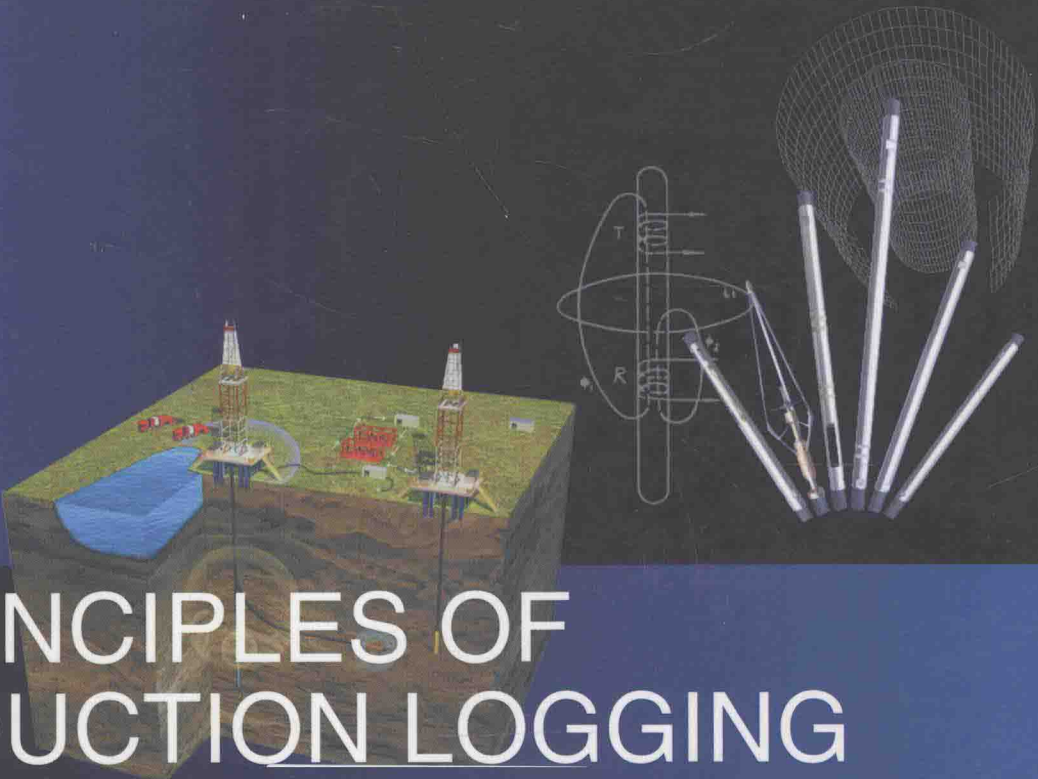




感应测井原理

[美] 考夫曼 [俄罗斯] 达舍夫斯基 著
赵 平 丁 柱 周利军 译



PRINCIPLES OF
INDUCTION LOGGING

石油工业出版社

感应测井原理

[美] 考夫曼 [俄罗斯] 达舍夫斯基 著

赵 平 丁 柱 周利军 译

石油工业出版社

内 容 提 要

本书从电磁场基本理论出发,对感应测井原理进行了相近的分析和探讨。分析手段以数学解析方法为主,从正演的角度对感应测井原理进行表述,表述方式注重物理意义的阐述。同时,本书还简单易懂地介绍了感应测井的几种数值分析方法、三维感应测井最新研究进展以及瞬态感应测井原理。

本书可供测井技术人员及高等院校相关专业师生参考与使用。

图书在版编目 (CIP) 数据

感应测井原理/[美]考夫曼,[俄罗斯]达舍夫斯基著;赵平,丁柱,周利军译.
北京:石油工业出版社,2013.3

书名原文:Principles of Induction Logging

ISBN 978-7-5021-9439-0

I. 感… II. ①考…②达…③赵…④丁…⑤周… III. 感应测井-研究
IV. P631.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 005790 号

Principles of Induction Logging, First edition

William Lyons

ISBN: 0444509836

Copyright © 2003 by Elsevier. All rights reserved.

Authorized Simplified Chinese translation edition published by the Proprietor.

Copyright © 2013 by Elsevier (Singapore) Pte Ltd. All rights reserved.

Published in China by Petroleum Industry Press under special arrangement with Elsevier (Singapore) Pte Ltd. This edition is authorized for sale in China only, excluding Hong Kong SAR and Taiwan. Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. Violation of this Law is subject to Civil and Criminal Penalties.

本书简体中文版由 Elsevier (Singapore) Pte Ltd. 授予石油工业出版社有限公司,在大陆地区(不包括香港、澳门特别行政区以及台湾地区)出版与发行。未经许可之出口,视为违反著作权法,将受法律之制裁。本书封底贴有 Elsevier 防伪标签,无标签者不得销售。

著作权合同登记号图字:01-2011-4235

出版发行:石油工业出版社

(北京安定门外安华里2区1号 100011)

网 址:www.pip.cnpc.com.cn

编辑部:(010) 64523736 发行部:(010) 64523620

经 销:全国新华书店

印 刷:北京中石油彩色印刷有限责任公司

2013年3月第1版 2013年3月第1次印刷

787×1092毫米 开本:1/16 印张:26.75

字数:682千字

定价:98.00元

(如出现印装质量问题,我社发行部负责调换)

版权所有,翻印必究

前 言

从亨利·道尔早期（1949，1952）的努力开始，感应测井已经发展成为一种约定成俗的确定井眼周围电导率的方法。最简单的感应测井仪器由两个线圈构成：一个发射器和一个接收器。发射线圈由频率不小于 20kHz 的交流电激励，接收线圈负责接收磁场变化产生的电动势。除了极少数非常重要的特例外，多数情况下，线圈的轴线与井轴重合。接收线圈和发射线圈间的距离被定义为探头长度，它通常用于控制仪器的径向探测深度。接收线圈产生的电动势线性地依赖于发射线圈中的电流强度，同时，与周围地层中的感应电流强度成正比。这些电流的实际分布与介质的电性结构有关，尤其是电导率。因此，通过测量接收线圈中的电动势，原则上可以求取感应装置所对地层的电导率。

