大学数学基础与提高丛书

主编　雷发社

高等数学重点难点100讲

GAODENGSHUXUE
ZHONGDIANNANDIAN

本书特色

全方位精讲高等数学100个重点难点，深入浅出，化难为易，堪称本专科生、考研学生、科教人员的良师益友。

多角度精析2000道典型例题，系统讲述解题方法与技巧，可作习题讨论课、考研提高课的首选教材。

高等数学
重点难点100讲

主　编　雷发社

编　者　茹世才　杜建丽　孙晓群

王可升　黄璞生　欧阳克智

王建刚　杨艺芳　付瑞琴

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学重点难点100讲/雷发社主编．—西安:陕西科学技术出版社,2003.12

ISBN 7-5369-3658-3

Ⅰ.高...　Ⅱ.雷...　Ⅲ.高等数学—解题

Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第075643号

出版者	陕西科学技术出版社 西安北大街131号 邮编710003 电话(029)7211894 传真(029)7218236 http://www.snstp.com
发行者	陕西科学技术出版社 电话(029)7212206 7260001
印　刷	长安大学印刷厂
规　格	787mm×1092mm　16开本
印　张	29
字　数	748千字
版　次	2003年12月第1版 2003年12月第1次印刷
定　价	38.00元

前　　言

高等数学的重要性不言而喻. 由于高等数学理论上的高度抽象性、逻辑上的高度严密性以及内容上的博大系统性，使得初学者在有限的学时内难以理解接受. 正因于此，对初学高等数学的同学来说，往往听讲时抓不住重点，课后不知如何去解题，所以希望能有一本令他们满意的参考书，帮助他们尽快地突破难点、抓住重点，牢固地掌握基本知识，且在此基础上，学会并掌握较为系统的解题方法. 为了满足同学们的上述愿望，我们总结了三十多年从事高等数学教学的经验，编写了这本《高等数学重点难点 100 讲》.

本书的特点是：一、突出重点难点. 全书将高等数学从函数、极限、连续、一元微积分、向量代数、空间解析几何到多元微积分、级数及微分方程各个章节中的重要的、难以理解掌握的知识点一一抽取出来，从多角度进行详细的讲解与讨论，起到化难为易的功效；二、介绍解题方法系统全面. 每一讲精选出若干个典型例题，通过对这些有代表性的例题由浅入深的详细剖析，使同学们达到举一反三的效果；三、适用面广. 由于本书选材的多样性与综合性使得它既适用于理工类、又适用于经管类本专科生，既可作为初学者的辅助教材，又可作为准备报考硕士研究生的考生考前复习训练的指导书.

由于编者水平有限，书中错误之处敬请读者批评指正.

编　者

目　　录

第 1 讲　函数概念(1)

第 1 讲至第 4 讲讨论的是同一个主题:函数.

高等数学研究的对象是函数;研究函数所采用的方法是极限.因此在讨论求函数极限的各种方法之前,务必下功夫对函数概念及其性质有一个充分的理解与掌握.

一、函数的定义

设有两个变量 x 和 y,如果对于 x 的变化范围内的每一个值,y 按一定规则 f 有一个确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$. x 称为自变量. 自变量 x 的变化范围 D 叫做这个函数的定义域. 当 x 遍取 D(也记作 D_f) 上各个数值时,对应的函数值全体组成的数集 $Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数概念的两要素:① 定义域:自变量 x 的变化范围(若函数是解析式表示的,则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域);② 对应关系:给定 x 值,求 y 值的方法.

注意　当且仅当给定的两个函数,其定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则表示不同的函数.

例 1　下列各题中 $f(x)$, $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2\ln x$;　　(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = x + 1, g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

解　(1) 不相同,因为定义域不同,$f(x)$ 的定义域为 $x \neq 0$,而 $g(x)$ 的定义域为 $x > 0$.

(2) 不相同,因为对应法则不同,$g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \geqslant 0$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $y = |x|$ 为相同的函数.

