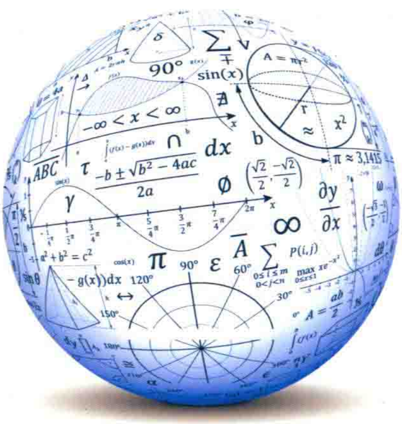
中国劳动关系学院精品课系列教材

概率论与数理统计

主　编　吴亚风

副主编　李　静　张　奎



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

中国劳动关系学院精品课系列教材

概率论与数理统计

主　编　吴亚凤
副主编　李　静　张　奎

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书内容包括：随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定理及中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验。本书以基本理论和方法为核心，在此基础上注重应用，从实际问题引入基本概念，选用大量有关的例题与习题，具有循序渐进、逻辑清楚、结合实际等特点。

本书可作为高等学校理工类、经管类、人文社科类及相关专业本科生的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/吴亚凤主编. —上海：上海交通大学出版社，2014

ISBN 978-7-313-12533-0

Ⅰ. 概...　Ⅱ. 吴...　Ⅲ. ①概率论 ②数理统计　Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 004169 号

概率论与数理统计

主　　编：吴亚凤
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：常熟市梅李印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×960mm　1/16　　印　　张：12.25
字　　数：233 千字
版　　次：2015 年 8 月第 1 版　　印　　次：2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-12533-0/O
定　　价：39.00 元

前　言

《概率论与数理统计》课程是高等学校本科大多数专业的一门重要的基础理论课，它具有广泛的实用性。通过概率论与数理统计课程的教学，能使学生获得概率论和数理统计方面的基本知识，掌握概率论和数理统计的基本概念，了解它的基本理论和基本方法，从而使学生初步掌握处理随机现象的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。

本书根据教学大纲在多年教学实践的基础上编写而成，在编写的过程中，参照了大量的国内优秀教材，力求将目前《概率论与数理统计》教材的先进经验反映出来。本书立足于介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法，在保持传统教材优点的基础上，更加注重实用性。

本书分 8 章，第 1 章由张奎编写，第 2 章由吴亚凤编写，第 3 章由张明编写，第 4 章和第 5 章由李静编写，第 6 章和第 7 章由王志高编写，第 8 章由贾屹峰编写。全书由吴亚凤负责结构安排、统稿定稿，郑红芬对本书进行了审阅。

本书的出版获得中国劳动关系学院规划教材项目的支持，并得到了上海交通大学出版社的鼎力帮助，在此表示感谢。

由于编者水平有限，书中存在的不妥之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

编　者

目　录

第1章 随机事件与概率

在现实生活中，人们遇到的现象一般可分为两种类型：一类是在某些确定的条件满足时，必然会发生的现象，如太阳每天从东方升起，落向西方；向上抛一枚石子必然下落；在标准大气压下水加热到 100℃一定会沸腾，到 0℃一定会结冰。这些都是确定性现象，也称**必然现象**。二是即使在相同条件下，其结果也是不确定的现象，如掷一枚硬币，结果可能正面向上，也可能反面向上，究竟是哪一种结果出现，事前无法知道；金融领域中事先无法断言将来某时刻某证券交易所的指数；同一条生产线上用同样的工艺生产出来的灯泡寿命长短也呈现出偶然性。这些都是不确定现象，也称为**随机现象**。

虽然随机现象"纯属偶然"，但大量重复相同的试验会发现其结果还是有一定的规律可循。如若把一枚硬币重复多次，则出现正面和反面的次数大约各占一半。又如任取一只灯泡，测量其寿命等都是随机现象。这些现象有共有的特点是在个别试验（或观察）中呈现出不确定性，在大量重复的试验（或观察）中又具有某种规律性，称为**统计规律性**。概率论与数理统计正是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科。本章将介绍随机试验、样本空间和随机事件等一系列概率论中的最基本的概念，并讨论一些特殊场合下的概率计算问题，使读者对概率有一个初步但又准确的认识，为学习下面的章节打好基础。