当井轴垂直于地层边界时，介质中的电流路径是一个与井轴共轴的水平圆环。这就是为什么感应测井对薄电导层反应灵敏，但很难识别高阻薄层的原因。

亨利·道尔也提出了差动多线圈探头，它是一种非常有效的测井仪器，在过去的 40 多年中引领了感应测井的开发应用方向。这种探头使得井眼流体以及某些情况下的侵入带对测量结果的影响大为降低。对这一点，本书给予了详细介绍。

亨利·道尔不仅发明了感应测井仪器，而且也提出了非常实用的近似理论。该理论对解释方法的提出和聚焦探头参数的设计提供了极大帮助。出于数学上的简化目的，道尔将感应测井仪器线圈简化为磁偶极子，在低频或高阻介质中趋肤效应可以忽略。换句话说，不同的感应电流间的相互作用不足以对其幅度产生显著影响。各种电流之间呈同相分布，该分布与发射线圈中的电流有 90° 的相移。

在这些近似条件下，可以用较为简单的公式计算地层中任意点产生的电流大小。同时，几何因子的定义也更为简单，它描述了磁场与地层任意点电导率之间的关系。根据该近似理论，感应电流磁场的同相分量等于零，因而只有正交分量。

在道尔的理论研究中，用于描述共井轴的一系列基本单元环的几何因子概念起着主要作用。利用该概念，道尔可以计算不同位置处的介质在接收线圈中产生的电动势，研究不同感应探头的径向和垂向响应特性。

只要感应参数足够小，道尔提出的方法就可原封不动地用于仪器原理的阐述。当然，几何因子理论成立的前提是电场与地层边界相切，且不存在面电荷。

自从道尔首次提出感应测井方法后的近 60 年来，人们对感应测井的各种特性都进行了研究，并在理论、解释、探头设计和仪器方面取得了重要的进展。经过美国、苏联和其他一些国家的科学家和工程师的努力，感应测井已成为裸眼井中测量地层电导率最强有力的方法。本书对感应测井仪器的基本原理及最新进展进行了全面介绍。

因为感应测井的研究是油公司和测井服务公司的个体行为，发表在各种杂志上的技术论文不能恰当地反映该方法研究的全貌，所以不可能对西方世界所有对感应测井有过贡献的人给予恰如其分的评价，包括亨利·道尔的后继者，如 J. H. Moran、K. S. Kunetz、W. C. Duesterhoeff、J. L. Dumanoir、M. P. Tixier、M. Martin、A. J. deWitte 和 D. A. Lowitz。后来，

又有 S. Gianzero、J. Tabanou、B. Anderson、T. Barber、G. Minerbo、B. Clark、S. Chang、V. Druskin 以及 T. Habashy 等许多人继承和发展了前人的研究成果，对感应测井技术的发展起到了积极作用。

在苏联，基于道尔几何因子概念和聚焦探头的感应测井理论、解释和仪器的研究也几乎同时在进行。研究过程中，感应测井得到了新改进，其中一些已经成为标准并在全世界推广。

L. Alpin、S. Akselrod、A. Kaufman、Y. Kudravchev 和 V. Nikitina 等人所开展的理论研究使人们可以认知存在于准静态电磁场中的磁偶极子的特性，该准静态电磁场存在于水平和垂直分层介质中。这些研究有助于优化设计仪器和聚焦探头的径向和垂向响应特性（S. Akselrod, M. Plusnin）。

几乎从一开始，苏联的感应测井仪器线圈的激发频率就比西方的高，目的是改进探头的垂直分辨率（考夫曼，1962）。与此同时，研究证明了二次磁场的同相和异相分量具有不同的探测深度（考夫曼，1959）。因此，感应测井的初期设计中就考虑了对这些分量的测量。

如前所述，道尔理论的可贵之处就在于忽略了感应电流间相互作用，使得这种理论变得更为简洁。在这种理论的影响下，为改进测井资料的解释质量，考夫曼于 1962 年提出了新的近似方法。该方法可以快速评价存在水平和垂直界面地层的趋肤效应对场的影响。经过发展，V. Dimitriev、L. Tabarovsky 和 V. Zakharov 等人用积分方程方法解决了这种较为复杂的问题。

20 世纪 60 年代初，首次尝试采用了非多线圈聚焦探头感应测井技术，类似于在苏联广泛应用的横向测井仪器，对感应测井仪器也进行了相应的研究，申请了专利（考夫曼，1962）。一些文献介绍了利用具有不同探头长度的双线圈和三线圈仪器求取视电导率的解释方法。另外，还研究了磁场同相分量、不同频率和不同探头长度对仪器径向响应特性的影响。当时，测井界并未接受上述想法。然而，随着时间的推移，对多阵列探头的态度发生了彻底的转变。在过去的 20 年中，这种类型的仪器得到了广泛应用，并成为常规的测井方法。在很大程度上，这种态度的转变与介电常数测井仪器的发展有关。起初，井眼介电常数的测量仪器类似于一个电容器。后来，有人建议利用感应方法即感应探头测量该参数（考夫曼，1963）。该方法由 D. Dev 提出并成功应用，即利用三线圈探头测量磁场的幅度比和相位差。结果表明，如果频率选择恰当，这种测量方法会得到较好的径向和垂向响应特性。所以，在多阵列仪器和随钻测井仪器中都提供采用测量和计算得到的这两个参数。

