微积分

（上）

主　编　程　舰　游雪肖

副主编　赵大方　汪金汉　潘继斌

清华大学出版社

微积分

（上）

主 编 程 舰 游雪肖

副主编 赵大方 汪金汉 潘继斌

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是根据教育部"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求",并结合作者多年在教学第一线积累的丰富教学经验,参考国内外若干优秀教材编写而成.本书分为上、下两册,上册内容包括:函数极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分;下册内容包括:多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程.本书按节配置习题,每章配有总习题A、B两套,书末附有习题参考答案及提示,便于读者参考.

全书结构严谨,论证简明,叙述清晰,例题典型,便于教学.可作为高等院校经济类、管理类各专业本科生的微积分课程教材,也可作为硕士研究生考前学习用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分.上/程舰,游雪肖主编.--北京:清华大学出版社,2015
ISBN 978-7-302-39883-7

Ⅰ.①微… Ⅱ.①程… ②游… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第080649号

责任编辑: 冯 昕 赵从棉
封面设计: 张京京
责任校对: 王淑云
责任印制: 李红英

出版发行: 清华大学出版社
网 址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084
社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者: 三河市君旺印务有限公司
装 订 者: 三河市新茂装订有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 185mm×230mm **印 张:** 15.25 **字 数:** 332千字
版 次: 2015年7月第1版 **印 次:** 2015年7月第1次印刷
印 数: 1~2000
定 价: 36.00元

产品编号:062587-01

前言

微积分是高等院校经济类和管理类各专业的基础课程之一. 该课程不仅为后续课程提供必备的数学工具，而且是培养经济管理类学生数学素养和理性思维能力的重要途径.

本书分为上、下两册，依据教育部经济管理类本科数学基础课程教学基本要求和全国硕士研究生入学考试数学(三)考试大纲编写，内容涵盖一元微积分、多元微积分、无穷级数与微分方程等. 可作为经济管理类和其他非数学专业的教材或教学参考书.

在本书的编写过程中，注重微积分的基础理论和知识系统，以数学在经济和管理中的应用为落脚点，培养学生良好的抽象思维能力、逻辑思维能力、空间想象能力、运算能力和运用所学知识分析解决问题的能力. 力求内容简洁明快，叙述深入浅出，学生阅读轻松，教学使用便捷，在轻松愉快的氛围中培养学生的数学素质. 与同类教材相比，本书有三大特色：第一，突出数学思想与方法，着力于数学素质与能力的培养. 例如，重视介绍数学概念的背景与本质，在极限概念中渗透逼近思想，在微分概念中渗透线性化思想，在极值问题中渗透优化思想等. 第二，充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力. 很大程度上，文科学生学了数学不知怎样用，缺乏应用数学知识解决实际问题的意识与能力. 为了解决这一问题，本书重视将数学建模的思想和方法渗透到教材中去，培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力. 例如，很多重要概念都介绍其应用背景，重要结论都举出了应用实例，应用的范围也不仅仅局限在几何与物理方面，而扩大到经济、生命科学等领域. 第三，注重教学适用性. 本书力求既能满足当今教学改革与人才培养的需要，又能把握好尺度，与当前教学现状相适应. 为了便于教学，本教材精选例题与习题，难易适度，既有基础性的训练，又有2004—2015年研究生考试题目(数学三)(每章总习题B)，并在附录中给出了参考答案或提示.

本书由程舰、游雪肖、赵大方、汪金汉和潘继斌编写. 在编写过程中，融入了编者长期从事微积分教学、研究的经验和成果. 由于编者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，恳请专家、同仁和读者批评指正.

作　者

2015年1月

目录

第 1 章

函数极限与连续

函数是微积分研究的基本对象,极限则是微积分建立的基础,通过本章的学习为以后章节的学习打下必要的基础.