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

为了研究随机现象的统计规律性，我们把各种科学试验和观察都称为试验。概率论约定为研究随机现象所作的随机试验应具备以下 3 个特征：

(1) 可重复性：试验在相同条件下是可重复的。

(2) 可观察性：试验的全部可能结果不止一个，且试验的所有可能结果事前已知。

(3) 不确定性：每一次试验都会出现上述可能结果中的某一个结果，至于是哪一个结果则事前无法预知。

随机试验简称**试验**，通常用以字母 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示随机试验。本书所提到的试验都是随机试验。

例 1.1 下列试验均为随机试验：

(1) E_1:掷一枚硬币,观察正面反面出现的情况。

(2) E_2:抛一枚骰子,观察出现的点数。

(3) E_3:工商管理部门抽查市场某些商品的质量,检查商品是否合格。

(4) E_4:在电视机厂的仓库里,随机地抽取一台电视机,测试它的寿命。

(5) E_5:记录某一天城市发生车祸的次数。

(6) E_6:把一枚骰子抛掷两次,观察两次点数情况。

1.1.2 随机事件

在一次试验中可能发生也可能不发生,而在大量的重复试验中具有某种规律性的试验结果,称为**随机事件**,简称**事件**,常用大写英文字母 $A,B,C,D,\cdots$表示。

如在掷一枚骰子的试验中,$A=$"出现奇数点"是一个事件,即 $A=\{1,3,5\}$。$B=$"出现的点数小于 5"也是一个事件,即 $B=\{1,2,3,4\}$。

1.1.3 样本空间

随机试验的一切可能基本结果组成的集合称为**样本空间**,记为 $\Omega=\{\omega\}$,其中 ω 表示基本结果(不能再分解),又称**样本点**。

在具体问题中,给定样本空间是对随机现象进行数学描述的第一步。样本点是最基本单元,认识随机现象首先要列出随机试验的样本空间。

例 1.2 下面给出例 1.1 中随机试验的样本空间。

(1) 掷一枚硬币的样本空间为 $\Omega_1=\{H,T\}$,其中 H 表示正面朝上,T 表示反面朝上。

(2) 掷一颗骰子的样本空间为 $\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$,其中 ω_i 表示出现 i 点($i=1,2,3,4,5,6$),也可直接记此样本空间为 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$。

(3) 抽取一件商品是否合格的样本空间为 $\Omega_3=\{\omega_1,\omega_2\}$,其中 ω_1 表示抽取的商品为合格品,ω_2 表示抽取的商品为不合格品。

(4) 电视机的寿命的样本空间为 $\Omega_4=\{t:t\geqslant 0\}$。

(5) 车祸发生次数的样本空间为 $\Omega_5=\{n:n\in N\}$。

(6) 把一枚骰子抛掷两次,观察两次点数情况的样本空间为 $\Omega_6=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\cdots,(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$。

要成功地解决概率论中的问题,必须在具体问题中用恰当的样本空间来描述随机试验。需要注意的是:

(1) 样本空间中的元素可以是数也可以不是数。

(2) 样本空间至少有两个样本点。

(3) 从样本空间含有样本点的个数来区分,样本空间可分为有限与无限两类。

(4) 任一事件 A 是相应样本空间的一个子集。

(5) 当子集 A 中某个样本点出现了，就说事件 A 发生了。

由样本空间 Ω 中的单个元素组成的子集称为**基本事件**；由样本空间 Ω 中的两个元素或两个以上元素组成的子集称为**复杂事件**；而样本空间 Ω 的最大子集（即 Ω 本身）称为**必然事件**，即每次随机试验中必然发生的事件；样本空间 Ω 的最小子集（即空集 $\varnothing$）称为**不可能事件**，即每次随机试验中不可能发生的事件。