20 世纪 60 年代末，对感应仪器的改进得到了重视。其中一种是利用瞬态场，此时测量中不存在一次场（考夫曼、Sokolov，1972）。对于层状或柱状介质中的感应电流产生的二次磁场的研究可以描述双线圈探头的径向和垂向响应特性，确定最优的测量时间段。

最后，理论研究表明：特定角度线圈的感应探头可以用来评价地层的各向异性（考夫曼、Kagansky，1971）。该研究也有益于感应测井在水平井中的应用。

本书几乎涉及了所有感应测井改进的基本原理和理论，但感应测井的反问题研究超出了本书的范围。

对于感应测井基本原理的理解，无需特别的理论基础。本书的第 1 章对经典电动力学物理学定律的阐述是理解感应测井的背景知识。第 12 章介绍了 V. Druskin 和 L. Knizhnerman 就感应测井仪器在复杂介质中响应特性的三维数值模拟方面所做的出色工作。

需要说明的是本书中所涉及的感应测井理论不仅适用于钻后裸眼井测井，而且也适用于随钻测井。

符 号 表

a_1 ——井径	G_1 ——井眼的几何因子
a_2 ——侵入半径	G_2 ——侵入带的几何因子
A ——磁矢势, $H = \text{curl} A$	G_3 ——地层的几何因子
B ——磁感应强度, $B = \mu H$	G_i ——第 i 部分的几何因子
c ——线圈动量比	q_r ——径向差分响应
D ——电位移或电感应强度, $D = \epsilon E$	r_1 ——线圈半径
e ——电荷	R ——电阻, Ω
E ——电场强度, V/m	$R = (r^2 + z^2)^{1/2}$ ——球坐标的半径
E_n ——电场强度法向分量	Q ——积分部分
E_0 ——一次电场强度	S ——电导率, S
$\mathcal{E}$ ——电动势, V	s ——电导率比值
$h = [2/(\sigma\mu\omega)]^{1/2}$ ——趋肤深度	t ——时间, s
h ——规一化磁场强度	t_r ——上升时间
H_0 ——一次磁场强度, A/m	T ——周期, s
H_s ——二次磁场强度, A/m	U ——标量势, V
H ——地层厚度	δ ——体电荷密度, C/m ³
$I_v()$, $K_v()$ ——第一、二阶修正贝塞尔函数	Δ ——差分
In ——同相分量	ρ ——电阻率, $\Omega \cdot \text{m}$
I ——电流强度, A	σ ——电导率, S/m
j ——电流密度, A/m ²	σ_a ——视电导率
J_i ——电流密度分量	$\mathcal{E}$ ——规一化电动势
$J_v()$, $Y_v()$ ——第一、二类贝塞尔函数	ϵ ——探头相对井轴的位移
$k^2 = i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)$ ——复波数的平方	ϵ_0 ——自由空间介电常数
M_T ——发射器动量, A $\cdot$ m ²	$\phi()$ ——随机积分函数
M_R ——接收器动量, A $\cdot$ m ²	ϕ, ψ ——磁通量或相位角
n ——单位面位移矢量	λ ——各向异性系数
n ——线圈匝数	μ ——磁导率, H/m
L ——电感, H	μ_0 ——自由空间磁导率, $4\pi \times 10^{-7}$ H/m
L ——探头长度	$\tau_0 = \rho\epsilon_0$ ——介质时间常数
l ——线性维数	$\tau = (2\pi\rho t \times 10^7)^{1/2}$ ——瞬态感应测井中用的标量
$p = L/h$ ——标量长度	ω ——角频率

目 录

1 电磁场基本定律和麦克斯韦方程	(1)
1.1 库仑定律	(1)
1.1.1 例 1: 平板电荷分布的电场的法向分量	(4)
1.1.2 例 2: 电场中的导体效应	(6)
1.2 毕奥—萨伐尔定律	(17)
1.2.1 例 1: 直导线产生的磁场	(23)
1.2.2 例 2: 环状电流产生的磁场和矢势	(24)
1.2.3 例 3: 均匀导电介质中接地电极的磁场	(28)
1.3 电荷守恒定律和导电介质中的电荷分布	(28)
1.3.1 例 1: 指数变化	(34)
1.3.2 例 2: 正弦变化	(35)
1.4 法拉第定律与第一个麦克斯韦方程	(38)
1.4.1 例 1: 螺旋管的涡旋电场	(41)
1.4.2 例 2: 自由空间磁偶极子的涡旋电场	(41)
1.4.3 例 3: 环状电流磁场产生的感应电场	(44)
1.4.4 例 4: 一次交变场中薄导电环的感应电流	(45)
1.4.5 例 5: 导电介质中高频早期电磁场特性	(52)
1.5 电磁场方程	(54)
1.5.1 例 1	(58)
1.5.2 例 2	(59)
1.5.3 例 3	(60)
1.6 不同电磁场响应之间的关系	(65)
2 均匀导电介质中磁偶极子的电磁场	(73)
3 感应测井正演问题的求解方法	(88)
3.1 分离变量法	(88)
3.2 薄壳法	(90)
3.2.1 壳表面近似边界条件的推导	(90)
3.2.2 单壳体中感应电流产生的电磁场的计算	(92)
3.2.3 两个共心球壳的场	(94)
3.3 积分方程法	(99)
3.4 近似计算方法	(107)
3.4.1 道尔理论	(107)
3.4.2 外部区域有趋肤效应的近似理论	(111)
4 井轴磁偶极子的电磁场	(117)

