由 $\Delta=64-4(m-y)(n-y)\geqslant0$ 得 $y^2-(m+n)y+mn-16\leqslant0$，

即方程 $y^2-(m+n)y+mn-16=0$ 的两根是 $1,9$.

由韦达定理解得 $m+n=10$，$mn-16=9$，故 $m=n=5$.

**【例 2.20 变式 1】**

**解析** 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[5,8]$，又因为 $f(x)$ 在 $[5,8]$ 上是增函数，从而可知 $f(x)$ 的值域为 $[-3,\sqrt{3}]$.

**【例 2.20 变式 2】**

**解析** $y=\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+2x+2}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+2x+2}}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{(x+1)^2+4}+\sqrt{(x+1)^2+1}}$.

令 $t=(x+1)^2$，则 $y=\dfrac{3}{\sqrt{t+4}+\sqrt{t+1}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，当 $t=0$ 时，$y_{\max}=1$. 因此 $0<y\leqslant1$，所以函数的值域为 $(0,1]$.

**【例 2.21 变式 1】**

**解析** 解法一：（反解有界性法）由题意可得

$y=\dfrac{2e^x}{e^x+2}\Rightarrow ye^x+2y=2e^x\Rightarrow(y-2)e^x=-2y$，

即有 $e^x=\dfrac{-2y}{y-2}$，因为 $x\in[0,1]$，$e^x\in[1,e]$，

故需 $1\leqslant\dfrac{-2y}{y-2}\leqslant e$，可求得 $\begin{cases}\dfrac{2}{3}\leqslant y<2\\ y\leqslant\dfrac{2e}{e+2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{2}{3}\leqslant y\leqslant\dfrac{2e}{e+2}$，

因此所求函数的值域为 $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{2e}{e+2}\right]$.

**评注** 本题具备齐次分式的结构特征，我们还可以利用分离常数法求解，如下所示.

解法二：$y=\dfrac{2e^x}{e^x+2}=\dfrac{2e^x+4-4}{e^x+2}=2-\dfrac{4}{e^x+2}$，在 $[0,1]$ 上函数单调递增，故 $\dfrac{2}{1+2}\leqslant\dfrac{2e^x}{e^x+2}\leqslant\dfrac{2e}{e+2}$. 即所求函数的值域为 $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{2e}{e+2}\right]$.

**【例 2.21 变式 2】**

**解析** 由题意可知 $f(x)=e^x-1>-1$，若有 $f(a)=g(b)$，即 $-b^2+4b-3>-1$，解得 $2-\sqrt{2}<b<2+\sqrt{2}$. 故选 B.

**【例 2.22 变式 1】**

**解析** $y=\dfrac{1-\sin x}{2-\cos x}$，则 $2y-y\cos x=1-\sin x$，得 $y\cos x-\sin x=2y-1\Rightarrow\sqrt{y^2+1}\sin(x+\varphi)=2y-1\Rightarrow|2y-1|\leqslant\sqrt{y^2+1}\Rightarrow 0\leqslant y\leqslant\dfrac{4}{3}$. 故值域为 $\left[0,\dfrac{4}{3}\right]$.

**【例 2.23 变式 1】**

**解析** $y'=3x^2+2bx+c$，由题意，$x_0=0,2$ 是函数 $y=f(x)$ 的两个极值点，所以 $\begin{cases}f'(0)=0\\f'(2)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}c=0\\12+4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\b=-3\end{cases}$.

故 $y=x^3-3x^2$，得 $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

所以当 $x\in(-1,0)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,2)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(2,4)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.如表 2-5 所示.

表 2-5

| $x$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,2)$ | $2$ | $(2,4)$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-4$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ | $16$ |

所以 $f(x)_{\min}=\min\{f(-1),f(2)\}=-4$；

$f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(4)\}=16$，故所求值域为 $[-4,16]$.

**最有效训练题**

1.C **解析** A 与 D 中的函数均为二次函数，值域不可能是 **R**，故排除 A，D；选项 B 当 $a=0$ 时，$y=1$，当 $a\neq0$ 时，$y$ 是二次函数，所以值域不可能是 **R**，故排斥 B；C 选项中当 $a=0$ 时为一次函数，定义域和值域均为 **R**.故选 C.

2.D **解析** 当 $m=0$ 时，$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$，定义域为 **R**；当 $m\neq0$ 时，由 $f(x)$ 的定义域为 **R**，知抛物线 $g(x)=mx^2+4mx+3$，开口向上且与 $x$ 轴无交点，且 $m>0$，即 $\Delta=16m^2-12m<0$，解得 $0<m<\frac{3}{4}$.综上，可知 $m\in\left[0,\frac{3}{4}\right)$.故选 D.

3.C **解析** 函数的图像左、右平移不改变函数的值域.故选 C.

4.C **解析** 令 $u=16-4^x$，则 $y=\sqrt{u}$，$u\geqslant0$，因为 $4^x>0$，$-4^x<0$，所以 $0\leqslant16-4^x<16$，即 $0\leqslant u<16$，所以 $y=\sqrt{u}\in[0,4)$.故选 C.

5.C **解析** 由题意可得：$\begin{cases}-3\leqslant x+1\leqslant5\\-3\leqslant x-2\leqslant5\end{cases}$，解得：$-1\leqslant x\leqslant4$.所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $[-1,4]$.故选 C.

6.C **解析** 因为 $a*b=\begin{cases}a,若\ a\leqslant b\\b,若\ a>b\end{cases}$，

所以 $f(x)=\{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2),\log_2x\}_{\min}$ 而函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$ 与 $y=\log_2x$ 的大致图像如图 2-39所示，

所以 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$.故选 C.

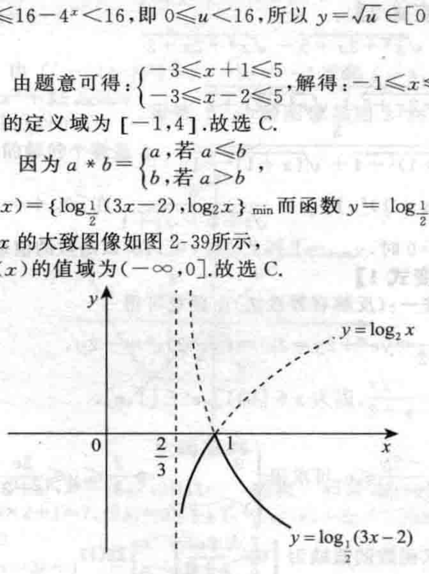


图 2-39

7.B.

8.$\left(-\infty,-\frac{7}{4}\right]$ **解析** 由 $y'=2x-\frac{1}{x^2}<0\left(x\leqslant-\frac{1}{2}\right)$，得函数 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，则 $y_{\max}=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$.故函数的值域为 $\left(-\infty,-\frac{7}{4}\right]$.

9.$[-5,-1]$ **解析** 因为 $1\leqslant f(x)\leqslant3$，所以 $-6\leqslant-2f(x+3)\leqslant-2$，所以 $-5\leqslant1-2f(x+3)\leqslant-1$，即 $F(x)$ 的值域为 $[-5,-1]$.

10.$\left[\frac{3}{2},3\right]$.

11.**解析** (1)由 $\begin{cases}2-|x|\neq0,\\x^2-1\geqslant0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\neq\pm2,\\x\leqslant-1\ 或\ x\geqslant1.\end{cases}$ 所以函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,-1]\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)由 $\begin{cases}4x+3>0\\4x+3\neq1\\5x-4\neq0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x>-\frac{3}{4}\ 且\ x\neq-\frac{1}{2},\\x\neq\frac{4}{5}.\end{cases}$

所以函数的定义域为 $\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5},+\infty\right)$.

(3)由 $\begin{cases}25-x^2\geqslant0\\\cos x>0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant5,\\2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

所以函数的定义域为 $\left[-5,-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},5\right]$.

(4)由 $\log_{0.5}(4x^2-3x)\geqslant0$，得 $0<4x^2-3x\leqslant1$.

即 $\begin{cases}4x^2-3x>0\\4x^2-3x\leqslant1\end{cases}$，解得 $-\frac{1}{4}\leqslant x<0$ 或 $\frac{3}{4}<x\leqslant1$.

所以函数的定义域为 $\left[-\frac{1}{4},0\right)\cup\left(\frac{3}{4},1\right]$.

(5)由 $1-e^x>0$，得 $x<0$.所以函数的定义域为 $(-\infty,0)$.

(6)要使函数有意义，则只需要：

$\begin{cases}x^2-2x>0\\9-x^2>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x>2\ 或\ x<0\\-3<x<3\end{cases}$，解得 $-3<x<0$ 或 $2<x<3$.

故函数的定义域是 $(-3,0)\cup(2,3)$.

(7)依题意，只需 $-2\leqslant x^2-3x\leqslant4$，

即 $\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant0\\x^2-3x-4\leqslant0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\leqslant1\ 或\ x\geqslant2\\-1\leqslant x\leqslant4\end{cases}$，

解得 $-1\leqslant x\leqslant1$ 或 $2\leqslant x\leqslant4$.