例 1.3　掷一颗骰子的样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。

事件 $A=\{1\}$ 表示"出现 1 点"，是由 Ω 的单个样本点"1"组成，为基本事件；

事件 $B=\{2,4,6\}$ 表示"出现偶数点"，是由 Ω 的 3 个样本点"2,4,6"组成，为复杂事件；

事件 $C=\{$出现的点数小于 7$\}$，是由 Ω 的全部样本点"1,2,3,4,5,6"组成，为必然事件；

事件 $D=\{$出现的点数大于 6$\}$，Ω 中任一样本点都不在 D 中，所以 D 为空集，为不可能事件。

1.1.4　事件间的关系及运算

在同一问题中，我们常常需要考察多个事件及其之间的关系。将事件表示成样本空间的子集，就可以方便地运用集合间的关系及运算来讨论事件间的关系及运算。一个事件对应于样本空间的一个子集，因此某事件发生当且仅当它对应的子集中的某个元素（即样本点）在试验中出现。用 $A\subset\Omega$ 表示事件 A 是 Ω 的子集。事件的相互关系与集合论中集合的包含、相等以及集合的运算等概念相对应。

1) 事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即属于 A 的样本点必属于 B，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A **包含于**事件 B，记作 $B\supset A$，或 $A\subset B$（见图 1.1）。

2) 事件的相等

如果事件 A 和事件 B 满足：事件 A 发生必然导致事件 B 发生，而且事件 B 发生必然导致事件 A 发生，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A=B$。

3) 事件的和（并）

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，即事件 A 与事件 B 中所有的样本点组成的新事件，称为事件 A 与事件 B 的和（并），记作 $A+B$ 或 $A\cup B$（见图 1.2）。

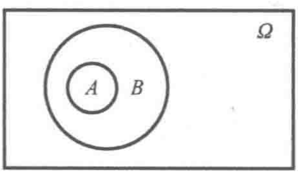


图 1.1

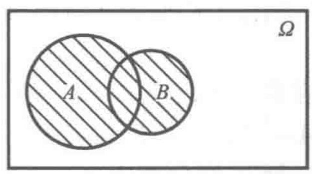


图 1.2

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 A 为“出现奇数点”，$A=\{1,3,5\}$，记事件 B 为“出现的点数不超过 3”，$B=\{1,2,3\}$，则 A 与 B 的和为 $A+B=\{1,2,3,5\}$。

4）事件的积(交)

事件 A 与事件 B 同时发生，即事件 A 与事件 B 中公共的样本点组成的新事件，称为事件 A 与事件 B 的积(交)，记作 AB 或 $A\cap B$(见图 1.3)。

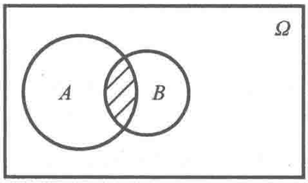


图 1.3

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 A 为“出现奇数点”，$A=\{1,3,5\}$，记事件 B 为“出现的点数不超过 3”，$B=\{1,2,3\}$，则 A 与 B 的积为 $AB=\{1,3\}$。

事件的并和交运算可推广到有限个事件 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 或可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的情形。n 个事件的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为有限并，表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少发生一个；n 个事件的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为有限交，表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 称为可列并，交 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 称为可列交。它们分别表示可列个事件和 $A_1,A_2,\cdots$至少有一个发生和同时发生。

5）事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，即由在事件 A 中而不在事件 B 中的样本点组成的新事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$(见图 1.4)。

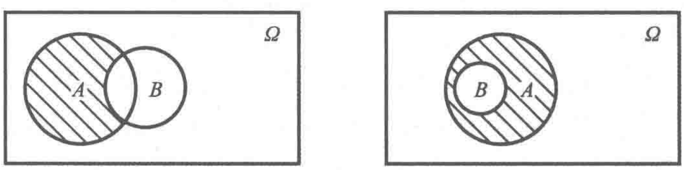


图 1.4

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 A 为“出现奇数点”，$A=\{1,3,5\}$，记事件 B 为“出现的点数不超过 3”，$B=\{1,2,3\}$，则 A 与 B 的差为 $A-B=\{5\}$。

6）互不相容(或互斥)

如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即事件 A 与事件 B 没有共同的样本点，$AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容或互斥**(见图 1.5)。

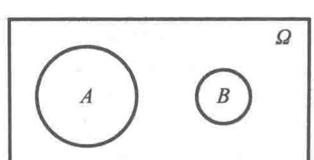


图 1.5

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 A 为“出现奇数点”，$A=\{1,3,5\}$，记事件 C 为“出现偶数点”，$C=\{2,4,6\}$，则 A 与 C 是两个互不相容的事件。

