填数有方

TIANSHUYOUFANG

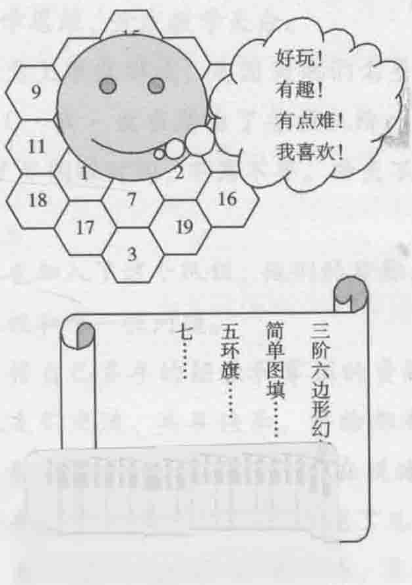
◎ 何升康　编著

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

遵守游戏规则，探索数学奥秘
本书献给爱动脑筋的人

填数有方

何升康　编著



中南大學出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

填数有方/何升康编著. —长沙:中南大学出版社,2014.9
ISBN 978-7-5487-1188-9

Ⅰ.填...　Ⅱ.何...　Ⅲ.智力游戏　Ⅳ.G898.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 217947 号

填数有方

何升康　编著

□责任编辑　刘颖维
□责任印制　易建国
□出版发行　中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　邮编:410083
发行科电话:0731-88876770　传真:0731-88710482
□印　　装　长沙印通印刷有限公司

□开　　本　880×1230　1/32　□印张 4.25　□字数 104 千字
□版　　次　2014 年 9 月第 1 版　□2014 年 9 月第 1 次印刷
□书　　号　ISBN 978-7-5487-1188-9
□定　　价　16.00 元

前言

填数游戏是一项很好的智力游戏，它具有悠久的历史和广泛的适应性。它不分国度、不分人群，一种好的填数游戏一旦问世，就被迅速疯传到世界各地。中国古代的幻方游戏和当今的数独游戏就是两个很好的例子。

现在，一些奥赛培训教材就收录了填数游戏的内容，说明了填数游戏有益于开发少年儿童智力。让儿童在数学王国里获得趣味知识、锻炼数学思维、开发数学天分。

一些老年人爱上填数游戏，是因为他们需要让大脑动起来，防止大脑退化。C·W·亚当斯为了寻找三阶六边形幻方的解，竟然愿意花上47年闲暇时间，不离不弃。功夫不负有心人，他的目标终于实现了。

一些数学家也加入了这个队伍，他们的目标是要解决某些填数问题解的存在性和唯一性问题。

笔者萌发了将自己多年的经验和掌握的资料整理成册的想法，以便于与玩友们交流、共享快乐。事物都有其内在的规律性，笔者试图探索同一类型填数问题的内在规律。掌握了规律，问题就解决了一半。本书通过大量实例讲述了几类填数问题的求解方法。希望读者通过这些实例的实践体验，在以后遇到此类填数问题时，能够有所帮助。

本书共5章。第1章预备知识，介绍了3个初等数学问题的

基本知识，包括3个数列求和公式、排列与组合以及图论小词典。

第2章讲述一般几何图形的填数方法，包括圆、三角形、多边形、立方体及多个图形的组合图。

第3章用3个实例，讲述简单图填数问题的求解方法。这是一种结构性方法，只要按照讲述的方法做，这类填数问题就能顺利解决。

第4章用实例讲述了树形图填数的思路。

第5章系统讲述了正方形幻方、三阶六边形幻方和数独问题的求解方法。

对于比较复杂的填数问题，还是需要一些知识、经验和灵感的。知识是指初等数学方面的知识。对这些知识不熟悉的读者可以参考本书第一章的预备知识。灵感就是一个“巧”字，就是熟能生巧，突发奇想。

在本书末尾，列出了一个参考书目，这些书对笔者都有启发和帮助，在此，对书的作者们表示衷心的感谢。对参考书目中遗漏的部分表示歉意。

最后，谢谢我的家人对我的支持。

何升康

2014年6月

目录

第1章 预备知识

第2章 几何图形填数

第 1 章　预备知识

本章介绍几个初等数学方面的知识，包括 3 个数列求和公式、排列与组合和图论方面的知识，它们是在后面几章讨论填数方法时要用到的基础知识。熟悉这些内容的读者可以跳过本章的内容，直接阅读后面各章的内容。