故 $f(x^2-3x)$ 的定义域是 $[-1,1]\cup[2,4]$.

(8)因为 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2,3]$，所以 $-2\leqslant x\leqslant3$.

令 $t=x+1$，所以 $-1\leqslant t\leqslant4$.

所以 $f(t)$ 的定义域为 $\{t|-1\leqslant t\leqslant4\}$.

即 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant4\}$.

要使 $f(2x^2-2)$ 有意义，需使 $-1\leqslant2x^2-2\leqslant4$.

所以 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$.

所以函数 $f(2x^2-2)$ 的定义域为

$\left[-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}\right]$.

12.**解析** (1)$y=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$，又 $0\leqslant x\leqslant3$，依据此函数的图像，可以得到所求函数的值域为 $[-1,7]$.

(2)(有界性法)由 $y=\frac{1-2^x}{1+2^x}$，得 $2^x=\frac{1-y}{1+y}$.

因为 $2^x>0$，所以 $\frac{1-y}{1+y}>0$，所以 $(y-1)(y+1)<0$，$-1<y<1$.

所以原函数的值域是 $(-1,1)$.

(3)(配方法)由 $3+2x-x^2\geqslant0$，得 $-1\leqslant x\leqslant3$.

因为 $y=4-\sqrt{-(x-1)^2+4}$，

所以当 $x=1$ 时，$y_{\min}=4-2=2$；当 $x=-1$ 或 3 时，$y_{\max}=4$.

所以函数值域为 $[2,4]$.

(4)(代数换元法)令 $t=\sqrt{1-2x}\ (t\geqslant0)$，则 $x=\frac{1-t^2}{2}$.

因为 $y=-t^2+t+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，

所以当 $t=\frac{1}{2}$ 即 $x=\frac{3}{8}$ 时，$y_{\max}=\frac{5}{4}$，无最小值.

所以函数值域为 $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$.

(5)(三角换元法)函数的定义域是 $\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$.

设 $x=\sin t$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $y=x+\sqrt{1-x^2}$ 化为 $y=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant t+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$.

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$，所以 $-1\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$.

所以原函数的值域是 $[-1,\sqrt{2}]$.

(6)**解法一**：由题意，可得 $\sin x=\frac{2y}{y+1}$，于是必有 $\left|\frac{2y}{y+1}\right|\leqslant1$，

即 $4y^2\leqslant y^2+2y+1\Rightarrow -\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$.

所以原函数的值域是 $\left[-\frac{1}{3},1\right]$.

解法二：$y=\frac{\sin x}{2-\sin x}=-\frac{\sin x-2+2}{\sin x-2}=-1+\frac{2}{2-\sin x}$，且 $\sin x\in[-1,1]$，$2-\sin x\in[1,3]$，$\frac{2}{2-\sin x}\in\left[\frac{2}{3},2\right]$，得函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{3},1\right]$.

(7)因为 $x+\frac{1}{x-1}+1=x-1+\frac{1}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+2=4$，(当且仅当 $x=2$ 时取"=")，所以 $\log_{0.5}\left(x+\frac{1}{x-1}+1\right)\leqslant\log_{0.5}4=-2$，因此函数的值域为 $(-\infty,-2]$.

(8)(判别式法)因为 $x\in\mathbf{R}$，所以由 $y=\frac{x^2-x+3}{x^2-x+1}$，得 $(y-1)x^2+(1-y)x+(y-3)=0$.

当 $y=1$ 时，此等式不成立，故 $y\neq1$.

所以 $\Delta=(1-y)^2-4(y-1)(y-3)\geqslant0$.

整理，得 $3y^2-14y+11\leqslant0$，解得 $1\leqslant y\leqslant\frac{11}{3}$，且 $y\neq1$.

故函数值域为 $\left(1,\frac{11}{3}\right]$.

**评注** 本题亦可用分离常数法得 $y=1+\frac{2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，故值域为 $\left(1,\frac{11}{3}\right]$.

**【例 2.24 变式 1】**

**解析** (1)函数 $f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 的定义域为 $\{x|-1\leqslant x<1\}$，其定义域不关于原点对称，故函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(2)函数 $f(x)=\frac{3-|x+3|}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域为 $(-2,2)$，其定义域关于原点对称，又函数 $f(x)=\frac{3-|x+3|}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$，可得 $f(-x)=-f(x)$，故函数 $f(x)$ 为奇函数.

(3)解法一：设 $x<-1$，则 $-x>1$，$f(-x)=-x-2=-f(x)$，同样，当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$f(-x)=-f(x)$，因此函数 $f(x)$ 为奇函数.

解法二：(图像法)函数定义域关于原点对称. 函数 $f(x)$ 的图像如图 2-40所示，函数 $f(x)$ 为奇函数.

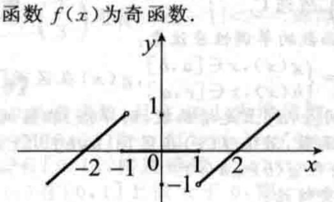


图 2-40

(4)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，

又 $f(-x)=|-x-2|+|-x+2|=|x+2|+|x-2|=f(x)$.

故函数 $f(x)$ 为偶函数.

**【例 2.24 变式 2】**

**解析** 函数的定义域为 $\mathbf{R}$，

又 $f(-x)+f(x)=\lg\frac{\sqrt{2+x^2}-x}{\sqrt2}+\lg\frac{\sqrt{2+x^2}+x}{\sqrt2}$

$=\lg\left(\frac{x^2+2-x^2}{2}\right)=0$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

**【例 2.25 变式 1】**

**解析** $F(x)=xf(x)$ 是偶函数，由运算函数的奇偶性规律可知：$f(x)$ 为奇函数.故选 A.

**【例 2.25 变式 2】**

**解析** 若函数 $y=f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，此时 $|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$，因此 $y=|f(x)|$ 是偶函数，其图像关于 $y$ 轴对称，但当 $y=|f(x)|$ 的图像关于 $y$ 轴对称时，未必推出 $y=f(x)$ 为奇函数，如函数 $y=x^2$ 为偶函数，且 $y=|f(x)|=|x^2|=x^2$ 的图像关于 $y$ 轴对称，并非是奇函数，故"$y=|f(x)|$的图像关于 $y$ 轴对称"是"$y=f(x)$是奇函数"的必要而不充分条件.故选 B.

**【例 2.26 变式 1】**

**分析** 对于抽象函数的奇偶性判断通常利用赋值法，令 $x=y=0$ 转化.

**解析** 令 $x=y=0$ 得 $f(0)=2f(0)$，$f(0)=0$.令 $y=-x$ 得 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$，$f(-x)=-f(x)$，所以函数 $y=f(x)$ 为奇函数.

**【例 2.26 变式 2】**

**解析** 由于 $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$，令 $x=y=0$，得 $2f(0)=f(0)$，即 $f(0)=0$.令 $y=-x$，则 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

**【例 2.26 变式 3】**

**解析** (1)解法一：令 $x=y=0$，

则 $f(0)=f(0)g(0)-g(0)f(0)=0$，

令 $x=1,y=0$，则 $f(1)=f(1)g(0)-g(1)f(0)$，

又 $f(1)\neq0$，$f(0)=0$，所以 $g(0)=1$.

令 $x=0$，则 $f(-y)=f(0)g(y)-g(0)f(y)=-f(y)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

解法二：令 $x=m-n$，则 $-x=n-m$.

所以 $f(x)=f(m-n)=f(m)g(n)-g(m)f(n)$，

$f(-x)=f(n-m)=f(n)g(m)-g(n)f(m)=-f(x)$.

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2)令 $x=1$ 且 $y=-1$，则 $f(2)=f(1)g(-1)+g(1)f(1)$，

所以 $f(2)=f(1)[g(-1)+g(1)]$，又因为 $f(1)=f(2)\neq0$，

所以 $g(-1)+g(1)=1$，故 $g(-1)+g(1)$ 的值为 1.

**【例 2.26 变式 4】**

**解析** 解法一：由于 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$，

设 $x_1=x_2=0$，则 $f(0)=2f(0)+1$.

故 $f(0)=-1$.设 $x_1=x$，$x_2=-x$，

则 $f(0)=f(x)+f(-x)+1=-1$，

所以 $f(x)+1=-f(-x)-1=-[f(-x)+1]$.

令 $F(x)=f(x)+1$，

故 $F(-x)=f(-x)+1=-[f(x)+1]=-F(x)$.

因此函数 $F(x)=f(x)+1$ 是奇函数.

解法二：因为 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$，两边同时加 1 得 $f(x_1+x_2)+1=[f(x_1)+1]+[f(x_2)+1]$，

令 $g(x)=f(x)+1$，

则 $g(x_1+x_2)=f(x_1+x_2)+1$，$g(x_1)=f(x_1)+1$，$g(x_2)=f(x_2)+1$.

则 $g(x_1+x_2)=g(x_1)+g(x_2)$.

由变式 1 可知 $g(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)+1$ 为奇函数.故选 C.