(3) 不相同,因为定义域不相同,$g(x)$ 的定义域为 $x \neq 1$,但若补充定义 $g(1) = 2$,则

$$f(x) = x + 1 \text{ 与 } g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1; \\ 2, & x = 1 \end{cases} \text{ 相同.}$$

图 1-1 是上述三对函数的图象,从生动直观的几何图象上,我们更能感受到它们的异同之处.

注意　函数的表示法只与定义域和对应关系有关,而与用什么字母表示无关,即 $f(x) = f(t) = f(u) = \cdots$,简称函数表示法的"无关特性",这是由 $f[\varphi(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法.

例 2　(1) 已知 $2f(x) + f(1 - x) = x^2$,求 $f(x)$;(2) 已知 $f(x + \dfrac{1}{x}) = x^4 + \dfrac{1}{x^4}$,求 $f(x)$;(3) 已知 $f(\sin \dfrac{x}{2}) = 1 + \cos x$,求 $f(x)$.

解　(1) 利用函数表示法的无关特性,令 $t = 1 - x$,即 $x = 1 - t$,代入原方程得

$$2f(1 - t) + f(t) = (1 - t)^2, \quad \text{即} \quad 2f(1 - x) + f(x) = (1 - x)^2,$$

解联立方程组 $\begin{cases} 2f(x) + f(1 - x) = x^2, \\ 2f(1 - x) + f(x) = (1 - x)^2 \end{cases}$ 得:$f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

(2) 根据原函数左边的形状,对右边配方变形为:$f(x + \dfrac{1}{x}) = \left[(x + \dfrac{1}{x})^2 - 2\right]^2 - 2$

利用函数表示法的无关特性,令 $t = x + \frac{1}{x}$,得 $f(t) = (t^2 - 2)^2 - 2 = t^4 - 4t^2 + 2$,即 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.