4.1	边值问题	(117)
4.2	磁场垂直分量的公式推导	(118)
4.3	小参数范围内磁场的正交分量	(128)
4.4	小参数范围内双线圈感应探头的径向响应特性	(137)
4.5	趋肤效应对双线圈感应探头径向响应特性的影响	(142)
4.5.1	例 1: 两层介质	(145)
4.5.2	例 2: 三层介质	(146)
4.6	小参数范围内井眼磁场的渐近特性	(147)
4.7	井轴上电磁场的近场和远场特性	(152)
4.8	井轴上垂直磁偶极子的频率响应	(160)
4.9	探头线圈尺度的影响	(166)
4.10	柱状分层介质中电流环的电场	(171)
4.10.1	单层发射线圈	(174)
4.10.2	单层发射和接收线圈	(178)
4.11	偏心探头的径向响应	(187)
4.12	磁导率和介电常数的影响	(195)
5	有限厚地层中垂直磁偶极子的准静态磁场	(204)
5.1	垂直磁偶极子磁场的垂向分量	(204)
5.1.1	磁偶极子位于层外	(207)
5.1.2	磁偶极子位于层内	(208)
5.1.3	导电薄层中垂直磁偶极子的场	(209)
5.2	小参数范围内双线圈感应探头的垂直响应	(211)
5.2.1	单元层的几何因子	(211)
5.2.2	有限厚地层的几何因子	(212)
5.3	有限厚地层的双线圈感应探头的理论	(218)
5.4	水平三层介质中的双线圈感应测井曲线	(228)
5.4.1	厚导电层	(232)
5.4.2	厚高阻层	(233)
5.4.3	薄导电层	(233)
5.4.4	薄高阻层	(233)
6	有限厚地层中井轴上的双线圈感应探头	(234)
6.1	道尔理论	(234)
6.2	外部介质存在趋肤效应的理论	(238)
6.3	层厚的影响	(242)
7	多线圈差分感应探头	(245)
7.1	探头参数的确定方法	(245)
7.2	多线圈差分探头的物理原理	(251)
7.3	1. L-1.2 探头的垂向和径向响应	(253)
7.4	6F1M、4F1 和 4F1.1 探头的垂向和径向响应	(265)
7.5	侵入带的高度对 6F1M、4F1 和 4F1.1 探头径向响应的影响	(281)

7.6	三线圈差分探头	(285)
7.7	偏心对多线圈感应探头聚焦特性的影响	(292)
7.8	差分探头频率的选择	(294)
7.9	差分探头系数的确定	(294)
8	测量二次场同相分量的感应测井	(299)
9	瞬态感应测井	(311)
9.1	均匀介质中磁偶极子的瞬态场	(311)
9.2	井轴垂直磁偶极子的后期瞬态场	(324)
9.3	柱状分层介质中瞬态场的视电阻率曲线	(329)
9.4	有限厚地层中垂直磁偶极子的瞬态响应特性	(337)
9.5	电偶极子的非静态场	(344)
10	横向线圈感应测井原理	(347)
10.1	均匀各向同性介质中磁偶极子的电磁场	(347)
10.2	井轴上水平磁偶极子的边值问题	(350)
10.3	近场区井轴上的磁场	(357)
10.4	远场区井轴上的磁场	(364)
10.5	两个柱状分层界面介质中的磁场	(370)
10.6	横向阻抗为 T 的柱状界面	(374)
10.7	一个水平界面介质中的磁场	(377)
10.8	有限厚地层的磁场	(381)
10.9	水平多层介质中的响应	(391)
11	各向异性对导电介质中磁偶极子的影响	(396)
11.1	层状介质的各向异性	(396)
11.2	均匀各向异性介质磁偶极子的电磁场	(398)
11.3	具有两个水平分界面的各向异性介质的磁场	(405)
12	三维感应测井的数值模拟	(411)
	参考文献	(417)

1 电磁场基本定律和麦克斯韦方程

本章介绍的是电磁学的主要定律，这些定律对基于交直流场的电测井方法至关重要。尽管这些定律在许多优秀的书籍中都有过介绍，但书中所举例子和所给的模型并不适宜理解非均匀导电介质场的特性。从有益于促进电磁测井理论应用的角度出发，本章给出了电磁学的基本定律。

首先，讨论库仑定律、毕奥—萨伐尔（Biot - Savart）定律和法拉第定律，强调这些定律的实验基础和所应用的领域。然后，探讨了这些定律与麦克斯韦方程的关系，以确定其物理意义，尤其是电场和磁场的精确源。

其次，对描述静态场和准静态场的一组方程也给予了足够的重视，给出了感应测井精确的模型，但该模型不适用于高频下的介电常数测井。

最后，给出磁矢势和电矢势亥姆霍兹（Helmholtz）方程的推导，这有益于求解导电介质边值问题。

1.1 库仑定律

作为切入点，读者都有这样的概念，即电荷是电场的源，那么，电荷的分布就是电场分布的主要决定因素。为了描述电场，将引入电荷的体密度、面密度和线密度的函数。

电荷的体密度 δ 定义为：

$$\delta = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{de}{dV} \quad (1.1)$$