**【例 2.27 变式 1】**

**解析** 解法一：由函数的定义域为 $\{x|x\neq-\frac{1}{2}$ 且 $x\neq a\}$，又因 $f(x)$ 为奇函数，可知定义域关于原点对称，故 $a=\frac{1}{2}$.故选 A.

解法二：$f(x)=\frac{x}{(2x+1)(x-a)}$，为奇函数，由分子为奇函数，则分母为偶函数，又知分母为二次函数，则一次项系数为 0，所以 $a=\frac{1}{2}$.故选 A.

**【例 2.27 变式 2】**

**分析** 若奇函数的定义域含有数 0，则必有 $f(0)=0$.

**解析** 函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+2a^2})$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 为定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且在 $x=0$ 处有意义，故满足 $f(0)=0$，从而得 $\log_a\sqrt{2a^2}=0\Rightarrow a^2=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt2}{2}$.又 $a>0$ 且 $a\neq1$，

所以 $a=\frac{\sqrt2}{2}$.

**【例 2.27 变式 3】**

**解析** 解法一：因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)+f(x)=0$，即 $\frac{1}{2^{-x}-1}+a+\frac{1}{2^x-1}+a=0$，整理得 $\frac{1-2^x}{2^x-1}+2a=0$，得 $a=\frac{1}{2}$.

**解法二**：(赋值法)因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-1)+f(1)=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

**【例 2.28 变式 1】**

**解析** 当 $x<0$ 时，$-x>0$，
所以 $f(-x)=-x-(-x)^2=-x-x^2$.
因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)=x^2+x$，
所以当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+x$；当 $x=0$ 时，$f(0)=0$.
所以 $f(x)=\begin{cases}x^2+x(x\leqslant 0)\\ x-x^2(x>0)\end{cases}$.

**【例 2.29 变式 1】**

**解析** 依题意 $f(x)+g(x)=e^x$，得 $f(-x)+g(-x)=e^{-x}$，且 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则 $f(x)-g(x)=e^{-x}$，
故 $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.故选 D.

**【例 2.30 变式 1】**

**解析** $f(1)+f(-1)=a\sin 1+b+c+a\sin(-1)-b+c=2c$，因为 $c\in\mathbf{Z}$，则 $f(1)+f(-1)$ 为偶数，在四个选项中，只有选项 D 中，$1+2=3$ 不是偶数.故选 D.

**【例 2.30 变式 2】**

**解析** 将函数解析式化简，利用函数的奇偶性求解.
$f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}=1+\frac{2x+\sin x}{x^2+1}$，
设 $g(x)=\frac{2x+\sin x}{x^2+1}$，则 $g(-x)=-g(x)$，所以函数 $g(x)$ 是奇函数.由奇函数图像的对称性知 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=0$，
所以 $M+m=[g(x)+1]_{\max}+[g(x)+1]_{\min}$
$=2+g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=2$.

**【例 2.31 变式 1】**

**分析** 判断抽象函数单调性利用定义法求解.

**解析** 任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，设 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，因为 $x>0$ 时，$f(x)>2$，所以 $f(x_2-x_1)>2$.由 $f(x)+f(y)=f(x+y)+2$，可得 $f(x+y)-f(x)=f(y)-2$.
设 $x+y=x_2$，$x=x_1$，则 $y=x_2-x_1$，
所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)-2$.
因为 $f(x_2-x_1)>2$，
所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)-2>0$，
所以 $f(x_2)>f(x_1)$.即当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，
所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

**评注** 凡判定抽象函数的单调性时，利用赋值法或定义法比较 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 的大小.

**【例 2.31 变式 2】**

**解析** (1)令 $a=b=0$，则 $f(0)=[f(0)]^2$，因为 $f(0)\neq 0$，所以 $f(0)=1$.
(2)当 $x>0$ 时，$f(x)>1>0$；当 $x=0$ 时，$f(0)=1>0$；
当 $x<0$ 时，$f(x)\cdot f(-x)=f(0)=1$，则 $f(x)=\frac{1}{f(-x)}>0$，
故对任意的 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x)>0$，故 $f(a+b)>f(b)$.
(3)令 $a>0$，则 $a+b>b$，
$f(a+b)-f(b)=f(a)f(b)-f(b)=[f(a)-1]\cdot f(b)$，
当 $a>0$ 时，$f(a)>1$，且 $b\in\mathbf{R}$，恒有 $f(b)>0$.
所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.
(4)因为 $f(x)\cdot f(2x-x^2)=f(3x-x^2)>1=f(0)$，所以 $3x-x^2>0$，所以 $0<x<3$，故 $x$ 的取值范围为 $(0,3)$.

**【例 2.32 变式 1】**

**解析** 用图像法解决，将 $y=\ln x$ 的图像关于 $y$ 轴对称得到 $y=\ln(-x)$，再向右平移两个单位，得到 $y=\ln[-(x-2)]$ 的图像，将得到的图像在 $x$ 轴下方的部分翻折上来，即得到 $f(x)=|\ln(2-x)|$ 的图像，且 $f(1)=0$，由图 2-41 知，选项中 $f(x)$ 是增函数的显然只有 D.故选 D.

**评注** 函数 $f(x)=|\ln(2-x)|$ 的图像，也可先作函数 $y=\ln(x+2)$ 的图像，将其关于 $y$ 轴对称得函数 $y=\ln(2-x)$ 的图像，再将 $x$ 轴下方的部分翻折到 $x$ 轴上方，$x$ 轴上方的部分不变，得到函数 $f(x)=|\ln(2-x)|$ 的图像.

**【例 2.32 变式 2】**

**解析** 如图 2-42所示，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上单调递增，因此 $[1,+\infty)\subseteq[a,+\infty)$，故 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

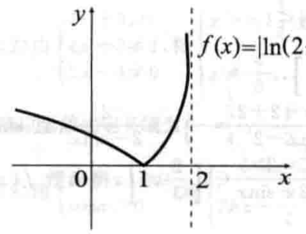


图 2-41

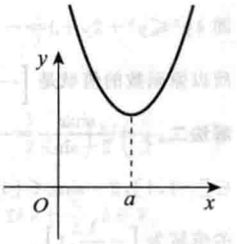


图 2-42

**【例 2.32 变式 3】**

**分析** 根据题意作出函数 $f(x)$ 的草图，判断函数的单调性及求函数的单调区间.

**解析** 由 $f(x)=f(2-x)$ 可知 $f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称，又因为 $f(x)$ 为偶函数，其图像关于 $x=0$ 对称，可得到 $f(x)$ 为周期函数且最小正周期是 2，结合 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数，可得到如图 2-43 所示的函数 $f(x)$ 的草图.观察可知，$f(x)$ 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数，在区间 $[3,4]$ 上是减函数.故选 B.

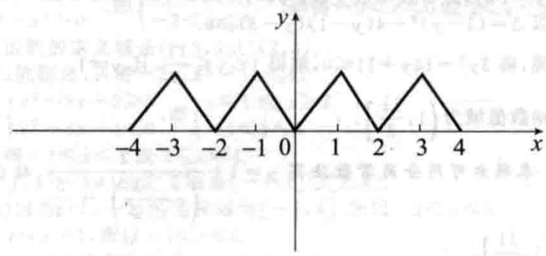


图 2-43

**【例 2.32 变式 4】**

**分析** 本题所给的函数为分段的形式，要满足在 $\mathbf{R}$ 上递减不仅要满足在每一个子区间上都递减，而且要满足在整个定义域上都递减.

**解析** 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减，故 $x<1$ 时，$f(x)=(3a-1)x+4a$ 单调递减，因此 $3a-1<0$，得 $a<\frac{1}{3}$；当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 单调递减，故 $0<a<1$.
同时结合函数 $f(x)$ 的图像(如图2-44所示)，当 $x=1$ 时，$(3a-1)+4a\geqslant\log_a 1$，解得 $a\geqslant\frac{1}{7}$.综上，$a$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)$.故选 C.

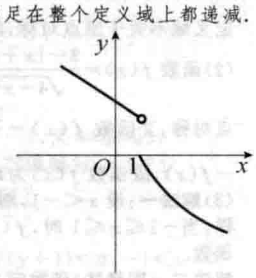


图 2-44

**评注** 关于分段函数的单调性应注意：
若函数 $f(x)=\begin{cases}g(x),x\in[a,b]\\ h(x),x\in[c,d]\end{cases}$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数，$h(x)$ 在区间 $[c,d]$ 上是增函数，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]\cup[c,d]$ 上不一定是增函数，若使 $f(x)$ 在区间 $[a,b]\cup[c,d]$ 上一定是增函数，需补充条件 $g(b)\leqslant h(c)$.
即有下面的重要结论：
分段函数 $f(x)=\begin{cases}g(x),x\in[a,b]\\ h(x),x\in[c,d]\end{cases}$ 为单调递增函数
$\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\text{在区间}[a,b]\text{上递增}\\ h(x)\text{在区间}[c,d]\text{上递增；}\\ g(x)_{\max}\leqslant h(x)_{\min}\end{cases}$
函数 $f(x)=\begin{cases}g(x),x\in[a,b]\\ h(x),x\in[c,d]\end{cases}$ 为单调递减函数
$\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\text{在区间}[a,b]\text{上递减}\\ h(x)\text{在区间}[c,d]\text{上递减.}\\ g(x)_{\min}\geqslant h(x)_{\max}\end{cases}$

**【例 2.33 变式 1】**

**分析** 先证明周期性，再利用函数周期求解函数值.

**解析** $f(x)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$，$f(x)+f\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$，
同理 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)+f(x+3)=0$.
所以 $f(x+3)=f(x)$，故 $T=3$，
所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)+f(2009)$

$=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)+f(2009)+f(2010)-f(2010)$
$=670(f(1)+f(2)+f(3))-f(0)=670(f(-2)+f(-1)+f(0))-2=-2$.故选 A.