1.1 函数

1.1.1 区间

区间是连续数集的简称,表示一定范围内数的集合.在函数的研究中经常涉及变量的变化范围,一般用区间来描述.

定义 1.1.1 设 a 和 b 都是实数,并且有 $a<b$,则称 a 与 b 之间的所有实数的集合为开区间,记作 (a,b),用不等式表示为 $\{x|a<x<b\}$,即有

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

这里 a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点,数 $b-a$ 称为开区间 (a,b) 的长度.

称数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间,记作 $[a,b]$,即有

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

类似的区间还有

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

我们称区间 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 为**半开半闭区间**.

以上区间长度为有限的都称为**有限区间**,如果区间的长度为无限的,则称为**无限区间**.这里引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)和 $-\infty$(读作负无穷大),因此有以下的几种无限区间

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$$

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$$

$$(-\infty,a)=\{x|x<a\}$$

$$(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbb{R}\}$$

实数与数轴上的点有对应关系,因此区间就可以表示为数轴上的点集,也就是数轴上的线段或者射线,比如(a,b)、$[a,b)$、$[a,+\infty)$和$(-\infty,a)$在数轴上的表示如图 1-1～图 1-4 所示.

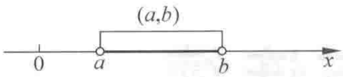

图 1-1

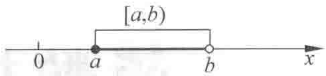

图 1-2

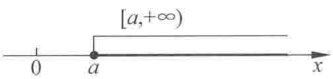

图 1-3

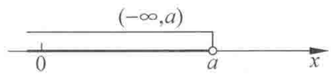

图 1-4

在微积分的问题中经常用到一个涉及区间的概念是邻域,下面就有关邻域方面的内容进行介绍.

定义 1.1.2 设 a 是任意实数,δ 是一个任意的正实数,则称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的**δ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即有

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$$

点 a 称为这个**邻域的中心**,δ 称为这个**邻域的半径**.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$,而 $|x-a|$ 在数轴上表示的是点 a 与点 x 之间的距离,因此 $U(a,\delta)$在数轴上表示到点 a 的距离小于 δ 的所有点的集合,如图 1-5 所示.

有时候在使用邻域时不需要邻域的中心,去掉中心的邻域称为**去心邻域**,记作$\mathring{U}(a,\delta)$,即有

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

去心邻域在数轴上的表示见图 1-6.

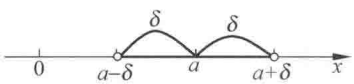

图 1-5

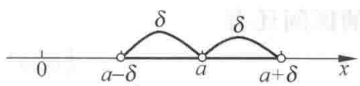

图 1-6

为了方便,有时把开区间$(a-\delta,a)$称为点 a 的左 δ 邻域,把开区间$(a,a+\delta)$称为点 a 的右 δ 邻域.

1.1.2 函数概念

在许多实际问题的处理过程中,往往涉及多个变量,这些变量不仅相互联系,而且还遵循一定的变化规律,函数就是描述变量之间相互联系的一个法则,这里仅就两个变量的情形进行讨论(更多个变量的情形将在多元函数中讨论).

例 1.1.1　假设某产品的单位变动成本为 10 元，固定成本为 10 000 元，则该产品的产量 x 与总成本 C 的关系为

$$C = 10\,000 + 10x, \quad x \in \{1,2,3,\cdots\}$$

例 1.1.2　在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 $t=0$，落地的时刻 $t=T$，则变量 s 与变量 t 之间的关系有

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad t \in [0,T]$$

其中 g 是重力加速度.

从上面两个例题可以看出，在变化过程中都涉及两个变量，并且一个变量(产量、时间)在其取值范围内任意一个值，按照相应的规律确定出另一个变量的一个对应值(总成本、距离)，我们抛开具体的内容，可以抽象出一般的函数定义.