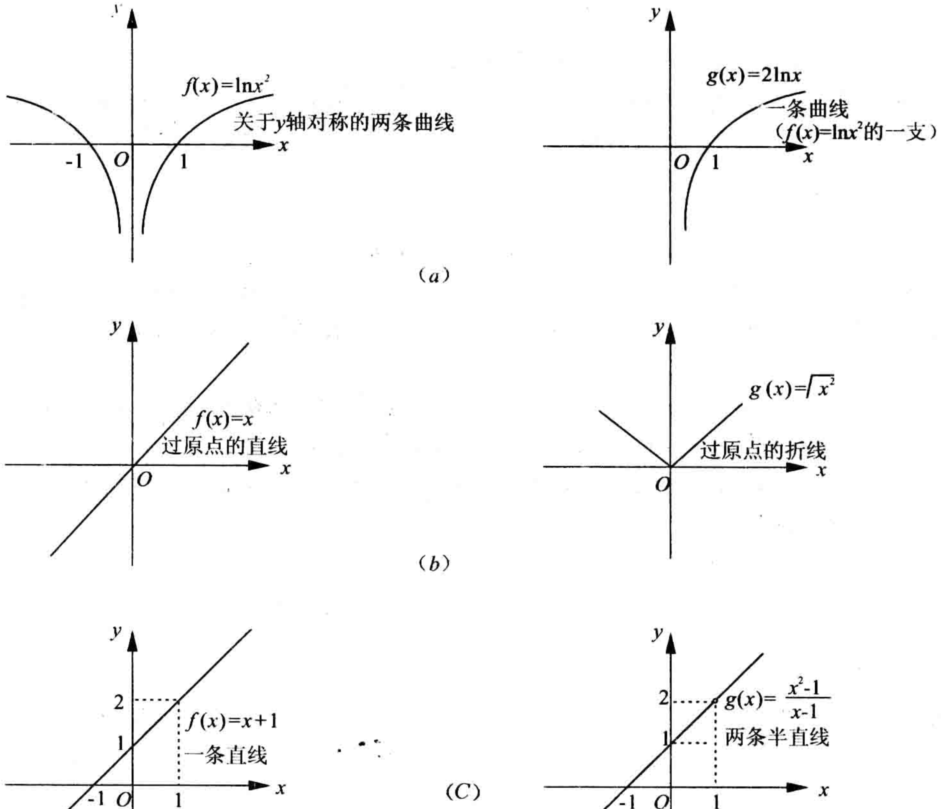


图 1-1

(3) 由于 $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$,从而 $f(\sin \frac{x}{2}) = 2 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$,所以,令 $\sin \frac{x}{2} = t$,得:$f(t) = 2 - 2t^2$,即 $f(x) = 2 - 2x^2(|x| \leqslant 1)$.

例 3 设 $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x$,其中 $x \neq 0, x \neq 1$,求 $f(x)$.

解 利用函数表示法的无关特性,令 $t = \frac{x-1}{x}$,即 $x = \frac{1}{1-t}$,代入原方程得:

$f(\frac{1}{1-t}) + f(t) = \frac{2}{1-t}$,即 $f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = \frac{2}{1-x}$,再令 $\frac{1}{1-x} = \frac{u-1}{u}$,即 $x = \frac{1}{1-u}$,代入上式,得

$f(\frac{1}{1-u}) + f(\frac{u-1}{u}) = \frac{2(u-1)}{u}$,即 $f(\frac{1}{1-x}) + f(\frac{x-1}{x}) = \frac{2(x-1)}{x}$,

解联立方程组:
$$\begin{cases} f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x, & (1.1) \\ f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = \frac{2}{1-x}, & (1.2) \\ f(\frac{1}{1-x}) + f(\frac{x-1}{x}) = \frac{2(x-1)}{x}, & (1.3) \end{cases}$$

消去 $f(\frac{x-1}{x})$，$f(\frac{1}{1-x})$，得 $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$.

二、函数定义域的求法

注意　求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构所的不等式组的解集.

在实际问题中，函数的定义域是由所研究问题的实际意义来确定的：一般数学式子给出的抽象函数 $y=f(x)$，如果没有指明自变量与因变量的具体意义(如物理意义，几何意义等)或其他声明，则认为这个函数的定义域是使得这个数学式子有意义的自变量的一切实数值的集合；如果表示一个函数的解析式是由几个数学式子组合而成的，则这个函数的定义域就必须取这几个数学式子允许值范围的公共部分.

在求定义域时应注意到：① 分式函数的分母不能为零；② 偶次根式内的量不能取负值；③ 对数的真数必须取正值；④$y=\tan x$ 中的 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$y=\cot x$ 中的 $x\neq k\pi$，k 是整数；⑤ 函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ 的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

例 4　求函数 $y=\ln\frac{x}{x-2}+\arcsin\frac{3x-1}{5}$ 的定义域.

解　设 $y_1=\ln\frac{x}{x-2}$，$y_2=\arcsin\frac{3x-1}{5}$. 对于 y_1，有 $\frac{x}{x-2}>0$，即 $x(x-2)>0$，由此，得 $\begin{cases}x>0,\\x-2>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\x-2<0.\end{cases}$ 所以 y_1 的定义域是 $x>2$ 或 $x<0$.

对于 y_2，由反三角函数的定义域知有：$-1\leqslant\frac{3x-1}{5}\leqslant 1$，即 $-5\leqslant 3x-1\leqslant 5$，解之得 $-\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2$. 因此，$y_2$ 的定义域为 $[-\frac{4}{3},2]$.

由于 $y=y_1+y_2$，所以 y 的定义域是 y_1 与 y_2 的定义域的公共部分，即

$$D(f)=\{x\,|\,x>2 \text{ 或 } x<0\}\cap\left\{x\,\middle|\,-\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2\right\}=\left\{x\,\middle|\,-\frac{4}{3}\leqslant x<0\right\}.$$

例 5　设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求：

(1) $f(\sin x)$；　(2) $f(x+a)(a>0)$；　(3) $f(x+a)+f(x-a)$　$(a>0)$ 的定义域.