式中， de 是位于单元体积 dV 中的电荷。

显然，随着单元体积的减小，体积中的电荷也相应减小。在极限条件下，当总电荷与体积的比保持常数时，就得到了非零电荷密度。

电荷的体积密度是描述电荷分布最常用的方式，但在一些特殊情况下，也需要定义面电荷或线电荷密度的函数。如图 1.1 所示，假定 δ 在垂直于薄层表面的方向上不发生变化，该单元的体积电荷则可表示为：

$$de = \delta h dS$$

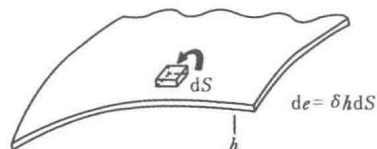


图 1.1 薄层电荷单元的定义

式中， h 为薄层的厚度； dS 是该薄层的一个面元。

令 h 趋近于零， δ 增加，增加的方式是 δh 的积保持不变，从而得到了单元面电荷密度的定义：

$$de = \Sigma dS \quad (1.2)$$

式中， Σ 是定义的面电荷密度。

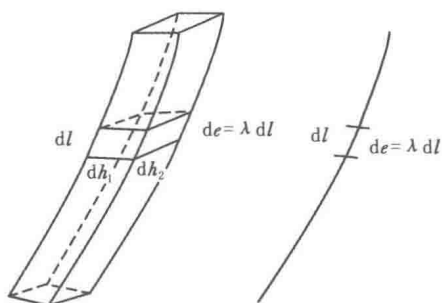


图 1.2 线电荷密度的定义

类似地，当电荷分布在如图 1.2 所示的小横截面杆状体积中时，只关心距离远大于尺度 dh_1 和 dh_2 处的场，定义线性单元电荷 de 和线电荷密度 λ 就比较方便，见下式：

$$de = \lambda dl \quad (1.3)$$

为此，用带有同等电荷的线体积代替杆体积。

有时，定义点电荷 e 更为方便。此时，认为整个电荷密度集中在介质中一个点的无限小的距离内。

单元的体积电荷、面电荷和线电荷有共同的特征，即它们所在的空间至少是在一个尺度上远小于到场观测点的距离，不同的只是单位尺度。基本体积电荷的体积密度永远是有限的，基本的面和线电荷的体积密度的增加必须假定在电荷所占空间内不受限制。事实上，与式 (1.2) 相符，可以得到：

$$\delta = \Sigma / h \quad (h \rightarrow 0)$$

由于 Σ 是有限的，随着 $1/h$ 趋近于无穷大，面电荷的体积密度也趋近于无穷大。

对于基本的线电荷，有：

$$\delta = \frac{\lambda}{dh_1 dh_2}$$

式中， dh_1 和 dh_2 是横截面的线性尺度（图 1.2）。

随着 dh_1 和 dh_2 趋近于零，线电荷的体积密度趋近无穷大的速度快于面电荷的情况。

每种类型电荷分布的电荷密度的单位也不尽相同。体积电荷密度的单位为 C/m^3 ，面电荷和线电荷密度的单位则分别为 C/m^2 和 C/m 。在采用这些近似值时这三种密度在单位上的差异必须予以考虑。正如所料，电荷在线型或面型体积空间的不同的聚集程度导致了这些电荷附近的电场具有不同的特性。点电荷代表电荷聚集程度最大，以 $1/h^3$ 的方式趋近于无穷大（ h 是电荷聚集处附近一个单元的线性尺度）。

现在讨论的是本节的主题——库仑定律。库仑及其他研究人员所进行的实验表明：位于两点间 a 、 q 的电荷 $[de(a), de(q)]$ 之间的作用力 F 可以极其简洁地表示为：

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{de(q)de(a)}{L_{qa}^3} L_{qa} \quad (1.4)$$

$$L_{qa} = L_{qa} L_{qa}^0$$

式中， L_{qa} 是矢量，是点 q 和点 a 之间的距离； L_{qa}^0 是沿着点 q 和点 a 连线方向的单位矢量； ϵ_0 是自由空间的介电常数。

在实际应用的单位制中， ϵ_0 为：

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

即：

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ m/F}$$

式 (1.4) 可重写为：

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{de(q)de(a)}{L_{qa}^2} \mathbf{L}_{qa}^0 \quad (1.5)$$

两个单元电荷间的作用力与电荷大小成正比，与其距离的平方成反比。当电荷同性时力的方向与 $\mathbf{L}_{qa}^0$ 相同，电荷异性时与其相反，见图 1.3。

当然，该表达式成立的前提是电荷间的距离远大于电荷所在空间的尺度。当其中的一个或两个电荷的尺度与电荷间的距离可比时，电荷间的作用力需要用叠加原理来求取。根据该原理，任意两个电荷间的作用力的大小与其他电荷无关，任意体电荷的分布也就可以表示为单元电荷的和。例如，图 1.4 所示的点 a 的单元电荷 $de(a)$ 与体积为 V 的体积电荷之间的作用力可写为：

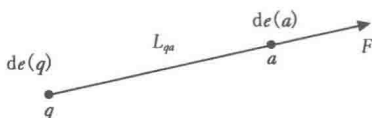


图 1.3 库仑定律力符号的定义

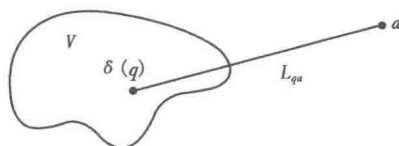


图 1.4 电荷间作用力示意图

$$\mathbf{F} = \frac{de(a)}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\delta(q)dV}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} \quad (1.6)$$

式中， q 代表体积 V 中的任意点。

总的电作用力 $\mathbf{F}(q)$ 是所有单个单元电荷间作用力的矢量和。

将该方法推广到更一般的情况，即所有电荷分布类型（体电荷、面电荷、线电荷和点电荷）都存在，再应用叠加原理，就得到了单元电荷 $de(a)$ 与任意电荷分布间作用力的计算表达式：

$$\mathbf{F}(a) = \frac{de(a)}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \frac{\delta(q)dV}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} + \int_S \frac{\Sigma(q)dS}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} + \int_L \frac{\lambda(q)dl}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} + \sum_{i=1}^N \frac{e_i(q)}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} \right] \quad (1.7)$$