**【例 2.33 变式 2】**

**解析** $f(x+1)=\dfrac{1}{f(x)}$,$f(x+1)\cdot f(x)=1$,有 $f(x+1)\cdot f(x+2)=1$,所以 $f(x)=f(x+2)$,故 $T=2$,

所以 $f(2010)=f(0)=\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{1}{8}$.

**【例 2.33 变式 3】**

**解析** $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$,即 $f(x+2)\cdot f(x)=1$,有 $f(x+4)\cdot f(x+2)=1$,所以 $f(x+4)=f(x)$,故 $T=4$,$f(5)=f(1)=-5$,

所以 $f(f(5))=f(-5)=f(-1)=\dfrac{1}{f(1)}=-\dfrac{1}{5}$.

**【例 2.34 变式 1】**

**解析** 令 $y=1$,$4f(x)\cdot f(1)=f(x+1)+f(x-1)\Rightarrow f(x)=f(x+1)+f(x-1)\Rightarrow f(x+1)=f(x)-f(x-1)$,$T=6$,所以 $f(2010)=f(0)$.又令 $x=1$,$y=0$,有 $4f(1)\cdot f(0)=f(1)+f(1)$,所以 $f(0)=\dfrac{1}{2}$,$f(2010)=\dfrac{1}{2}$.

**【例 2.35 变式 1】**

**解析** $f(x+a)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$,$f(x+2a)=\dfrac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}$

$=\dfrac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\dfrac{1}{f(x)}$,所以 $f(x+2a)\cdot f(x)=-1$,即

$f(x+2a)\cdot f(x+4a)=-1$,所以 $f(x+4a)=f(x)$,$T=4|a|$,故 $f(x)$为周期函数,且 $T=4|a|$.

**【例 2.36 变式 1】**

**解析** 因为 $f(x+8)$为偶函数,所以 $f(-x+8)=f(x+8)$,所以 $f(x)$关于 $x=8$ 轴对称,又因 $x\in(8,+\infty)$时 $f(x)$为减函数,所以 $x\in(-\infty,8]$时为增函数,所以$|x-8|$越小,$f(x)$越大,

$|6-8|>|7-8|\Rightarrow f(6)<f(7)$;

$|6-8|>|9-8|\Rightarrow f(6)<f(9)$;

$|7-8|=|9-8|\Rightarrow f(7)=f(9)$;

$|7-8|<|10-8|\Rightarrow f(7)>f(10)$.故选 D.

**【例 2.36 变式 2】**

**解析** 偶函数 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减,即$|x|$越大,$f(x)$越大,由 $f(2x-1)=f(|2x-1|)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)$可得,$|2x-1|<\dfrac{1}{3}$,解得$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}$.

故选 A.

**【例 2.36 变式 3】**

**解析** 因为 $f(x)$是奇函数,且在 **R** 上为增函数,又 $f(m\sin\theta)+f(1-m)>0\Rightarrow f(m\sin\theta)>-f(1-m)=f(m-1)\Rightarrow m\sin\theta>m-1$,令 $t=\sin\theta\in[0,1]$,构造函数 $g(t)=mt-m+1$,$t\in[0,1]$,由函数 $g(t)$在$[0,1]$上恒大于 0,则 $-m+1>0$,故 $m<1$.故选 D.

**【例 2.36 变式 4】**

**解析** $f(x)=(x-3)^3+x-1=(x-3)^3+x-3+2$,设 $t=x-3$,令 $g(t)=t^3+t$,易知函数$g(t)$在 **R** 上为单调递增的奇函数.

由 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$,

得 $g(t_1)+g(t_2)+\cdots+g(t_7)=0$.

其中 $t_1=a_1-3$,$t_2=a_2-3$,$\cdots$.

若 $t_1+t_7>0$ 时,得 $t_1>-t_7$,$g(t_1)>g(-t_7)=-g(t_7)$,

即 $g(t_1)+g(t_7)>0$,同理 $g(t_2)+g(t_6)>0$,$g(t_3)+g(t_5)>0$,$g(t_4)>0$.

故 $t_1+t_7>0$,得 $g(t_1)+g(t_2)+\cdots+g(t_7)>0$.

若 $t_1+t_7<0$ 时,同理得 $g(t_1)+g(t_2)+\cdots+g(t_7)<0$.

又 $g(t_1)+g(t_2)+\cdots+g(t_7)=0$,故只有 $t_1+t_7=0$,

即 $a_1+a_7=6$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=\dfrac{(a_1+a_7)\times 7}{2}=21$.

故选 D.

**评注** 本题考查了单调递增的奇函数的性质:若$\forall x_1,x_2\in D$,$x_1+x_2>0\Leftrightarrow f(x_1)+f(x_2)>0$,或 $\forall x_1,x_2\in D$,$x_1+x_2<0\Leftrightarrow f(x_1)+f(x_2)<0$.

**【例 2.37 变式 1】**

**解析** 由 $f(x+1)=-f(x)$,可得 $T=2$,

所以 $a=f(3)=f(-1)$,$b=f(\sqrt{2})=f(\sqrt{2}-2)$,

$c=f(2)=f(0)$,因为 $f(x)$在$[-1,0]$上单调递增,

所以 $f(0)>f(\sqrt{2}-2)>f(-1)$,所以 $c>b>a$.故选 D.

**【例 2.37 变式 2】**

**解析** 由 $f(x-4)=-f(x)$,可得 $T=8$,所以 $f(80)=f(0)$,$f(-25)=f(-1)$,$f(11)=f(3)=-f(-1)=f(1)$,因为 $f(x)$为定义在 **R** 上的奇函数且在$[0,2]$上为单调递增,所以 $f(x)$在$[-2,2]$上单调递增,所以 $f(1)>f(0)>f(-1)$,即 $f(-25)<f(80)<f(11)$.故选 D.

**【例 2.38 变式 1】**

**解析** 因为 $f(x)$的 $T=2$,且是定义在 **R** 上的奇函数,所以 $f(0)=0$,则 $f(1)+f(4)+f(7)=f(1)+f(0)+f(-1)=0$.故选 B.

**【例 2.38 变式 2】**

**解析** 因为当 $0\leqslant x<2$ 时,$f(x)=x^3-x=x(x^2-1)$,又因为$f(x)$是 **R** 上最小正周期为 2 的周期函数,且 $f(0)=0$,所以 $f(6)=f(4)=f(2)=f(0)=0$,又因为 $f(1)=0$,所以 $f(3)=0$,$f(5)=0$,故函数 $y=f(x)$的图像在区间$[0,6]$上与 $x$ 轴的交点的个数为 7 个.故选 B.

**【例 2.39 变式 1】**

**分析** 当 $x_1<x_2$ 时,$f(x_1)\leqslant f(x_2)$,可知 $f(x)$为非减函数,求这类函数值时用夹逼的方法解答.

**解析** 由 $f(0)=0$,$f(x)+f(1-x)=1$,

可得 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$,$f(1)=1-f(0)=1$,

$f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{2}f(1)=\dfrac{1}{2}$,当 $x\in\left[\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{2}\right]$时,

$\dfrac{1}{2}=f\left(\dfrac{1}{5}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$,

所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}$,$x\in\left[\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{2}\right]$.

同理,当 $x\in\left[\dfrac{1}{25},\dfrac{1}{10}\right]$时,$f(x)=\dfrac{1}{4}$,

当 $x\in\left[\dfrac{1}{125},\dfrac{1}{50}\right]$时,$f(x)=\dfrac{1}{8}$,

当 $x\in\left[\dfrac{1}{625},\dfrac{1}{250}\right]$,时 $f(x)=\dfrac{1}{16}$,

当 $x\in\left[\dfrac{1}{3125},\dfrac{1}{1250}\right]$时,$f(x)=\dfrac{1}{32}$.

又因为$\dfrac{1}{3125}<\dfrac{1}{2010}<\dfrac{1}{1250}$,所以 $f\left(\dfrac{1}{2010}\right)=\dfrac{1}{32}$.

**【例 2.39 变式 2】**

**解析** 设 $x_1\in[0,1]$,$f(x_1)=x_1+g(x_1)\in[-2,5]$.因为 $g(x)$是以 1 为周期的函数,所以当 $x_2\in[1,2]$时,$f(x_2)=f(x_1+1)=x_1+1+g(x_1+1)=x_1+1+g(x_1)\in[-1,6]$,当 $x_3\in[2,3]$时,$f(x_3)=f(x_1+2)=x_1+2+g(x_1+2)=x_1+g(x_1)+2\in[0,7]$,综上可知,当$\in[0,3]$时,$f(x)\in[-2,7]$.