解　(1) 为使 $f(\sin x)$ 有意义，必须使 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$，即 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$　$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(2) 为使 $f(x+a)(a>0)$ 有意义，必须使 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，所以 $f(x+a)(a>0)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$.

(3) 为使 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 有意义，必须使 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 与 $0\leqslant x-a\leqslant 1$ 同时成立，即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$ 与 $a\leqslant x\leqslant 1+a$ 同时成立，若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 的定义域为 $[a,1-a]$；若 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 的定义域为空集.

第2讲 函数概念(2)

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

奇函数:$f(-x)=-f(x)$,对任意的 $x\in D$,图形对称于原点.

偶函数:$f(-x)=f(x)$,对任意的 $x\in D$,图形对称于 y 轴.

例如:绝对值函数 $f(x)=|x|$ 是偶函数,符号函数 $f(x)=\mathrm{sgn}x$ 是奇函数.对任意函数,易证,$f(x)+f(-x)$ 是偶函数,$f(x)-f(-x)$ 是奇函数.注意到以下几点,对于判别函数的奇偶性是有益的:

(1) 由定义知,具有奇偶性的函数的定义域关于原点是对称的,所以,若函数的定义域不关于原点对称,则可肯定该函数不具有奇偶性;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(0)=0$;

(3) 存在既是奇函数又是偶函数的函数,$f(x)=0$ 就是,而且是惟一的,事实上,这时 $f(x)$ 同时满足:$f(-x)=-f(x)$ 与 $f(-x)=f(x)$,即对一切 $x\in D$,恒有 $f(x)=-f(x)$,所以 $f(x)\equiv 0,x\in D$ (这里,$D=(-\infty,+\infty)$).

(4) 奇偶函数的运算性质:① 奇函数的代数和仍是奇函数;偶函数的代数和仍是偶函数;② 偶数个奇函数(或偶函数)之积为偶函数;奇数个奇函数的积为奇函数;③ 一奇一偶的乘积为奇函数.

(5) 常见的偶函数:$|x|,\cos x,x^{2n}(n\in N),\mathrm{e}^{|x|},\mathrm{e}^{x^2},\cdots$

常见的奇函数:$\sin x,\tan x,\dfrac{1}{x},x^{2n+1},\arcsin x,\arctan x,\cdots$

例1 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^2-x+1$; (2) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$;

(3) $f(x)=\dfrac{x^4-x}{x-1}$; (4) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0;\\ 1+x, & x>0.\end{cases}$

解 (1) $f(x)=x^2-x+1$,

$$f(-x)=(-x)^2-(-x)+1=x^2+x+1,$$

$\therefore$ $f(x)=x^2-x+1$ 是非奇非偶函数.

(2) $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$,

$$\begin{aligned}f(-x)&=\log_a[\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)]=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)\\&=\log_a\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x).\end{aligned}$$

$\therefore$ $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是奇函数.

(3) $\because$ $f(x)$ 的定义域为 $x\neq 1$ 的全体实数,不关于原点对称,

$\therefore$ $f(x)=\dfrac{x^4-x}{x-1}$ 是非奇非偶函数.

(4) $f(-x)=\begin{cases}1-(-x), & -x\leqslant 0;\\ 1+(-x), & -x>0.\end{cases}$

即　$f(-x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ 1+x, & x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0;\\ 1+x, & x>0\end{cases}=f(x)$,

$\therefore$　$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0;\\ 1+x, & x>0\end{cases}$是偶函数.

例 2　判别 $y=F(x)(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2})$ 的奇偶性(其中 $a>0,a\neq 1,F(x)$ 为奇函数).

解　令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,

$$g(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{a^x-1+1}{a^x-1}+\frac{1}{2}=-1-\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{a^x-1}-\frac{1}{2}=-g(x),$$

所以 $g(x)$ 为奇函数,又 $F(x)$ 为奇函数,从而 $y=F(x)(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2})$ 为偶函数.