类似地，称 n **个事件** $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **是互不相容**

(或互斥)事件,如果它们中任何两个事件 A_i 与 $A_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 都互不相容;称**可列个事件** $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ **互不相容**,如果它们中任何两个事件 A_i 与 $A_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$ 都互不相容。

7) 对立事件(逆事件)

事件 A 不发生,即由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件,称为事件 A 的**对立事件**,记作 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=\{\omega:\omega\in\Omega$ 且 $\omega\notin A\}$(见图 1.6)。

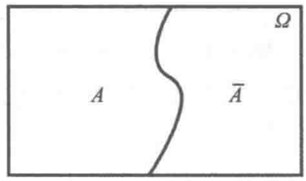


图 1.6

对立事件满足关系式:$A+\overline{A}=\Omega$ 及 $A\overline{A}=\varnothing$。

8) 完备事件组

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足:

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j)$;

(2) 它们的和是必然事件,即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$。

则称 **n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组**。

类似地,如果可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 满足:对于任何 $i\neq j(i,j=1,2,\cdots)$,有 $A_iA_j=\varnothing$,并且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$,则称**可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成一个完备事件组**。

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组的意义是在每次试验中必然发生且仅能发生 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的一个事件,当 $n=2$ 时,A_1 与 A_2 就是对立事件。

1.1.5　事件的运算性质

与集合运算一样,事件的运算有如下的运算性质:

(1) $A+B=B+A,AB=BA$(交换律)。

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C,A(BC)=(AB)C$(结合律)。

(3) $(A+B)C=AC+BC,(AB)+C=(A+C)(B+C)$(分配律)。

(4) $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B},\overline{\bigcup\limits_i A_i}=\bigcap\limits_i\overline{A_i},\overline{\bigcap\limits_i A_i}=\bigcup\limits_i\overline{A_i}\cap\overline{A_i}$(对偶律:德摩根公式)。

(5) $\varnothing\subset A\subset\Omega$。

(6) 若 $A\subset B$,则 $A+B=B,AB=A$。

(7) $A+\varnothing=A,A+\Omega=\Omega,A\varnothing=\varnothing,A\Omega=A$。

(8) $A+B=A+\overline{A}B=B+A\overline{B}=A\overline{B}+\overline{A}B+AB$。

(9) $\overline{A}=\Omega-A,\overline{\overline{A}}=A,A-B=A\overline{B}$。

例 1.4　设 A,B,C 是某个随机试验的 3 个事件,则

(1) 事件"A 与 B 发生,C 不发生"可表示为:$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$。

(2) 事件"A,B,C 中至少有一个发生"可表示为:$A+B+C$。

(3) 事件"A,B,C 中至少有两个发生"可表示为:$AB+BC+AC$。

(4) 事件"A,B,C 中恰好有两个发生"可表示为:$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$。

(5) 事件"A,B,C 同时发生"可表示为:ABC。

(6) 事件"A,B,C 都不发生"可表示为:$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$。

(7) 事件"A,B,C 不全发生"可表示为:$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$。

例 1.5 甲、乙、丙 3 人射击,以 A 表示事件"甲射击命中",B 表示事件"乙射击命中",C 表示事件"丙射击命中",试用语言表述下列事件:

(1) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$;　　(2) $\overline{A+B}$;

(3) $AB\overline{C}+\overline{A}BC$;　　(4) $\overline{A+B+C}$;

(5) $\overline{AB}$。

解 (1) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 表示事件"甲、乙、丙未全命中",即"甲、乙、丙至少有一人没命中",或者"甲、乙、丙至多有两人命中";

(2) $\overline{A+B}$表示事件"甲、乙均未命中";

(3) $AB\overline{C}+\overline{A}BC$ 表示事件"甲、乙均命中,丙未命中或甲未命中,乙、丙均命中";

(4) $\overline{A+B+C}$表示事件"甲、乙、丙均未命中";