**【例 2.39 变式 3】**

**解析** (1)由③得 $f(1)\geqslant f(1)+f(0)\Rightarrow f(0)\leqslant 0$,由①得 $f(0)\geqslant 0$,所以 $f(0)=0$.当 $0<x<1$ 时,令 $t>0$ 且 $t+x=1$,

由②,③得 $f(1)\geqslant f(x)+f(t)$,又因为 $f(x)$为$[0,1]$上的连续函数.所以 $f(x)\leqslant 1$,所以 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$,所以 $f(x)$的值域为$[0,1]$.

(2)$g(x)=2^x-1(x\in[0,1])$是理想函数.证明如下:$x\in[0,1]$时,$1\leqslant 2^x\leqslant 2$,所以 $2^x-1\geqslant 0$,所以满足①;

$f(1)=2^1-1=1$,所以满足②;

$x_1\geqslant 0$,$x_2\geqslant 0$,$x_1+x_2\leqslant 1$ 时,$g(x_1+x_2)-g(x_1)-g(x_2)=2^{x_1+x_2}-2^{x_1}-2^{x_2}+1=(2^{x_1}-1)(2^{x_2}-1)$.

因为 $x_1\geqslant 0$,$x_2\geqslant 0$,所以 $2^{x_1x_2}\geqslant 1$,$2^{x_1x_2}\geqslant 1$,所以$(2^{x_1}-1)(2^{x_2}-1)\geqslant 0$.所以 $g(x_1+x_2)-g(x_1)-g(x_2)\geqslant 0$,即 $g(x_1+x_2)\geqslant g(x_1)+g(x_2)$.所以满足③.

故函数 $g(x)=2^x-1(x\in[0,1])$为理想函数.

(3)证明:假设 $f(x_0)=t$,当 $x_0>t$ 时,$f(f(x_0))=f(t)=x_0$,因为 $x_0>t$,函数 $f(x)$在$[0,1]$上非减,所以 $f(x_0)\geqslant f(t)$,即 $t\geqslant x_0$ 与 $x_0>t$ 矛盾,故当 $x_0>t$ 时不成立.同理当 $x_0<t$ 时,也与已知矛盾.所以 $f(x_0)=x_0$.

**最有效训练题**

1.D　解析　由 $x^2-2x-3>0$ 得函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$，且在二次函数 $t=x^2-2x-3$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数，在 $(3,+\infty)$ 上是增函数，而 $y=\log_2 t$ 是增函数，所以复合函数 $f(x)=\log_2(x^2-2x-3)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数.故选 D.

2.C　解析　由于 $f(x)=x^2$ 在 $[-2,0]$ 上单调递减，在 $[0,3]$ 上单调递增，故最小值点 $x_1=0$，最大值点 $x_2=3$，$|x_1-x_2|=3$.故选 C.

3.C　解析　令 $t=\log_a x(0<a<1)$，则此函数为减函数，由图知 $y=f(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上都是减函数，在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上是增函数，当 $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时，$x\in[\sqrt{a},1]$，所以函数 $g(x)=f(\log_a x)$ 在 $[\sqrt{a},1]$ 上是减函数.故选 C.

4.C　解析　依题意，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

则 $\begin{cases}4-a>0\\a>1\\2(4-a)\leqslant a^2\end{cases}$，解得 $2\leqslant a<4$.故选 C.

5.A　解析　$f(\log_2 12)=f(\log_2 12-4)=f\left(\log_2\frac{3}{4}\right)$

$=f\left(-\log_2\frac{3}{4}\right)=f\left(\log_2\frac{4}{3}\right)$，由于 $0<\log_2\frac{4}{3}<1$，

故 $f\left(\log_2\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}$.故选 A.

6.B　解析　令 $g(x)=x^3+x,x\in\mathbf{R}$，则 $g(x)$ 为单调递增的奇函数，又 $f(a)=1,f(b)=-5$，所以 $f(a)+f(b)=g(a)-2+g(b)-2=-4$，即 $g(a)+g(b)=0$，所以 $a+b=0$.故选 B.

7.3　解析　$y=f(x)$ 是奇函数，则 $f(-1)=-f(1)$.
$g(1)+g(-1)=f(1)+f(-1)+4=4$，
所以 $g(-1)=4-g(1)=3$.

8.4.

9.$-x^2+2x-3(x\in\mathbf{R})$　解析　依题意，$f(-x)+g(-x)=x^2-2x+3=-f(x)+g(x)$，因此 $f(x)-g(x)=2x-x^2-3(x\in\mathbf{R})$.

10.$\left(-\frac{1}{2},1\right]$　解析　依题意，$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上为单调递减的奇函数，则 $\begin{cases}-2\leqslant m+1\leqslant 2\\-2\leqslant m\leqslant 2\\2m+1>0\end{cases}$，解得 $-\frac{1}{2}<m\leqslant 1$.

11.解析　(1)证明：因为 $f(x+2)=-f(x)$，
所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$.
所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.
(2)当 $x\in[2,4]$ 时，$x-2\in[0,2]$，所以 $f(x-2)=-x^2+6x-8$，又因为 $f(x-2)=-f(x)$，所以当 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=x^2-6x+8$.
(3)$f(0)=0,f(2)=0,f(1)=1,f(3)=-1$.又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，所以 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=\cdots=f(2008)+f(2009)+f(2010)+f(2011)=0$.所以 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2011)=0$.

12.　解析　(1)因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，得 $b=1$，又 $f(-1)=-f(1)$ 得 $a=1$.经检验 $a=1,b=1$.符合题意.
(2)任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1-2^{x_1}}{2^{x_1}+1}-\frac{1-2^{x_2}}{2^{x_2}+1}$

$=\frac{(1-2^{x_1})(2^{x_2}+1)-(1-2^{x_2})(2^{x_1}+1)}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$

$=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$

因为 $x_1<x_2$，所以 $(2^{x_2}-2^{x_1})>0$，又 $(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数.
(3)因为 $t\in\mathbf{R}$，不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 恒成立，所以 $f(t^2-2t)<-f(2t^2-k)$，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(t^2-2t)<f(k-2t^2)$，又因为 $f(x)$ 为减函数，所以 $t^2-2t>k-2t^2$，即 $k<3t^2-2t$ 恒成立，而 $3t^2-2t=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\geqslant-\frac{1}{3}$.所以 $k<-\frac{1}{3}$，则实数 $k$ 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$.

**【例 2.40 变式 1】**

解析　方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根，$\Delta=m^2-4>0$，得 $m>2$ 或 $m<-2$.故选 C.

**【例 2.40 变式 2】**

解析　依题意 $f(1)=0$，且 $a>0,c<0$，函数 $f(x)$ 的图像如图 2-45 所示.且 $f(-2)=4a-2b+c=a+b+c+3a-3b=3(a-b)>0$，因此若 $f(m)<0$，则 $f(m+3)>0$.故选 A.

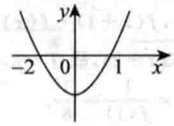

图 2-45

**【例 2.41 变式 1】**

解析　(1)当 $a=1$ 时，不等式可化为 $-(x^2-x-1)\geqslant 0$，若 $x>0$ 时均有 $x^2-x-1\leqslant 0$，由二次函数的图像知，显然不成立，所以 $a\neq 1$.
(2)当 $a<1$ 时，因为 $x>0$，$(a-1)x-1<0$，且二次函数 $y=x^2-ax-1$ 的图像开口向上，所以不等式 $x^2-ax-1\leqslant 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上不能恒成立，所以 $a<1$ 不成立.
(3)当 $a>1$ 时，如图 2-46 所示，令 $f(x)=(a-1)x-1,g(x)=x^2-ax-1$，两函数的图像均过定点 $(0,-1)$.要满足对 $\forall x\geqslant 0$ 时，不等式 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$ 成立，

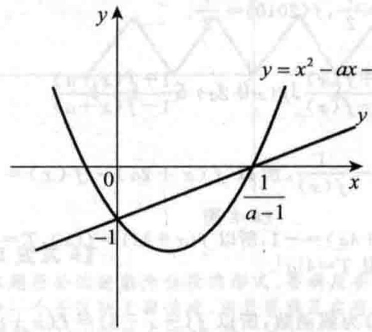

图 2-46

则一次函数 $y=(a-1)x-1$ 与二次函数 $y=x^2-ax-1$ 在 $x$ 轴上有相同交点 $\left(\frac{1}{a-1},0\right)$，所以有 $\left(\frac{1}{a-1}\right)^2-\frac{a}{a-1}-1=0$，整理得 $2a^2-3a=0$，解得 $a=\frac{3}{2}$，$a=0$(舍去).综上可知 $a=\frac{3}{2}$.