式中， δdV 、 ΣdS 、 λdl 和 e_i 分别代表单元体电荷、面电荷、线电荷和点电荷。

在这一点，定义电场强度 $\mathbf{E}(a)$ 为电相互作用力 $\mathbf{F}(a)$ 与点 a 基本电荷大小的比值：

$$\mathbf{E}(a) = \frac{\mathbf{F}(a)}{de(a)} \quad (1.8)$$

为了方便起见，电场强度通常只是用电场表示，与力的单位不同，在实用单位制下，其单位为 V/m 。

电场强度 $\mathbf{E}$ 可以被认为是作用在研究区域测试电荷 (de) 上的作用力。如果电场已知，利用式 (1.8) 可以简便地计算出作用力 $\mathbf{F}$ 。由式 (1.7) 可得电场的表达式为：

$$\mathbf{E}(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \frac{\delta(q)dV}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} + \int_S \frac{\Sigma(q)dS}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} + \int_L \frac{\lambda(q)dl}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} + \sum_{i=1}^N \frac{e_i(q)}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} \right] \quad (1.9)$$

如果电荷的分布已知， $\mathbf{E}$ 只取决于测试电荷所在的坐标。由于该函数只与位置有关，所以称为场。当电场与时间无关时，它只取决于介质中电荷的分布，利用式 (1.9) 计算上不存在困难。只考虑电荷对电场的贡献，电场随时间的变化就可意味着空间某点电荷密度同时

发生了变化。

为了完全描述场的变化特性，有必要研究电场的第二个源，即时变磁场产生的电场。但在此之前，要进一步深入研究由电荷产生的电场。首先，考虑特殊的电荷分布产生的场。

1.1.1 例 1：平板电荷分布的电场的法向分量

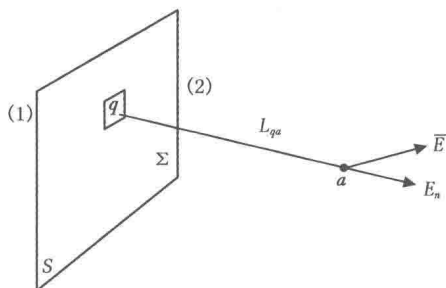


图 1.5 平板上的电荷

如图 1.5 所示，一个平板上分布着面电荷。引入矢量 $d\mathbf{S}$ ：

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$$

式中， $\mathbf{n}$ 是从板的后面 (1) 指向前面 (2) 的单位矢量。只需考虑场的法向分量，即垂直于表面的分量。利用库仑定律 [式 (1.4)]，位于 q 点的单元电荷 $\Sigma(q)dS$ 产生的场为：

$$d\mathbf{E}(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Sigma(q)dS}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} \quad (1.10)$$

因此，场的法向分量为：

$$\begin{aligned} dE_n &= dE \cos(\mathbf{L}_{qa}, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Sigma(q)dS}{L_{qa}^2} \cos(\mathbf{L}_{qa}, \mathbf{n}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Sigma(q)dSL_{qa}}{L_{qa}^3} \cos(\mathbf{L}_{qa}, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

式中， $(\mathbf{L}_{qa}, \mathbf{n})$ 是 $\mathbf{L}_{qa}$ 和 $\mathbf{n}$ 间的角度。显然乘积 $dSL_{qa} \cos(\mathbf{L}_{qa}, \mathbf{n})$ 可以写成标量积 $[dSL_{qa} \times \cos(\mathbf{L}_{qa}, \mathbf{n}) = d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}_{qa} = -d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}_{aq}]$ ，因为 $\mathbf{L}_{qa} = -\mathbf{L}_{aq}$ 。

所以，电场的法向分量可写成：

$$dE_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}_{aq}}{L_{aq}^3} \Sigma(q) \quad (1.12)$$

因为 $L_{aq} = L_{qa}$ ， $d\omega_{aq}$ 可以定义为：

$$d\omega_{aq} = \frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}_{aq}}{L_{aq}^3} \quad (1.13)$$

代表面元 dS 对点 a 所张的立体角。类似地，整个面 S 对点 a 所张的立体角为：

$$\omega_a = \int_S \frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}_{aq}}{L_{aq}^3} \quad (1.14)$$

式 (1.14) 给出了任意形状面 S 的立体角计算公式。例如，对于一个位于闭合面中的观测点，该立体角为 4π 。如果该观测点位于闭合面的外部，则该立体角为 0。这可根据闭合的面可以分开为两个开放的面来证明，如图 1.6 所示，从外界看，任一点看立体角的大小相等而符号相反。为此，必须记住立体角为矢量 $\mathbf{L}$ 和矢量 $d\mathbf{S}$ 间的夹角。

重新计算电场的法向分量 E_n (图 1.5)，可写为：

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \Sigma d\omega_{qa} \quad (1.15)$$

特别是, 如果电荷均匀分布在这个面 ($\Sigma = \text{const}$) 上, 则有:

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \omega_a \Sigma \quad (1.16)$$

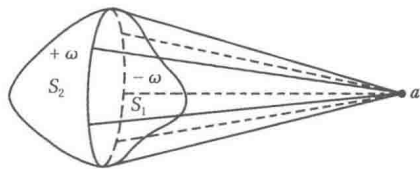


图 1.6 由两个开放的面所描绘的闭合的面

式中, ω_a 是表面 S 对点 a 所张立体角。

显然, 从图 1.7 可以看出, 立体角 ω_a 的正负符号取决于观测点相对于面的位置。

随着到面 S 距离的增加, 立体角减小, 场的法向分量就相应地减小。相反, 当点 a 接近该面时, 立体角增大, 依据落在那个面上, 立体角极值为 $+2\pi$ 或 -2π 。就得到了平面两侧电场法向分量的计算表达式:

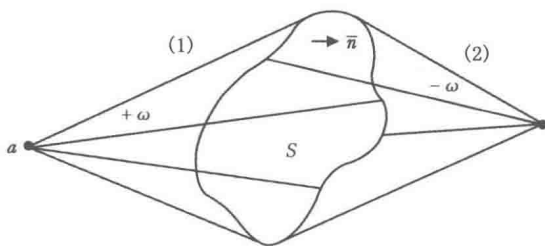


图 1.7 表面所张的角的正负取决于观测点的位置的例子

$$\begin{cases} E_n^{(1)} = -\Sigma/(2\epsilon_0) \\ E_n^{(2)} = \Sigma/(2\epsilon_0) \end{cases} \quad (1.17)$$

式 (1.17) 表明, 穿越面 S 时, 电场的法向分量是不连续的。下面详细探讨电场的法向分量, 它可以写为两部分的和:

$$E_n = E_n^p + E_n^{S-p} \quad (1.18)$$

式中, E_n^p 是紧邻 p 点单元电荷 $\Sigma(p)dS$ 产生电场的法向分量; E_n^{S-p} 是其他面电荷产生电场的法向分量。

显然有:

$$E_n^{S-p}(a) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Sigma \int_{S-p} d\omega = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Sigma \omega^{S-p}(a)$$

式中, $\omega^{S-p}(a)$ 是表面 S 减去面元 $dS(p)$ 对观测点所张的立体角。

令点 a 靠近面 $dS(p)$, 其余的表面所张的立体角趋近于零, 电场的法向分量只决定于面元 $dS(p)$:

$$E_n^{S-p} \rightarrow 0$$

$$a \rightarrow p$$

同理, 无论面元多么小, 当观测点无限靠近 p 点时, 立体角趋近于 $\pm 2\pi$ 。

$$\omega^p \rightarrow \pm 2\pi$$

$$a \rightarrow p$$

因此, 在面的任意一侧, 电场的法向分量只决定于临近 p 点的无限小的区域内电荷:

$$\begin{cases} E_n^{(1)}(p) = -\frac{1}{2\epsilon_0} \Sigma(p) \\ E_n^{(2)}(p) = \frac{1}{2\epsilon_0} \Sigma(p) \end{cases} \quad (1.19)$$

在面两侧场的符号差异反映得是这样的基本事实, 电场的方向是单元正电荷在电场力作

用下运动的方向。因此，电场法向分量随着测试点穿越表面时的不连续是仅由观测点附近的单元电荷引起的。例如，如果在板上存在一个孔，板的两侧的场分量都是 E_n^{S-p} ，即场在通过该孔的直线上是连续的。

可以把这种结果推广到带有电荷的表面不再是平面的情况。同样利用基于立体角和叠加原理的方法，可得到面两侧场的法向分量的表达式：

$$\begin{cases} E_n^{(1)}(p) = -\frac{\Sigma(p)}{2\varepsilon_0} + E_n^{(1)(S-p)} \\ E_n^{(2)}(p) = \frac{\Sigma(p)}{2\varepsilon_0} + E_n^{(2)(S-p)} \end{cases} \quad (1.20)$$

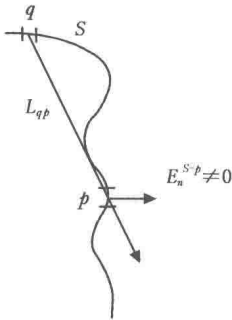


图 1.8 位于不在面元 dS 上的电荷产生场的法向分量在点 p 处不一定是零的例子

与前例相比，可以看出位于不在面元 $dS(p)$ 上的电荷产生场的法向分量 $E_n^{S-p}(p)$ 不一定是零，见图 1.8。很容易认知这部分场的一个非常重要的特性。由于这些电荷位于距点 p 一定的范围内，当观测点 a 通过单元 $dS(p)$ 时，它们对场的贡献是一连续函数，所以有：

$$E_n^{(1)(S-p)} = E_n^{(2)(S-p)} = E_n^{S-p} \quad (1.21)$$

相应地，式 (1.20) 可写为：

$$\begin{cases} E_n^{(1)}(p) = -\frac{\Sigma(p)}{\varepsilon_0} + E_n^{S-p} \\ E_n^{(2)}(p) = \frac{\Sigma(p)}{\varepsilon_0} + E_n^{S-p} \end{cases} \quad (1.22)$$

这意味着法向分量的不连续性可由下式给出，它也只是由单元面 $dS(p)$ 上的电荷产生的：

$$E_n^{(2)}(p) - E_n^{(1)}(p) = \frac{\Sigma(p)}{\varepsilon_0} \quad (1.23)$$

需要强调的是，式 (1.23) 是描述电磁场特性的基本方程，对时变场也有效。也许从本质上讲，式 (1.23) 表面上类似第三个麦克斯韦方程，本书不展开叙述。

1.1.2 例 2：电场中的导体效应

现在举第二个例子阐明静电感应现象。首先，假定一任意形状的导体位于电场 E_0 中，见图 1.9。在外加电场作用下，闭合导体中的正负电荷沿着相反的方向运动，结果在导体的两个面上聚集着电荷。这些电荷在导体内部产生二次电场，与一次场的方向相反。这些面电荷的分布状态需满足导体的总场为零，即：

$$E_i = 0 \quad (1.24) \quad \xrightarrow{\bar{E}_0}$$

式中， E_i 为导体内的电场强度。该过程被称为静电感应，可对此作出如下评述：

(1) 在解释该现象的过程中，采用了极为简化的方式，即只考虑静电场的存在。而事实上，电荷的聚

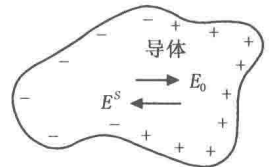


图 1.9 在外加电场作用下，闭合导体中的正负电荷沿着相反的方向运动

集过程还存在其他一些现象，特别是时变磁场的存在，它的重要作用在下面章节进行论述。

(2) 任何导体内都可以观测到静电感应现象，它与导体的电阻率无关。例如，导体可包括金属、电解液、矿物或岩石。以后会发现，电阻率的大小对导体内电场的消失时间起着重要作用，但不能改变静电感应的本质，即导体内电场将最终消失。