1.1　3 个数列求和公式

1.1.1　自然数数列求和公式

先来解释几个名词。

自然数，也叫正整数，就是 1，2，3，4，5，…。

数列，是依照某一法则，依次序排列，使得对应于任何一个正整数 n，有一个确定的数 x_n，那么，这列有次序的数 x_1，x_2，x_3，…，x_n，…就称为数列。数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的通项。下面举几个数列的例子。

自然数数列：1，2，3，…，n，…，通项为 n。

奇数数列：1，3，5，…，$(2n-1)$，…，通项为 $2n-1$。

偶数数列：2，4，6，…，$2n$，…，通项为 $2n$。

公式，是用数学符号表示几个量之间的关系的式子，具有普遍性，适用于同类关系的所有问题。例如，设二数之和为 S，二数之差为 d，求二数的公式是：

$$大数=\frac{S+d}{2}$$

$$小数=\frac{S-d}{2}$$

公式是解决数学问题的重要工具。现在正整数的加、减、乘、除运算对于小学生来说是没有困难的。但是，要解决某些较复杂的计算问题，掌握相关问题的计算公式是很重要的。有一位小学老师在课堂上给学生出了一道连算题，要求学生计算：$1+2+3+\cdots+100=?$老师心想："现在让他们慢慢算吧，我可以休息一下了！"当同学们都在埋头计算时，一名同学喊道："老师，我算出来了。"老师很吃惊，怎么算得这么快！这名同学使用的方法是：把上述算式改写成 50 个结果都是 101 的加法（$1+100$，$2+99$，$3+98$，…），最终结果是：5050。这名同学就是被称为"数学王子"的德国数学家高斯（约翰·卡尔·弗里德里希·高斯），当时高斯才 10 岁。他的计算方法写成公式就是：

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (1-1)$$

式中：Σ——一个希腊字母，意思是求和；

n——一个任意指定的正整数；

$\sum\limits_{i=1}^{n} i$——从 1 加到 n。

套用这个公式，上面的那道计算题（$n=100$）就可以表示为：

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+100&=\sum_{i=1}^{100} i=\frac{100(100+1)}{2}\\&=50\times 101\\&=5050\end{aligned}$$

有了这个公式，不管上面那样的连算式有多长，只要进行三次运算（一次加法、一次乘法、一次除法），都能迅速算出结果。

1.1.2 偶数数列的求和公式

$$2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k=n(n+1) \quad (1-2)$$

它可以从公式(1－1)推导出来。推导方法如下：

$$\begin{aligned}2+4+6+\cdots+2n&=2(1+2+3+\cdots+n)\\&=2\sum_{i=1}^{n}i=2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\\&=n(n+1)\end{aligned}$$

1.1.3 奇数数列的求和公式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

它可以从公式(1－2)推导出来。推导方法如下：

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2n-1)\\&=(2-1)+(4-1)+(6-1)+\cdots+(2n-1)\\&=2+4+6+\cdots+2n-n\\&=n(n+1)-n\\&=n^2+n-n\\&=n^2\end{aligned}$$

1.2 排列与组合

1.2.1 排列

从 m 个不同的元素中，每次取出 $n(n\leqslant m)$ 个不同的元素按一定的顺序排成一列，称为 n 排列。当 $n<m$ 时，称为选排列，记作 P_m^n 或 A_m^n；当 $n=m$ 时，称为全排列，简称排列，记作 P_n^n 或 A_n^n。

排列数的计算公式：

$$P_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\,(1 \leqslant n \leqslant m)$$

规定 $P_m^n = 1$。

$$P_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

P_n^n 记作 $n!$，读作“n 的阶乘”。规定 $0! = 1$。

1.2.2 组合

从 m 个不同的元素中，每次取出 $n(n \leqslant m)$ 个不同的元素，不管其顺序，合并成一组，称为 n 组合，简称组合，记作$\binom{n}{m}$或 C_m^n。

组合数的计算公式：

$$C_m^n = \frac{P_m^n}{n!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

应用举例

例 1 从 A，B，C，D 这 4 个大写字母中取 3 个排列。它的排列数为：

$$P_4^3 = 4(4-1)(4-2) = 24$$

这 24 个排列是：ABC，ACB，ABD，ADB，ACD，ADC，BCD，BDC，BAC，BCA，BAD，BDA，CAD，CDA，CAB，CBA，CBD，CDB，DAB，DBA，DAC，DCA，DBC，DCB。

例 2 从 A，B，C，D 这 4 个大写字母中取 3 个组合。它的组合数为：

$$C_4^3 = \frac{P_4^3}{3!} = \frac{4(4-1)(4-2)}{3(3-1)(3-2)} = \frac{24}{6} = 4$$