定义 1.1.3　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，对于 D 中的任意一个 x，如果按照某一确定的对应法则 f，都能唯一地确定一个实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在数集 D 上的**函数**，记作

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为函数的**自变量**，y 称为函数的**因变量**，数集 D 称为函数的**定义域**，记作 D_f.

对于某一个数 $x_0 \in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0(记作 $f(x_0)$)与之对应，称 $f(x_0)$为函数在点 x_0 处的**函数值**，当自变量 x 取遍 D 的所有值时，对应的函数值 $f(x)$的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(\mathrm{D})$，即有

$$R_f = f(\mathrm{D}) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

根据定义 1.1.3 可知，一个函数唯一决定于其定义域和对应法则，只要这两个因素相同，那么它们就是同一个函数，比如函数 $y=x^2, x\in\mathbb{R}$ 与函数 $s=t^2, t\in\mathbb{R}$，虽然变量不同，但是它们的对应法则和定义域是一样的，因此这两个函数实际上是同一个函数.

例 1.1.3　判断函数 $y=x$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是否是同一函数.

解　函数 $y=x$ 和函数 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是全体实数，但是当 $x<0$ 时，两个函数的对应法则不同，因此函数 $y=x$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 不是同一函数.

例 1.1.4　判断函数 $y=x$ 与函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否是同一函数.

解　函数 $y=x$ 与函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的对应法则是相同的，即对于任意的自变量，因变量与自变量一致，但这两个函数的定义域不同，函数 $y=x$ 的定义域是全体实数，而函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是非零实数，因此函数 $y=x$ 与函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 不是同一函数.

关于函数的定义域，如果是实际问题，则按实际问题对于自变量的要求进行界定，当然

如果讨论的是纯数学的问题,则是指使得函数表达式有意义的实数集,这种函数的定义域也称为函数的自然定义域.

例 1.1.5 已知 $f(2x)=\dfrac{3}{\sqrt{x^2-1}}$,求函数 $f(x)$及其定义域.

解 因为 $f(2x)=\dfrac{3}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{6}{\sqrt{(2x)^2-4}}$,所以 $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt{x^2-4}}$.

由于要使 $f(x)$有意义,必须满足 $x^2-4>0$,即

$$x>2 \text{ 或 } x<-2$$

所以函数 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

例 1.1.6 求函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\lg(9-3x)$的定义域.

解 由于函数表达式是由两部分组成,因此要使表达式有意义,必须是两个部分都有意义,为此,x 必须满足

$$\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant 0,\\ 9-3x>0,\end{cases}\qquad \text{即}\begin{cases}x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant 1,\\ x<3,\end{cases}$$

所以函数的定义域 $D=(-\infty,1]\cup[2,3)$.

函数的表示方法一般有列表法、图像法和解析法,当然使用比较多的还是解析法.

列表法是将自变量的值与对应的函数值用表格的形式列示的方法;**图像法**是在坐标系中用图形来表示函数关系的方法;而**解析法**则是用数学表达式来表示自变量与因变量关系的方法. 根据函数表达式的形式不同,函数又分为显函数、隐函数和分段函数三种.

显函数是指函数 y 由 x 的解析表达式直接表示的函数,如 $y=x^3+5$.

隐函数是指函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定的函数,例如 $\ln xy=\sin(x-y)$.

分段函数是指在函数定义域的不同范围内有不同的解析式的函数,比如以下是几个比较典型的分段函数.

例 1.1.7 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,其图形如图 1-7 所示.

例 1.1.8 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,其图形如图 1-8 所示.

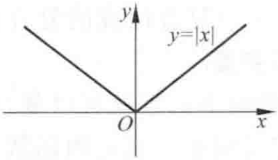

图　1-7

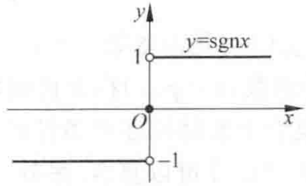

图　1-8

1.1.3　反函数与复合函数

在一个函数中的两个变量通过对应法则联系起来，但到底哪一个变量是自变量则要根据具体问题来确定.