(3) 考虑这种效应时，假定导体具有有限的尺度，但这种假定并不重要。例如，假定一电荷 e_0 位于非导电的井孔中，见图 1.10，则在井壁上产生符号相反的电荷，这些电荷的分布保证井孔中的电场不为零（这些电荷与介质的电阻率没有任何关系）。至于该过程产生的同 e_0 等量同符号的电荷则在无穷远处。

(4) 在一定范围内，非时变电场的产生方式有多种。例如，它可由闭合的电流环感应产生，其强度将随时间而增加。与此同时，当一次电场的源是电荷时，通常可观测到电磁感应现象的产生。

下面讨论电磁感应现象(图 1.9)。显然，面电荷产生的二次电场可由下式得到：

$$\mathbf{E}^S(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\Sigma(q) dS}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} \quad (1.25)$$

式中， $\Sigma(q)$ 是面电荷密度。

相应地，式 (1.24) 可重写为：

$$\mathbf{E}_0(a) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\Sigma(q) dS}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} = 0 \quad (1.26)$$

式中， $\mathbf{E}_0$ 是外部源产生的场。

例如，如果一点电荷位于导体的外部，则导体内任一点的电场为：

$$\mathbf{E}_0(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{L_{0a}^3} \mathbf{L}_{0a} \quad (1.27)$$

式中， a 为 $\mathbf{E}$ 的观测点。

从这些事实可以得出这样的结论，即给定电荷系统产生的电场不依赖于介质的性质。如果场发生了改变，则意味着有新电荷出现。在这个例子中，同时在导体的表面产生，所以不带电导体的总电荷依然是零：

$$\Sigma e^S = 0 \quad (1.28)$$

如果导体尺寸无限大，同一种符号的电荷出现在无限远，式 (1.28) 依然成立。

总而言之，电磁感应导致的电荷分布通常并不容易被掌握，它们的确定构成了电场理论的经典问题。

值得一提的是已经有多种成熟的数值技术可用于求解该问题，如积分方程法、有限差分法等。这使得可以更广泛地讨论电荷产生电场的问题。显然，当电荷分布未知时，不能用库

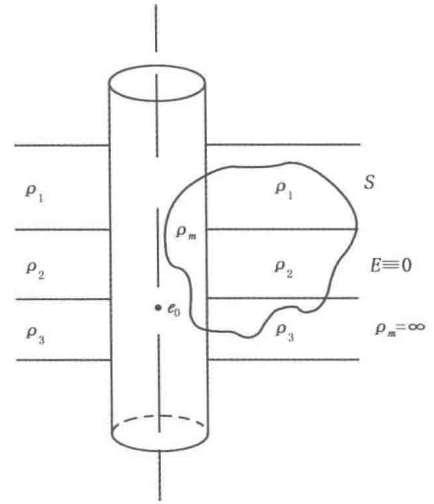


图 1.10 电荷位于非导电井孔中的电磁感应现象 (p 是介质的电阻率)

仑定律计算电场。不幸的是，多数情况下，电测井中的电荷分布是未知的，库仑定律不能用于确定场。这就是为什么必须考虑电荷产生电场的普遍特性。

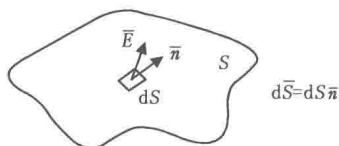


图 1.11 场的基本方程原理示意图

从库仑定律出发，可以推出场的基本方程。首先，引入通过面 S 的电通量的概念，它等于电场与面的单位矢量标量积的面积分，如图 1.11 所示：

$$N = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.29)$$

式中， $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{S})$ 。

假定位于点 q 的单元电荷 de 是电场唯一的源，根据库仑定律，该电场通过任意表面 S 的通量为：

$$N = \frac{de}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{L}_{qp} \cdot d\mathbf{S}}{L_{qp}^3} \quad (1.30)$$

式中， p 是面 S 上的任意点。

由于该积分表示从点 q 看该面 S 的立体角 ω ，可得到：

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{de}{4\pi\epsilon_0} \omega_s(q)$$

特别是，当面是闭合的，且电荷 de 在此面中，立体角 $\omega_s(q)$ 是 4π ，则：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{de}{\epsilon_0} \quad (1.31)$$

显然，当电荷位于面 S 的外部时，此电荷对该面的电场通量为零。

式 (1.31) 是由在单元电荷的情况下得到的，根据叠加原理，对于任意分布的电荷，可得到如下方程：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_V \delta dV + \int_S \Sigma dS + \int_L \lambda dl + \sum_{i=1}^M e_i \right] \quad (1.32)$$

式中， δ 、 Σ 、 λ 分别为体电荷、面电荷、线电荷密度； e_i 为点电荷。

所有电荷都位于面 S 的内部。位于面外部的电荷产生的通量为零。

对于式 (1.32)，有如下认识：

(1) 面 S 内体积 V 电荷位置的变化改变面上的场 $\mathbf{E}$ ，但不影响通量的值，因为通量是面中总电荷的函数。

(2) 面的形状和位置是任意的。特殊情况下，面可以截断几种不同电性质的介质 (图 1.10)。

假定电荷为体密度 δ 分布，有：

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = e_V / \epsilon_0 \quad (1.33)$$

式中， e_V 是体积 V 中所包含的电荷：

$$e_V = \int_V \delta dV$$

通常，体电荷 e_V 包括两部分，即自由电荷和极化电荷。本例中不考虑电荷的位移，即