(5) $\overline{AB}$表示事件"甲、乙未全命中",或者表示"甲、乙至少有一个人未命中"。

例 1.6 设 Ω 为必然事件,A,B 为两个事件,用事件运算公式简化:$AB+(A-B)+\overline{A}$。

解
$$AB+(A-B)+\overline{A}=AB+(A\overline{B})+\overline{A}=A(B+\overline{B})+\overline{A}$$
$$=A\Omega+\overline{A}=A+\overline{A}=\Omega$$

1.2 频率与概率

对于一个事件来说,它在一次试验中可能发生,也可能不发生,但通过长期的观察及对问题性质的分析发现,随机事件在一次试验中发生的可能性是有大小之分的,这是一种内在的客观规律性。我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大。把衡量事件发生可能性大小的数量指标称为**事件的概率**。它是概率论中最基本的概念之一。

为了从数学上对概率这个概念给出严格的定义,先讨论一个与此相关的概念——频率。

1.2.1 频率及其性质

人们对概率的认识可以从直观的大量重复试验中获得。

定义 1.1 在相同条件下进行了 n 次试验,在这 n 次试验中事件 A 发生的次数 $n(A)$ 称为事件 A 的**频数**,比值 $n(A)/n$ 称为事件 A 发生的**频率**,并记为 $f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{n(A)}{n}$$

历史上，曾有不少人做过大量投掷硬币的试验，观察“正面向上”这一事件出现的规律。从表 1.1 的试验记录中可以发现：试验次数较少时频率是不稳定的，当试验次数不断增大时，频率稳定地在数值 0.5 附近摆动。

在生产生活中也经常会遇到同样的例子，如下雨时地面总是差不多同时淋湿，某种产品在质量检验中出现次品的频率和寿命在 70～80 岁的人占人口的比例等，在观察次数增多时，都可发现频率具有某种稳定性。

表 1.1

试验者	抛掷次数	出现正面的次数	出现正面的频率
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

试验表明，频率具有如下一些特点：

(1) 频率的大小能体现事件发生可能性的大小，频率大则发生的可能性也大；反之，频率小则发生的可能性也小。

(2) 频率有一定的随机波动性。

(3) 当试验的次数逐渐增多时，频率又具有稳定性。

如何来理解频率的波动性与稳定性呢？

给定一根木棒，谁都不会怀疑它有自身的“客观”长度，问题是它的长度是多少？在实际过程中，我们可以用尺或仪器来测量，但是不论尺或仪器有多精确，反复测量得到的数值多多少少会有一些差异，这类似于前面所说的频率的波动性，但是如果我们对大量重复测量的结果取平均值，这个平均值却总是稳定在“真实”长度值的附近，这又有些类似于频率的稳定性。我们把这个频率的稳定值作为对事件发生可能性大小的客观度量，称为该事件的**概率**。

定义 1.2 在相同条件下重复进行了 n 次试验，如果当 n 增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动；且一般说来，n 越大，摆动幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的**概率**，记作 $P(A)$。

这一定义称为**概率的统计定义**。它指出了事件的频率实际上是概率的一个“测量”。在这个测量过程中频率所呈现出的稳定性反映了概率的客观性，但并不能用这个定义直接计算概率。实际上，当概率不易求出时，可以取大量试验的频率作为

概率的近似值。

由概率的统计定义,可以得到频率的 3 条最基本的性质,即

(1) **非负性** 任意事件 A 的频率非负:$f_n(A)\geqslant 0$。

(2) **规范性** 必然事件 Ω 的频率为 1:$f_n(\Omega)=1$。

(3) **有限可加性** 若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是一组两两互不相容的事件,则有

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i)$$

证明

(1) 对任何事件 A,它在 n 次试验中发生的频数 k 都满足 $0\leqslant k\leqslant n$,由于频率 $f_n(A)=\dfrac{k}{n}$,因此有

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant \frac{n}{n}=1$$

(2) 必然事件 Ω 在每次试验中一定发生,即 $k=n$,因此

$$f_n(A)=\frac{n}{n}=1$$

(3) 事件 $\sum\limits_{i=1}^{m}A_i$ 表示在试验中 m 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中至少有一个发生。由于它们互不相容,故在每次试验中,它们中的任何两个事件都不会同时出现。因此,在 n 次试验中 $\sum\limits_{i=1}^{m}A_i$ 发生的频数等于各事件发生频数之和,即