这 4 个组合是：ABC，ABD，ACD，BCD。

例 3 列出从 1，2，3，4，5，6，7，8 这 8 个自然数（记为 N_8）中取 3 个数，其和等于 10 的所有组合。

从 N_8 中每次取出 3 个数的组合数为

$$C_8^3=\frac{P_8^3}{3!}=\frac{8(8-1)(8-2)}{3(3-1)(3-2)}=56(\text{种})$$

但 3 数之和等于 10 的组合只有如下 4 种：1，2，7；1，3，6；1，4，5；2，3，5。

为方便起见，在本书中，我们用表格的形式给出这些组合，如表 1－1 所示。

表 1－1 从 N_8 中取 3 个数其和等于 10 的所有组合

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	组和
1	1	2					7		10
2	1		3			6			10
3	1			4	5				10
4		2	3		5				10

1.3 图论小词典

图论是什么？它是干什么的？对于许多人来说，可能并不了解。在填数游戏中，我们用到的图论知识并不多，主要是涉及一些名词。所以，在这一节我们就来介绍图论的一些名词。

【图】 在中学的《几何学》课本上，点被定义为是没有长度、没有宽度、没有厚度的图形。线被定义为是点任意移动的图形，可以是直线，可以是曲线。在图论里，把点称为**顶点**，把两顶点之间的连线称为**边**，由若干个不同的顶点 V_1，V_2，…，V_n 与连接其中某些顶点的边 e_1，e_2，…，e_m 所组成的图形就称为**图**。一个有 n 个顶点、m 条边的图常记为 $(n,\ m)$ 图或称 n 阶图。

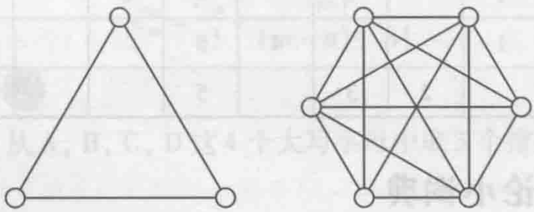
通常，图用 G 表示，记为 $G=(V,\ E)$。顶点的集合，记为 $V(G)=\{V_i\}$，边的集合记为 $E(G)=\{e_k\}$。在图中，我们关注的

只是顶点与边的多少以及这些边连接哪些顶点，而与顶点的位置以及边的形状不是我们关注的内容。

【简单图】 设 a，b 是两个顶点，e 是连接 a，b 的边，记 $e=(a,\ b)$，称顶点 a，b 是边 e 的端点，称边 e 关联于顶点 a 和 b，并称 a，b 是邻接的。如果一条边的两个端点重合，称为**自回路**或**自环**。两顶点间若有 $n(n>1)$ 条边，则称这些边为**平行边**。不含平行边和自回路的图称为**简单图**。

【完全图】 如果 G 是一个简单图，并且每两个顶点之间都有一条边关联，我们就称 G 为**完全图**。

图 1－1(a)是 3 阶完全图，图 1－1(b)是 6 阶完全图。



(a) 3阶完全图　　(b) 6阶完全图

图 1－1　完全图

如果两个图 G、G' 的顶点个数相同，且两个图的各顶点之间存在一一对应关系，而且这种对应关系保持了顶点间的邻接关系，则称这两个图是**同构**的。

在图 1－2 中，图 1－2(a)和图 1－2(b)是同构的。

可以把一个图变换成同构的另一个图，这样的变换称为**拓扑变换**。

图 G 中与某个顶点 V 相关联的边数称为该顶点的**度数**，记为 $d(V)$。

度数为 0 的顶点称为**孤立点**。

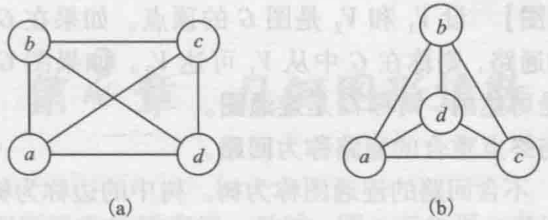


图1-2 同构图

顶点都是孤立点的图称为零图。

【补图】 设 G 是 n 阶简单图，在 G 中添加一些边后，可使 G 成为 n 阶完全图，由这些添加边和 n 个顶点构成的图称为图 G 的补图，记为 $\overline{G}$。