**【例 2.41 变式 2】**

解析　当 $x\geqslant 1$ 时，$g(x)\geqslant 0$，由 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)<0$ 或 $g(x)<0$，得当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)<0$，依题意 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)<0$，$x\in[1,+\infty)$，得 $m<0$ 且 $2m<1$，$-m-3<1$，得 $-4<m<0$，故 $m$ 的取值范围是 $(-4,0)$.

**【例 2.42 变式 1】**

解析　解法一：由于方程 $(1-m^2)x^2+2mx-1=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=4m^2+4(1-m^2)=4>0$，又 $f(0)=-1<0$，根据已知两根一个小于 0，一个大于 1 及函数图像，抛物线 $f(x)=(1-m^2)x^2+2mx-1$ 开口向上，且 $f(1)<0$，

故 $\begin{cases}1-m^2>0\\-m^2+2m<0\end{cases}$，解得 $m>2$ 或 $m<0$.综上，$-1<m<0$.

解法二：原方程可化为 $[(1-m)x+1][(1+m)x-1]=0$，

解得 $x_1=\frac{1}{m-1}$，$x_2=\frac{1}{m+1}$，因为 $m+1>m-1$，

且 $x_1$ 与 $x_2$ 一正一负，故有 $\begin{cases}\frac{1}{m+1}>1\\\frac{1}{m-1}<0\end{cases}$，解得 $-1<m<0$.

所以 $m$ 的取值范围是 $(-1,0)$.

**【例 2.42 变式 2】**

解析　由题意知 $f(1)=1+2b+c=0$，所以 $c=-1-2b$.
记 $g(x)=f(x)+x+b=x^2+(2b+1)x+b+c=x^2+(2b+1)x-b-1$，则 $\begin{cases}g(-3)=5-7b>0\\g(-2)=1-5b<0\\g(0)=-1-b<0\\g(1)=b+1>0\end{cases}$，得 $\frac{1}{5}<b<\frac{5}{7}$.

故实数 $b$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{5},\frac{5}{7}\right)$.

【例 2.43 变式 1】

**解析** 作出函数 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上符合单调递增的图像，如图 2-47所示，那么对称轴 $x=\frac{k}{4}\leqslant -1$，得 $k\leqslant -4$. 所以 $k$ 的取值范围为 $(-\infty,-4]$.

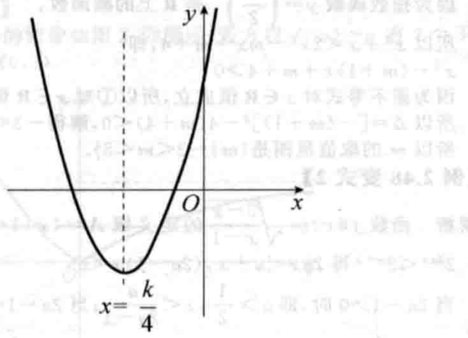

图 2-47

**评注** 通过本题，希望同学们了解"函数的单调递增区间为 $M$"与"函数在区间 $N$ 上是增函数"两个概念的不同，应该知道这两者间存在子集关系，即 $N\subseteq M$. 由题意，此二次函数开口向上，故其单调增区间为 $\left[\frac{k}{4},+\infty\right)$，故应有 $[-1,+\infty)\subseteq\left[\frac{k}{4},+\infty\right)$，所以可知 $\frac{k}{4}\leqslant -1\Rightarrow k\leqslant -4$.

【例 2.44 变式 1】

**解析** $f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2=4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-2a+2$，其图像开口向上，对称轴为 $x=\frac{a}{2}$.

(1)当 $\frac{a}{2}\leqslant 0$，即 $a\leqslant 0$ 时，函数在区间 $[0,2]$ 上为增函数，故 $f(x)_{\min}=f(0)=a^2-2a+2$. 由 $a^2-2a+2=3$，得 $a=1\pm\sqrt{2}$，因为 $a\leqslant 0$，所以 $a=1-\sqrt{2}$.

(2)当 $0<\frac{a}{2}<2$，即 $0<a<4$ 时，对称轴 $x=\frac{a}{2}$ 处于区间 $[0,2]$ 内部，故函数的最小值在对称轴处取得，故 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{a}{2}\right)=-2a+2$. 由 $-2a+2=3$，得 $a=-\frac{1}{2}\notin(0,4)$，舍去.

(3)当 $\frac{a}{2}\geqslant 2$，即 $a\geqslant 4$ 时，函数在区间 $[0,2]$ 上为减函数，故 $f(x)_{\min}=f(2)=a^2-10a+18$. 由 $a^2-10a+18=3$，得 $a=5\pm\sqrt{10}$，因为 $a\geqslant 4$，所以 $a=5+\sqrt{10}$.

综上所述，满足条件的实数 $a$ 的值为 $1-\sqrt{2}$ 或 $5+\sqrt{10}$.

**评注** 由本题求解过程可知：二次函数在给定的区间上的最值只可能在区间两个端点处或对称轴处取得. 若本题改为选择题或填空题，根据以上结论，是否有更为简单的求解方法？请同学们相互交流、讨论.

【例 2.44 变式 2】

**解析** (1) $f(x)=x^2-2ax+5$ 的对称轴为 $x_0=a$，所以 $f(x)$ 在 $[1,a]$ 上单调递减，所以 $\begin{cases}f(1)=a\\f(a)=1\end{cases}\Rightarrow a=2$. 故实数 $a$ 的值为 2.

(2)若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2]$ 上单调递减，则 $a\geqslant 2$.

当 $x\in[1,a+1]$ 时，$f(x)_{\min}=f(a)=5-a^2$，$f(x)_{\max}=f(1)=6-2a$. 所以对任意的 $x_1,x_2\in[1,a+1]$，总有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4$，即 $|f(x)_{\max}-f(x)_{\min}|\leqslant 4$，即 $6-2a-5+a^2\leqslant 4$

$\Rightarrow a^2-2a-3\leqslant 0\Rightarrow -1\leqslant a\leqslant 3$. 综上所述，$2\leqslant a\leqslant 3$.

故 $a$ 的取值范围为 $[2,3]$.

(3) $f(x)=x^2-2ax+5(a>1)$ 在 $x\in[1,3]$ 上有零点，即 $x^2-2ax+5=0$ 在 $[1,3]$ 上有解，所以 $2a=x+\frac{5}{x}$. 因为 $2\sqrt{5}\leqslant x+\frac{5}{x}\leqslant 6$，所以 $2\sqrt{5}\leqslant 2a\leqslant 6\Rightarrow\sqrt{5}\leqslant a\leqslant 3$. 故 $a$ 的取值范围为 $[\sqrt{5},3]$.

【例 2.45 变式 1】

**解析** 因为二次函数 $f(1+x)=f(1-x)$，所以 $x=1$ 为其对称轴方程. 因为 $f(1)=1$，所以 $f(x)=a(x-1)^2+1$. 又 $f(0)=0$，所以 $a=-1$，故 $f(x)=-x^2+2x$.

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(1)=1$，即 $m<n\leqslant 1$，所以 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上单调递增，故 $f(m)=m$，$f(n)=n$，即 $m,n$ 分别为方程 $f(x)=x$ 即 $-x^2+2x=x$ 的两根，解得 $x_1=0$，$x_2=1$，又 $m<n$，故 $m=0$，$n=1$.

【例 2.45 变式 2】

**解析** 依题意，若 $a=-2$ 时，$b\in[0,2]$，若 $b=2$ 时，$a\in[-2,0]$，则在平面直角坐标系 $aOb$ 中，点 $(a,b)$ 的运动轨迹与两坐标轴围成的图形，如图 2-48所示. 则该图形的面积为 $2\times 2=4$. 故选 C.

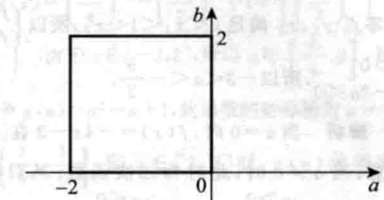

图 2-48

**最有效训练题**

1.C **解析** 函数 $y=2x^2-6x+3$ 的图像的对称轴为 $x=\frac{3}{2}>1$，所以函数 $y=2x^2-6x+3$ 在 $[-1,1]$ 上为单调递减函数，所以当 $x=1$ 时，$y_{\min}=2-6+3=-1$. 故选 C.

2.A **解析** $a,b,c$ 成等比数列，故 $a,b,c$ 均不为零，则函数 $y=ax^2+bx+c$ 为二次函数. 由 $b^2=ac$ 得 $\Delta=b^2-4ac=-3b^2<0$，故函数与 $x$ 轴的交点个数为 0 个. 故选 A.

3.A **解析** 函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 的图像的对称轴为 $x=-\frac{m}{2}$，且只有一条对称轴，所以 $-\frac{m}{2}=1$，即 $m=-2$. 故选 A.

4.B **解析** 由 $f(x)=ax^2+bx+c$，且 $f(1)=a+b+c=0$，$a>b>c$，故 $a>0$，$c<0$，因此函数 $f(x)$ 的图像如图 2-49所示. 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上小于零. 故选 B.