例 3　讨论 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的奇偶性.

解　$f(-x)+f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$

$$=\frac{[(x^2+1)-(x+1)^2]+[(1+x^2)-(x-1)^2]}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2-x^2}=0.$$

从而 $f(-x)=-f(x)$,故 $f(x)$ 为奇函数.

注意　判别给定函数的奇偶性,主要是根据奇偶性定义(如例 1),有时也用其运算性质(如例 3),$f(x)+f(-x)=0$ 也是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法(如例 3).

2. 单调性

对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$,且 $x_1<x_2$,若 $f(x_1)<f(x_2)$,称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的,图形沿 x 轴的正向上升;若 $f(x_1)>f(x_2)$,称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的,图形沿 x 轴的正向下降.

同样可定义在无限区间上单调增加(减少)函数.

在整个区间上单调增加(减少)函数称为单调函数,这个区间称为单调区间.

例 4　判断函数 $y=x+\ln x$ 的单调增减性.

解　设 $y=f(x)=x+\ln x,0<x_1<x_2$.

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-(x_1+\ln x_1)$$
$$=(x_2-x_1)+(\ln x_2-\ln x_1)=(x_2-x_1)+\ln\frac{x_2}{x_1}.$$

$\because$　$0<x_1<x_2$,　　$\therefore$　$x_2-x_1>0,\dfrac{x_2}{x_1}>1$,　$\ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$,

$\therefore$　$f(x_2)-f(x_1)>0$,　即 $f(x_2)>f(x_1)$.

$\therefore$　$y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

定义告诉我们,函数的单调性与区间有关,例如,$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的,因而在 $(-\infty,0]$ 或在 $(0,+\infty)$ 上是单调的,但在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的.

例 5　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义,$x_1>0,x_2>0$,求证:

(1) 若$\dfrac{f(x)}{x}$单调增,则$f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$;

(2) 若$\dfrac{f(x)}{x}$单调减,则$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

证 只证(1)(请读者仿(1)的证法证(2)).设$x_1>0,x_2>0$,且$x_1<x_2$,由$\dfrac{f(x)}{x}$的单调增加性得

$$\frac{f(x_1)}{x_1}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2},\tag{2.1}$$

由(2.1)式得 $$x_1f(x_2)\geqslant x_2f(x_1),\tag{2.2}$$

及 $$x_2f(x_1+x_2)\geqslant(x_1+x_2)f(x_2).\tag{2.3}$$

由(2.2)、(2.3)式推得:$x_2f(x_1+x_2)\geqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\geqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$.

从而得 $$f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2).$$

例 6 设$g(x),f(x),h(x)$为单调增函数,证明:若$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则

$$g[g(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant h[h(x)].$$

证 设x_0为g,f,h公共定义域内任意一点,则由已知条件得

$$A=g(x_0)\leqslant B=f(x_0)\leqslant C=h(x_0),$$

由$A\leqslant B\leqslant C$及$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$得

$g(A)\leqslant f(A)\leqslant f(B)\leqslant h(B)\leqslant h(C)$,即$g[g(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]\leqslant h[h(x_0)]$.

由x_0的任意性可知:$g[g(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant h[h(x)]$成立.

3. 有界性

若存在$M>0$,对任意的$x\in(a,b)$,使$|f(x)|\leqslant M$,则称$f(x)$在(a,b)内是有界的,其图形介于直线$y=M$与$y=-M$之间.

若不存在$M>0$,使$|f(x)|\leqslant M$永远成立,则称$f(x)$为无界函数,其图象向上或向下无限伸展.

如三角函数$f(x)=\sin x,g(x)=\cos x$在整个数轴上是有界的,因为对一切实数x,恒有:$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

又如:$|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2},|\arccos x|\leqslant\pi,x\in[-1,1]$;

$$|\arctan x|<\frac{\pi}{2},|\operatorname{arccot}x|<\pi,x\in(-\infty,+\infty).$$

函数$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内仅有下界,因为对任何实数x,都有$x^2\geqslant 0$即$y\geqslant 0$,函数$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内无上界,也无下界.