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i)$$

所以

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\frac{f_n\left(\sum\limits_{i=1}^{m}A_i\right)}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}f_n(A_i)}{n}=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i)$$

1.2.2 概率的公理化定义

概率的统计定义不是严格的数学概念,其中“n 很大”时,频率“稳定地”在某一常数 p“附近摆动”都不是确切的数学语言。

因为频率的本质是概率,所以频率所满足的三条性质也必须是概率所具有的性质。但是理论上还要考虑到可列无穷多个事件的关系和运算,因此对上述性质作适当的推广,给出如下的定义。

定义 1.3 设 E 为随机试验,Ω 为样本空间,F 为所有事件组成的集合,对于 F 中的每一个事件 A,分别赋予一个实数,记为 $P(A)$,如果实值函数 $P(\cdot)$ 满足:

(1) **非负性** 对每一个事件 A,$P(A)\geqslant 0$。

(2) **规范性**　$P(\Omega)=1$。

(3) **可列可加性**　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是一组互不相容的事件,则有

$$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1.1}$$

则称 $P(A)$为事件 A 的**概率**。

上述 3 条性质与公理一样已被数学家们普遍接受。因此,上面的定义又称为**概率的公理化定义**。概率论的全部结论均由此定义演绎导出。

1.2.3　概率的性质

性质 1　不可能事件的概率为零,即 $P(\varnothing)=0$。

证明　由于任何事件与不可能事件之并仍是此事件本身,所以

$$\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots\cup\varnothing\cup\cdots$$

又因为不可能事件与任何事件是互不相容的,故由概率的可列可加性得

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots$$

从而由 $P(\Omega)=1$ 得 $P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots=0$,再由概率的非负性得 $P(\varnothing)=0$。

性质 2(有限可加性)　若有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,则有

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i) \tag{1.2}$$

特别地,若 A 与 B 互不相容,则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.3}$$

证明　对 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\varnothing,\varnothing,\cdots$应用可列可加性,得

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+\cdots+A_n)&=P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\varnothing+\varnothing+\cdots)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\end{aligned}$$

性质 3　$P(B-A)=P(B)-P(AB)$　(1.4)

特别地,若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1.5}$$

证明　因为 $B=B(A+\overline{A})=AB+(B-A)$,且$(AB)(B-A)=\varnothing$,由有限可加性有

$$P(B)=P(AB)+P(B-A)$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

当 $A\subset B$,$AB=A$,有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$,$P(B)\geqslant P(A)$。

性质 4　若 $A\subset B$,则有 $P(A)\leqslant P(B)$。

特别地,对任何事件 A,有 $P(A)\leqslant 1$。

性质 5 如果可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成一个完备事件组，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=1 \tag{1.6}$$

特别地，对立事件的概率有

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1.7}$$

证明 由于 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成一个完备事件组，它们一定互不相容，且 $\sum_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$，根据可列可加性，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=P(\Omega)=1$$

同理可证，对于有限个事件构成的完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=P(\Omega)=1$$

特别地，当 $n=2$ 时，A 与 $\overline{A}$ 构成完备事件组，则

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1$$

所以有

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 6(加法公式) 对于任意两个事件 A,B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.8}$$

证明 因为 $A+B=A+(B-AB)$，$A(B-AB)=\varnothing$，再由性质 2 和性质 3 有

$$P(A+B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

该性质可推广到多个事件的和：

$$\begin{aligned}P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\\&\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned} \tag{1.9}$$

例 1.7 设 $P(A)\geqslant 0.8$，$P(B)\geqslant 0.8$，证明：$P(AB)\geqslant 0.6$。

证明 由加法公式可知 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)$，再由概率定义可知 $0\leqslant P(A+B)\leqslant 1$，由此可得

$$P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1=0.6$$

例 1.8 小王参加“智力大冲浪”游戏，他能答出甲、乙二类问题的概率分别为 0.7 和 0.2，两类问题都能答出的概率为 0.1。求小王

(1) 答出甲类而答不出乙类问题的概率；

(2) 至少有一类问题能答出的概率；

(3) 两类问题都答不出的概率。

解 设事件 A,B 分别表示“小王能答出甲、乙类问题”，则 $P(A)=0.7$，$P(B)=$