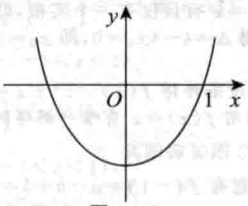

图 2-49

5.A **解析** 如图 2-50所示，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC}=2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot d(C,AB)$，得 $d_{C-AB}=\sqrt{2}$，设点 $C$ 的坐标为 $(x_0,x_0^2)$，

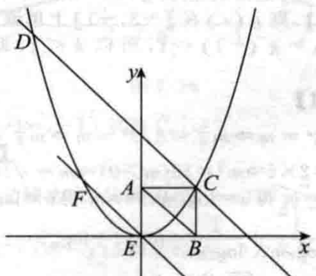

图 2-50

直线 $AB$ 的方程为 $x+y-2=0$，

$\frac{|x_0+x_0^2-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $|x_0+x_0^2-2|=1$，

即 $x_0+x_0^2-2=1$ 或 $x_0+x_0^2-2=-1$，

所以 $x_0+x_0^2-3=0$ 或 $x_0+x_0^2-1=0$，

因此存在四个 $x_0$，故点 $C$ 的个数为四个. 故选 A.

6.B **解析** 因为 $f(x)=x^2+ax+b-3$ 的图像恒过点 $(2,0)$，所以 $4+2a+b-3=0$，即 $2a+b+1=0$，则 $a^2+b^2=a^2+(1+2a)^2=5a^2+4a+1=5\left(a+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$，所以 $a^2+b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{5}$.

故选 B.

评注 本题也可以利用数形结合思想求解，$a^2+b^2$ 的几何意义为点(0,0)到直线 $2x+y+1=0$ 的距离 $d$ 的平方.

7. 30 解析 由题知 $\begin{cases}-\frac{a+2}{2}=1\\a+b=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-4\\b=6\end{cases}$，所以 $f(x)=x^2-2x+6,x\in[-4,6]$，所以当 $x=-4$ 或 6 时，$f(x)_{\max}=30$.

8. $\left(-3,-\frac{5}{2}\right)$ 解析 令 $f(x)=2x^2+ax-5-2a$，由条件知 $f(x)$ 的两个零点 $x_1,x_2$ 满足 $0<x_1<1<x_2$，所以 $\begin{cases}f(0)>0\\f(1)<0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-5-2a>0\\2+a-5-2a<0\end{cases}$，所以 $-3<a<-\frac{5}{2}$.

9. $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ 解析 当 $a=0$ 时，$f(x)=-4x-3$ 在[0,2]上为减函数，不合题意；当 $a\neq0$ 时，此时为二次函数，其对称轴为 $x=-\frac{4(a-1)}{2a}$，由题意知 $\begin{cases}a>0\\\frac{2}{a}-2\le1\end{cases}$，或 $\begin{cases}a<0\\\frac{2}{a}-2\ge2\end{cases}$ 解得 $a\ge\frac{2}{3}$.

所以 $a$ 的取值范围是 $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

10. 2 或 −1 解析 $f(x)=-(x-a)^2+a^2-a+1$，
当 $a>1$ 时，$y_{\max}=a$；当 $0\le a\le1$ 时，$y_{\max}=a^2-a+1$；
当 $a<0$ 时，$y_{\max}=1-a$.
根据已知条件：$\begin{cases}a>1\\a=2\end{cases}$，或 $\begin{cases}0\le a\le1\\a^2-a+1=2\end{cases}$，或 $\begin{cases}a<0\\1-a=2\end{cases}$.
解得 $a=2$ 或 $a=-1$. 故所求集合为{1,2}.

11. 解析 (1)由题意 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.
令 $x=2$ 得 $f(f(2)-2^2+2)=f(2)-2^2+2$，
因为 $f(2)=3$，所以 $f(1)=1$；
令 $x=0$ 得 $f(f(0))=f(0)$，又 $f(0)=a$，得 $f(a)=a$.
(2)由 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$ 及有且仅有一个实根 $x_0$，使得 $f(x_0)=x_0$，得 $f(x)-x^2+x=x_0$，即 $f(x)=x^2-x+x_0$. 再由方程 $f(x)=x$ 有且仅有一个实根，即 $x^2-x+x_0=x$ 有且仅有一个实根，得 $\Delta=4-4x_0=0$，即 $x_0=1$，所以 $f(x)=x^2-x+1$.

评注 本题中利用题设条件得 $f(x)-x^2+x=x_0$ 又得到 $f(x)=x^2-x+x_0$ 同时利用 $f(x)=x$ 有唯一解得到 $x_0$，求出 $f(x)$ 的解析式.

12. 解析 (1)由题意有 $f(-1)=a-b+1=0$，且 $-\frac{b}{2a}=-1$，
所以 $a=1,b=2$. 所以 $f(x)=x^2+2x+1$，单调减区间为 $(-\infty,-1]$，单调增区间为 $[-1,+\infty)$.
(2) $f(x)>x+k$ 在区间 $[-3,-1]$ 上恒成立，转化为 $x^2+x+1>k$ 在 $[-3,-1]$ 上恒成立. 设 $g(x)=x^2+x+1$，$x\in[-3,-1]$，则 $g(x)$ 在 $[-3,-1]$ 上单调递减.
所以 $g(x)_{\min}=g(-1)=1$，所以 $k<1$，即 $k$ 的取值范围为 $(-\infty,1)$.

**【例 2.46 变式 1】**

解析 解法一：$2^a=m\Rightarrow m^{\frac1a}=2$，$5^b=m\Rightarrow m^{\frac1b}=5$，$m^{\frac1a}\cdot m^{\frac1b}=m^{\frac1a+\frac1b}=m^2=2\times5\Rightarrow m^2=10(m>0)\Rightarrow m=\sqrt{10}$.

解法二：由 $2^a=m$ 得 $a=\log_2 m$，$5^b=m$ 得 $b=\log_5 m$，
则 $\frac1a+\frac1b=\frac{1}{\log_2 m}+\frac{1}{\log_5 m}=\log_m 2+\log_m 5=2$，
即 $\log_m 10=2$，$m=\sqrt{10}$. 故选 A.

**【例 2.47 变式 1】**

解析 $9^x-6\cdot3^x-7=0\Rightarrow(3^x)^2-6\cdot3^x-7=0$，令 $t=3^x>0$，则原方程变形为 $t^2-6t-7=0$，得 $t_1=7$，$t_2=-1$(舍)，即 $3^x=7$，$x=\log_3 7$，故原方程的解是 $x=\log_3 7$.

**【例 2.47 变式 2】**

解析 关于 $x$ 的方程 $\left(\frac32\right)^x=\frac{2+3a}{5-a}$ 有负实数解，则 $\left(\frac32\right)^x\in(0,1)$，
将方程转化为不等式，则 $0<\frac{2+3a}{5-a}<1$，解得：$-\frac23<a<\frac34$，
故 $a$ 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,-\frac23<a<\frac34\right\}$.

**【例 2.48 变式 1】**

分析 求解指数不等式，可将其化为同底的形式，利用单调性求解.

解析 原不等式化为 $\left(\frac12\right)^{x^2+x}>\left(\frac12\right)^{2x^2-mx+m+4}$.
因为指数函数 $y=\left(\frac12\right)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，
所以 $x^2+x<2x^2-mx+m+4$，即
$x^2-(m+1)x+m+4>0$ ①
因为原不等式对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以①对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.
所以 $\Delta=[-(m+1)]^2-4(m+4)<0$，解得 $-3<m<5$.
所以 $m$ 的取值范围是 $\{m|-3<m<5\}$.

**【例 2.48 变式 2】**

解析 函数 $f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$ 的定义域 $A=\{x|1<x\le2\}$，不等式 $2^{2ax}<2^{a+x}$ 得 $2ax<a+x$，$(2a-1)x<a$，
当 $2a-1>0$ 时，即 $a>\frac12$，$x<\frac{a}{2a-1}$；当 $2a-1<0$ 时，
即 $a<\frac12$，$x>\frac{a}{2a-1}$；当 $2a-1=0$ 时，即 $a=\frac12$，$x\in\mathbf{R}$.
由 $A\cap B=A$，得 $A\subseteq B$.
若 $a>\frac12$，则 $\frac{a}{2a-1}>2$，得 $a<\frac23$，则 $\frac12<a<\frac23$；
若 $a<\frac12$，则 $\frac{a}{2a-1}<1$，得 $a<\frac12$；若 $a=\frac12$，也满足 $A\subseteq B$.
综上，满足 $A\cap B=A$ 的实数 $a$ 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,a<\frac23\right\}$.

**【例 2.49 变式 1】**

分析 考查指数函数的图像及变换.

解析 由函数 $y=a^x+b-1(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图像经过第二、三、四象限，如图 2-51所示，故 $\begin{cases}0<a<1\\a^0+b-1<0\end{cases}$，得 $\begin{cases}0<a<1\\b<0\end{cases}$. 故选 C.

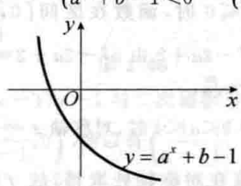


图 2-51

**【例 2.49 变式 2】**

解析 当 $a>1$ 时，函数图像与 $y$ 轴的交点的纵坐标应在(0,1)，故排除选项 A、B，当 $0<a<1$ 时，函数图像与 $y$ 轴的交点的纵坐标在 $(-\infty,0)$，故排除选项 C. 故选 D.