例 7 求证函数$y=\dfrac{x}{x^2+1}$在它的定义域内是有界的.

证 函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

$\because\quad x^2\pm 2x+1=(x\pm 1)^2\geqslant 0$,

$\therefore\quad x^2+1\geqslant\pm 2x$,由$x^2+1\geqslant 2x$得$\dfrac{x}{x^2+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$;

由$x^2+1\geqslant-2x$,得$-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x}{x^2+1}$,所以$-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x}{x^2+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$.即有$\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$,所以函数在整个定义域上是有界的.

注意 ①定义中的正数M不是惟一的,但也不是任意的.如上例中的$M=\dfrac{1}{2}$,也可取

$M=1$,这时 $\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\leqslant 1$,也满足函数有界的定义,但取 $M=\frac{1}{3}$ 就不对了,因为当 $x=\pm 1\in D$ 时,$\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{1}{2}>M=\frac{1}{3}$;② 函数 $f(x)$ 是否有界与所讨论区间有关. 例如,$f(x)=\frac{1}{x}$,在$[1,+\infty)$上有界,但在$(0,+\infty)$内无界. 事实上,对于任意指定的足够大的正数 M,总有 $x_0=\frac{1}{2M}\in(0,+\infty)$,使得$\frac{1}{x_0}=2M>M$.

例 8　试证函数 $f(x)=x\sin x$ 是无界函数.

证　在 $f(x)$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内考虑数列 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n\in\mathbf{N})$. 显然,$f(x_n)=f(2n\pi+\frac{\pi}{2})=(2n\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=2n\pi+\frac{\pi}{2}>2n\pi>n$ $(n=1,2\cdots)$. 对于任意指定的足够大的正数 M,总有正整数 N:$N\geqslant M$,$f(x)$ 在 x_N 处的值 $f(x_N)=2N\pi+\frac{\pi}{2}>N\geqslant M$. 故 $f(x)=x\sin x$ 无界.

例 9　设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界,又有下界.

证　必要性:设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在 $M>0$,使得对于任给 $x\in X$,有 $|f(x)|<M$. 所以 $-M<f(x)<M$,取 $K_1=M,K_2=-M$,则 $f(x)>K_2$,$f(x)<K_1$,故 K_1,K_2 分别为 $f(x)$ 在 X 上的上界和下界.

充分性:设 $f(x)$ 在 X 上既有上界 k_1,又有下界 k_2,即对于任给的 $x\in X$,有 $f(x)<k_1$,且 $f(x)>k_2$. 取 $M=\max\{|k_1|,|k_2|\}$(表示取 $|k_1|$,$|k_2|$ 中大的一个数),则 $f(x)>k_2\geqslant -M$,且 $f(x)<k_1\leqslant M$,即有 $-M<f(x)<M$,或 $|f(x)|<M$,故 $f(x)$ 有界.

4. 周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在一个不为零的数 l,使得关系式 $f(x+l)=f(x)$ 对于定义域内的任何 x 都成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例 10　求下列函数的周期:

(1)$f(x)=|\sin x|+|\cos x|$;　(2)$f(x)=[x]-x$;　(3)$f(x)=[x]-3\left[\frac{x}{3}\right]$.

解　(1) 由于
$$\begin{aligned}f(x+\frac{\pi}{2})&=\left|\sin(x+\frac{\pi}{2})\right|+\left|\cos(x+\frac{\pi}{2})\right|\\&=|\cos x|+|-\sin x|=|\sin x|+|\cos x|=f(x),\end{aligned}$$
所以 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的周期为$\frac{\pi}{2}$.

(2) $f(x+1)=[x+1]-(x+1)=[x]+1-x-1=[x]-x=f(x)$,
所以 $f(x)=[x]-x$ 的周期为 1.