比如某种商品的单价是 p，销售量是 q，销售收入 R 是销售量 q 的函数：$R=pq$，这里 q 是自变量，R 是因变量.

反过来，如果销售收入 R 已知，需要求销售量 q，则有函数 $q=\dfrac{R}{p}$，此时，R 是自变量，q 为因变量.

上述两个函数虽然都是关于销售量与销售收入之间的关系函数，但由于对应法则不同，因此是两个不同的函数，常称它们互为反函数.

定义 1.1.4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R，如果对于任意一个 R 中的 y，按照某一对应法则 f^{-1}，在 D 中总有一个确定的 x 与之对应，并且满足 $y=f(x)$，则称变量 x 是关于变量 y 的函数，记作

$$x=f^{-1}(y),y\in R$$

此时称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，一般称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

根据前面函数的定义可知，一个函数唯一决定于对应法则和定义域，与自变量无关，而一般函数的自变量习惯用 x，因此上述反函数一般表示成如下形式：

$$y=f^{-1}(x),x\in R$$

显然，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是 R，值域是 D，是与其直接函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域反过来的. 同时，在同一坐标平面内，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 1.1.9　求函数 $y=1+\sqrt{e^x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

解　函数 $y=1+\sqrt{e^x-1}$ 的定义域为 $x\geqslant 0$，值域为 $y\geqslant 1$，由 $y=1+\sqrt{e^x-1}$ 得

$$x=\ln(y^2-2y+2)$$

互换 x,y，得函数 $y=1+\sqrt{e^x-1}$ 的反函数

$$y=\ln(x^2-2x+2),x\in[1,+\infty)$$

定义 1.1.5　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，若有

$$D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$$

则称函数 $y=f[\varphi(x)]$是由函数 $y=f(u)$和函数 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,其中函数 $y=f(u)$称为外函数,$u=\varphi(x)$称为**内函数**,u 称为**中间变量**.

在函数的复合上要特别注意条件的判断,不是任意两个函数就可以复合成一个复合函数,只有 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$才可以复合.另外,复合函数的定义域不一定是内函数的定义域,复合函数的定义域应该是使得内函数 $u=\varphi(x)$的函数值包含在外函数的定义域 D_f 中的 x 的集合,即是$\{x \mid u(x) \in D_f\}$,因此,复合函数的定义域为内函数的定义域或是内函数定义域的一部分.

例 1.1.10 讨论函数 $y=f(u)=\sqrt{u+1}$与函数 $u=g(x)=\ln x$ 是否能够复合成复合函数,若能够,求出复合函数及其定义域.

解 外函数 $y=\sqrt{u+1}$ 的定义域 $D_f=\{u \mid u \geqslant -1\}$,内函数的值域 $R(g)=\{u \mid -\infty<u<+\infty\}$.

由于 $D_f \cap R_g=\{u \mid u \geqslant -1\} \neq \varnothing$,所以函数 $y=\sqrt{u+1}$与 $u=\ln x$ 可以复合成复合函数,复合函数的表达式为

$$y=\sqrt{\ln x+1}$$

复合函数的定义域为$\{x \mid \ln x \geqslant -1\}$,即是$\{x \mid x \geqslant e^{-1}\}$.

1.1.4 初等函数

在初等数学中已经学习过下面几类函数:

幂函数:$y=x^\mu$($\mu \in \mathbb{R}$ 是常数);

指数函数:$y=a^x$($a>0$ 且 $a \neq 1$);

对数函数:$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a \neq 1$,特别当 $a=e$ 时,记为 $y=\ln x$);

三角函数:如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 等;

反三角函数:如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等.