**【例 2.49 变式 3】**

解析 依题意，$0<a<1$，$b<-1$，则 $g(x)=a^x+b$ 的图像如图选项 A. 故选 A.

**【例 2.50 变式 1】**

解析 因为函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图像过定点(0,1)，又函数 $f(x)=a^x+1(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图像是由函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图像向上平移一个单位得到的，故函数 $f(x)=a^x+1(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图像过定点(0,2).

**【例 2.50 变式 2】**

解析 因为函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图像过定点(0,1)，故函数 $f(x)=a^x+x-2$ 的图像过定点(0,−1).

**【例 2.50 变式 3】**

分析 把所求中的"1"用 $mx+ny$ 替换，整理后用基本不等式求解即可.

解析 因为函数 $y=a^{1-x}(a>0,a\neq1)$ 的图像恒过定点 $A(1,1)$，所以有 $1\cdot m+1\cdot n-1=0$，即 $m+n=1(m,n>0)$，

解法一：因为 $\frac1m+\frac1n=\left(\frac1m+\frac1n\right)\cdot(m+n)=2+\frac nm+\frac mn\ge2+2\sqrt{\frac nm\cdot\frac mn}=4$，当且仅当 $m=n$ 时取"=".

解法二：由上可知 $1=m+n\ge2\sqrt{m\cdot n}\Rightarrow0<mn\le\frac14$，当且仅当 $m=n$ 时取"="，所以 $\frac1m+\frac1n\ge2\sqrt{\frac1m\cdot\frac1n}\ge2\sqrt4=4$，当且仅

当 $m=n$ 时取"="．

**评注** 虽然解法二多次使用了均值不等式，但因为取得等号的条件相吻合，故可以运用均值不等式求解．若求 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值，则不能用解法二．

**【例 2.51 变式 1】**

**解析** 函数 $f(x)$ 的图像如图 2-52所示，若方程 $f(x)=a$ 有 2 个不同实根，则 $a\in(0,1)$．

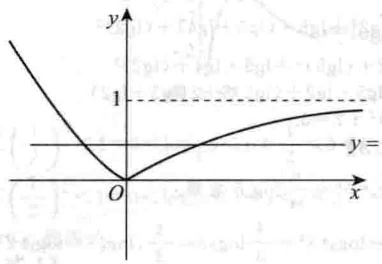


图 2-52

**【例 2.52 变式 1】**

**解析** 当 $a>1$ 时，$f(x)_{\max}=f(2+a)=a^{a+2}$，$f(x)_{\min}=f(a)=a^a$，所以 $a^{a+2}=3a^a\Rightarrow a=\sqrt{3}>1$ 成立；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)_{\max}=f(a)=a^a$，$f(x)_{\min}=f(a+2)=a^{a+2}$，所以 $a^a=3a^{a+2}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{3}\in(0,1)$ 成立．故答案为 $\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$．

**【例 2.52 变式 2】**

**解析** 函数 $y=2^{|x|}$ 的图像如图 2-53所示，$2^{|x|}=1\Rightarrow x=0$，$2^{|x|}=2\Rightarrow x=\pm1$，所以 $[a,b]=[-1,b](0\leqslant b\leqslant1)$，或 $[a,b]=[a,1](-1\leqslant a\leqslant0)$，

所以 $(b-a)_{\max}=1-(-1)=2$，

$(b-a)_{\min}=1-0=1$，因此区间 $[a,b]$ 的长度的最大值与最小值的差为 1．

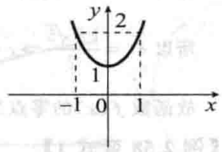


图 2-53

**【例 2.52 变式 3】**

**分析** 考查指数型函数 $y=3^{|x|}$ 的单调性．

**解析** 作 $y=3^{|x|}$ 的图像如图 2-54所示．由于 $y=3^{|x|}(x\in[a,b])$ 的值域为 $[1,9]$，所以 $0\leqslant|x|\leqslant2$，当 $x=0$ 时，$y=1$，故必有 $0\in[a,b]$，且 $a=-2$ 或 $b=2$．若 $a=-2$，则 $b\in[0,2]$；若 $b=2$，则 $a\in[-2,0]$，故点 $M(a,b)$ 的轨迹是为如图 2-55所示的线段 $AB,BC$（其中 $A(-2,0),B(-2,2),C(0,2)$），而 $a^2+b^2-2a=(\sqrt{(a-1)^2+b^2})^2-1$ 可视为点 $M(a,b)$ 与点 $N(1,0)$ 的距离的平方与 1 的差，结合图像可知，当点 $M$ 运动到 $C$ 时，$a^2+b^2-2a$ 取得最小值 4；当点 $M$ 运动到 $B$ 时，$a^2+b^2-2a$ 取得最大值 12．因此 $a^2+b^2-2a\in[4,12]$．故选 D．

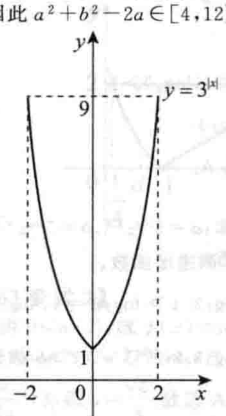


图 2-54

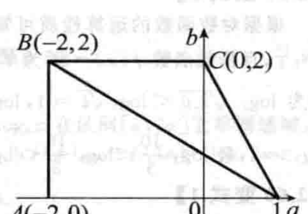


图 2-55

**【例 2.53 变式 1】**

**解析** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{4x-x^2}}$，定义域 $4x-x^2\geqslant0\Rightarrow0\leqslant x\leqslant4\Rightarrow x\in[0,4]$．令 $g(x)=-x^2+4x$，对称轴 $x=2$，$g(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，在 $[2,4]$ 上单调递减，所以 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{4x-x^2}}$ 在 $[2,4]$ 上单调递增．故答案为 $[2,4]$．

**【例 2.53 变式 2】**

**分析** 复合函数 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$，外层为二次函数，内层为指数函数．利用复合函数单调性判定法求解．

**解析** 因为 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$．

设 $u=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，由于 $x\in[-3,2]$，所以 $u\in\left[\frac{1}{4},8\right]$，且 $u=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为递减函数，令 $g(u)=u^2-u+1$，此函数的对称轴为 $u=\frac{1}{2}\in\left[\frac{1}{4},8\right]$．

①当 $u\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，即 $x\in[1,2]$ 时，$g(u)$ 单调递减，因为 $u=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为单调递减，根据复合函数性质，$f(x)$ 单调递增．

②当 $u\in\left[\frac{1}{2},8\right]$，即 $x\in[-3,1]$ 时，$g(u)$ 单调递增，因为 $u=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为单调递减，根据复合函数性质，$f(x)$ 单调递减．

综上，$f(x)$ 的单调增区间为 $[1,2]$，单调减区间为 $[-3,1]$．

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$，

$f(x)_{\max}=\max\{f(-3),f(2)\}=\max\left\{57,\frac{13}{16}\right\}=57$．

所以函数的值域为 $\left[\frac{3}{4},57\right]$．

**【例 2.53 变式 3】**

**解析** $f(x)\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1$．

所以 $f_k(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}(x\leqslant-1\text{ 或 }x\geqslant1)\\ \frac{1}{2}(-1<x<1)\end{cases}$，

即 $f_k(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x(x\geqslant1)\\ \frac{1}{2}(-1<x<1)\\ 2^x(x\leqslant-1)\end{cases}$，其图像如图 2-56所示．

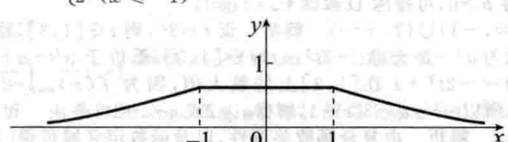


图 2-56

所以增区间为 $(-\infty,-1]$．故选 C．

**【例 2.54 变式 1】**

**解析** (1)函数定义域为 $\mathbf{R}$，又因为 $f(-x)=\frac{a}{a^2-1}(a^{-x}-a^x)=-\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数．

(2)当 $a>1$ 时，$a^2-1>0$，$y=a^x$ 为增函数，$y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 为减函数，从而 $y=a^x-a^{-x}$ 为增函数，所以 $f(x)$ 为增函数；

当 $0<a<1$ 时，$a^2-1<0$，$y=a^x$ 为减函数，$y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 为增函数，从而 $y=a^x-a^{-x}$ 为减函数．所以 $f(x)$ 为增函数．

综上可知，当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时，函数 $f(x)$ 在定义域上为单调递增函数．

(3)由(2)可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，所以在区间 $[-1,1]$ 上为增函数．所以 $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$，

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=\frac{a}{a^2-1}(a^{-1}-a)=-1$，

要使 $f(x)\geqslant b$ 恒成立，只需 $b\leqslant-1$，即 $b$ 的取值范围为 $(-\infty,-1]$．