(3) $f(x)=[x]-x+\left(\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]\right)$,其中 $f_1(x)=[x]-x$ 以 1 为周期,$f_2(x)=\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]$以 3 为周期. 所以 $f(x)=f_1(x)-3f_2(x)$ 以 3 为周期.

注意　判别给定函数的周期性,可以根据周期性的定义(如例 10 的(1),(2));也可用其运算性质:若 $f(x)$,$g(x)$ 分别是以 $l_1,l_2,l_1\neq l_2$ 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 l_1,l_2 的最小公倍数为周期的函数(如例 10(3)).

例 11 设对一切实数 x，有 $f(x+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，试证 $f(x)$ 是周期函数.

证 $$f\left[(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+\frac{1}{2})-f^2(x+\frac{1}{2})}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2}=\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-f(x)\right|.$$
由已知条件知：对一切实数 x，有 $f(x+\frac{1}{2})\geqslant\frac{1}{2}$，$(x\in\mathbf{R})$. 所以 $f(x+1)=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$，故 $f(x)$ 是周期为 1 的函数.

如何判断一个函数 $y=f(x)$ 是否为周期函数呢？若 l 为函数 $y=f(x)$ 的周期，则对任何 x(定义域内的) 都应有 $f(x+l)-f(x)=0$. 在上式中，将 l 看成未知量求解，若解出的 l 依赖于自变量 x 或为零，则 $f(x)$ 不是周期函数；若可以求出不依赖于 x 的非零数解(一般地都不惟一)，则 $f(x)$ 是周期函数.

例 12 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 是否为周期函数？

解 $f(x+l)-f(x)=\sin\frac{1}{x+l}-\sin\frac{1}{x}=-2\sin\frac{l}{2x(x+l)}\cos\frac{2x+l}{2x(2x+l)}$，若 l 为周期，则应有
$$\sin\frac{l}{2x(2x+l)}=0,\text{或}\cos\frac{2x+l}{3x(2x+l)}=0.$$
显然，满足上述两式的非零常数 l 是不存在的. 例如，若 $\sin\frac{l}{2x(x+l)}=0$，则
$$\frac{l}{2x(x+l)}=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$
即有 $l=2xk\pi(x+l)$. 解出 $l=\frac{2k\pi x^2}{1-2k\pi x}$，这表明 l 随 x 而改变. 若 $\cos\frac{2x+l}{2x(x+l)}=0$，同理可得出 l 依赖于 x 的结论. 所以，函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 不是周期函数.

例 13 讨论 $f(x)=\sin x^2$ 是不是周期函数.

解 $f(x)$ 的零点为 $x^2=k\pi$，即 $x=\pm\sqrt{k\pi}$，相邻两零点的距离
$$d=\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}},$$
可见：零点分布随 k 的不同而不同，没有周期性，因此 $f(x)$ 不是周期函数.

由定义判断函数是否是周期函数或求周期函数的周期比较困难，有时利用“若 $f(x)$ 的最小正周期为 l，则 $f(ax+b)(a>0)$ 的最小正周期为 $\frac{l}{a}$”的结论求周期函数的周期比较方便. 例如，因为 $\sin x$ 的周期为 2π，故 $A\sin(\omega x+\varphi)$(A、w、φ 均为常数，且 $A\neq0,\omega>0$) 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$. 所以，记住 $\sin x$，$\cos x$(周期为 2π)，$\tan x$，$\cot x$，$|\sin x|$，$|\cos x|$(周期为 π) 等周期函数的周期，用它们求其他有关周期函数的周期就比较方便了.

第 3 讲　函数概念(3)

一、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中的任一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定惟一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为

$$x=\varphi(y)$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

从上述定义可知求反函数的步骤为：① 把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出；② 把刚才所得到的表达式中的 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数 $f^{-1}(x)$.

例 1　求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$；　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　(1) 由原式中解出 2^x，得 $2^x=\dfrac{1+y}{1-y}$，取对数解出 x，$x=\log_2\dfrac{1+y}{1-y}$. 用 x 作自变量，y 作因变量，就得反函数：$y=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$.