以上这五类函数统称为**基本初等函数**.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.比如

$$y=\sqrt{1-x^2}, y=\sin^5 x, y=\ln(x^4-2x+3)$$

等都是初等函数,本教材所涉及的函数绝大多数都是初等函数,但前面例题中介绍的符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 则不是初等函数.

在初等函数中还要注意,幂指函数是初等函数.

所谓幂指函数是指形如 $y=[f(x)]^{g(x)}$ 的函数,因为这类函数可以看成基本初等函数的复合,比如 $y=x^x$.

由于 $y=x^x=e^{x\ln x}$,所以 $y=x^x$ 就可以由 $y=e^u$ 和 $u=x\ln x$ 复合而成.

1.1.5　函数的几种特性

任何一个给定的函数，都有各种各样的性质，通过研究函数的相关特性就可以了解函数中的变量与变量之间的变化规律，这里主要介绍函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.

定义 1.1.6　设函数 $f(x)$的定义域为 D，若存在一个正数 M，使得对任意一个 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$为有界函数，正数 M 是函数 $f(x)$的一个界.

如果找不出符合上述定义的正数 M，则称函数 $f(x)$为无界函数.

例如，函数 $y=\sin x$ 是有界函数，因为对于任意实数 x，总有$|\sin x|\leqslant 1$. 而函数 $y=\tan x$ 在其定义域内则是无界函数.

定义 1.1.7　设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调递增函数**；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调递减函数**.

单调递增函数与单调递减函数统称为**单调函数**，使函数有单调性的区间称为函数的**单调区间**.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增的，在$(-\infty,0]$上是单调递减的，在$(-\infty,+\infty)$内是不单调的(见图 1-9)；而函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调递增的(见图 1-10).

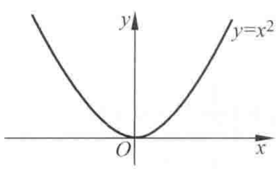

图　1-9

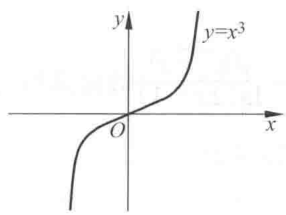

图　1-10

定义 1.1.8　设函数 $f(x)$的定义域 D 关于坐标原点对称，如果对于任意一个 $x\in D$，总有

$$f(-x)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$为偶函数；如果对于任意一个 $x\in D$，总有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

如果函数 $f(x)$ 是偶函数,则函数图像是关于 y 轴对称的；如果函数 $f(x)$ 是奇函数,则函数图像是关于坐标原点对称的.

例 1.1.11 判断函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$,所以函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 为奇函数.

定义 1.1.9 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在常数 $T>0$,使得对任意一个 $x\in D$,有 $(x\pm T)\in D$,且有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数,T 为函数 $f(x)$ 的周期,通常说周期函数的周期是指最小正周期.

例如函数 $\sin x,\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,$\tan x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

当然不是每个周期函数都有最小正周期. 比如

例 1.1.12 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ 0, x\in Q^C\end{cases}$$

容易验证这个函数是一个周期函数,任何正有理数 r 都是它的周期,因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

若函数是周期函数,在研究其性质时,只需研究其一个周期内的性质就可以了,因为其他周期内的性质与研究的这个周期一致.

习题 1.1

1. 选择题

(1) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$ 的定义域为(　　).

(A) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$　　(B) $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{2}<x<1\right\}$

(C) $\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$　　(D) $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{2}<x\leqslant 2, x\neq 1\right\}$

(2) 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2,2]$,则 $f(1-x)+f(1+x)$ 的定义域是(　　).

(A) $[-3,3]$　(B) $[-1,1]$　(C) $[-3,1]$　(D) $[-1,3]$

(3) 函数 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 的值域是(　　).

(A) $(-1,1]$　(B) $[-1,1]$　(C) $[-1,1)$　(D) $[0,1]$

(4) 已知 $f(x-1)=x^2-1$,则 $f(x)=$(　　).