(2) 由 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　得　$x+\sqrt{1+x^2}=e^y$，或　$e^{-y}=\sqrt{x^2+1}-x$，

解联立方程组
$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+x=e^y,\\ \sqrt{x^2+1}-x=e^{-y}.\end{cases}$$

消去 $\sqrt{x^2+1}$，得 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$，对换 x 与 y，得反函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x$.

例 2　求 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数.

解　令 $u=\sqrt{1+4x}$，则 $y=\dfrac{1-u}{1+u}$，解出 $u=\dfrac{1-y}{1+y}$，即 $\sqrt{1+4x}=\dfrac{1-y}{1+y}$.

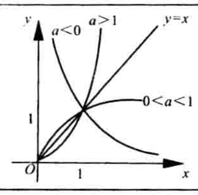
解出　$x=\dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\dfrac{y}{(1+y)^2}$，　即　$y=-\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

注意　① $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图象重合；$y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称；② 只有一一对应的函数才有反函数.

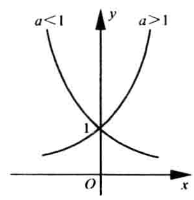
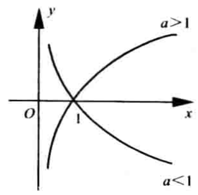
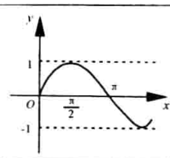
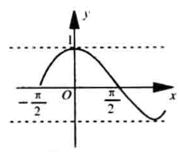
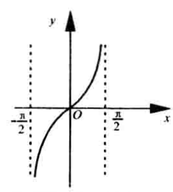
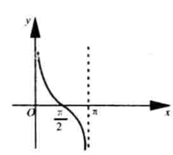
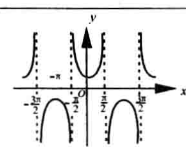
二、基本初等函数

这些函数都是最基本最重要的函数，我们**务必记住下面表格中各基本初等函数的定义式及性质，熟练地画出它们的图象**，以方便今后学习.

表 3.1　　**基本初等函数**

名称		定义式	性质	要点	图形
基本初等函数	幂函数	$y=x^a$ (a 为常数) 定义域一般为 $(0,+\infty)$	$a>0$ 时，函数单调增；$a<0$ 时，函数单调减过 $(1,1)$ 点.	定义域可为 $(-\infty,+\infty)$，如 $y=x^2$；也可为 $[0,+\infty)$，如 $y=x^{\frac{1}{2}}$	

续表

基本初等函数	指数函数		$y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	$a>1$ 时，函数单调增； $a<1$ 时，函数单调减	当 $a>1$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$， $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$； 当 $a<1$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$， $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$	
	对数函数		$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$ 定义域为 $(0,+\infty)$	$a>1$ 时， 函数单调增； $a<1$ 时， 函数单调减 过$(1,0)$点	$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数， $\log_e x=\ln x$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$	
	三角函数	正弦函数	$y=\sin x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	奇函数，周期函数 $T=2\pi$， 有界函数 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$	值域为 $[-1,1]$	
		余弦函数	$y=\cos x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	偶函数，周期函数 $T=2\pi$， 有界函数 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$	值域为 $[-1,1]$	
		正切函数	$y=\tan x$ 定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$	奇函数，周期函数 $T=\pi$， 单调增函数	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$	
		余切函数	$y=\cot x$ 定义域为 $x\neq k\pi,k=0,$ $\pm1,\pm2,\cdots$	周期函数 $T=\pi$， 单调减函数	$\lim\limits_{x\to 0^+}\cot x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to\pi^-}\cot x=-\infty$	
		正割函数	$y=\sec x$ $=\dfrac{1}{\cos x}$	周期函数 $T=2\pi$，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上 无界		
		余割函数	$y=\csc x$ $=\dfrac{1}{\sin x}$	周期函数 $T=2\pi$，在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$上 无界