图1-3(a)和图1-3(b)互为补图。

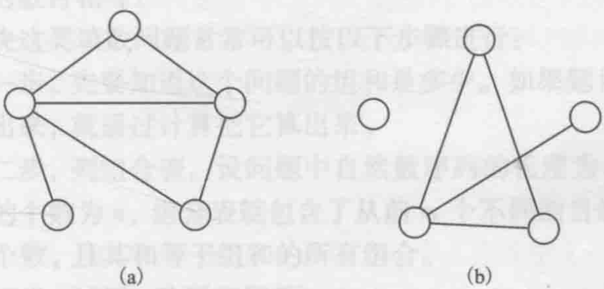


图1-3 补图

【通路】 设 n 为正整数，V_0，V_1，…，V_n 是图 G 的顶点，e_1，e_2，…，e_n 是图 G 的边，并且 V_{i-1} 和 V_i 分别是 e_i 的起点和终点（$i=1, 2, \cdots, n$），则称序列 $V_0e_1V_1e_2$，…，$V_{n-1}e_nV_n$ 为图 G 中从 V_0 至 V_n 的通路，n 称为该通路的长度。如果 $V_0=V_n$，则称该通

路为闭的，否则称为开的。

【**连通图**】 设 V_1 和 V_2 是图 G 的顶点。如果在 G 中存在从 V_1 至 V_2 的通路，则称在 G 中从 V_1 可达 V_2。如果图 G 的任意两个顶点都是可达的，则称 G 是**连通图**。

起点与终点重合的通路称为**回路**。

【**树**】 不含回路的连通图称为**树**。树中的边称为**树枝**。树中度数为 1 的顶点称为**树叶**，度数大于 1 的顶点称为**枝点**。通常，树用 T 表示。显然，若树 T 有 n 个顶点和 m 条边，则 $m=n-1$。

填数有方

第2章　几何图形填数

几何图形通常包括直线、弧线、圆、三角形、多边形、立方体，以及这些图形的组合。在几何图形上，有若干个点（设为 m 个点），用小圆圈表示，以便于填数。根据图形的特点，这些点又被分成若干个组。每个组的点数可以相同，也可以不同。并且每一个点可以同时出现在一个组或几个组里，出现次数不限。填数游戏要求玩家把自然数序列的前 m 个数（本书中用符号 N_m 表示自然数序列中的前 m 个数），填到图的空白点处，并使每组点上的数之和（称为**组和**）相等。在这里，自然数序列的长度和几何图形上点的数目相等。

解决这类填数问题常常可以按以下步骤进行：

第一步，先要知道这个问题的组和是多少。如果题目中没有明确给出来，就通过计算把它算出来。

第二步，列组合表。设问题中自然数序列的长度为 m，一个组中数的个数为 n，组合表就包含了从前 m 个不同的自然数中每次取 n 个数，且其和等于组和的所有组合。

第三步，试填、验证和调整。

如果问题中每个点在图上都只出现在一个组中，那么，组和就是将前 m 个自然数之和（ $\sum_{i=}^{m} i$ ）按组数分配的平均值。如果某些点在图上出现多次，则要先确定出现次数多的那些点的填数。

2.1 两圆图(一)

如图2-1所示，有两个同心圆和过圆心的两条直线相交，在每个圆的圆周上有4个交点，共计8个交点(记为A，B，C，D，E，F，G，H)。游戏要求：将1~8这8个自然数填在8个交点处，并使每个圆和每条直线上的4个数之和相等。

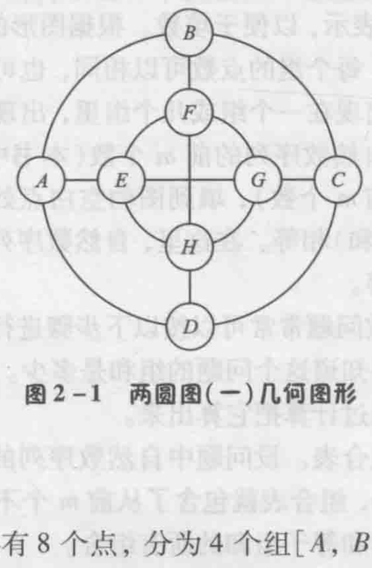


图2-1 两圆图(一)几何图形

问题求解：

图2-1中共有8个点，分为4个组[A，B，C，D]，[E，F，G，H]，[A，E，G，C]，[B，F，H，D]，两个圆和两条直线上各出现4个点，每个点出现2次。

第一步，我们先求出这个问题的组和。

$$组和 = (2\sum_{i=1}^{8} i)/4 = \frac{72}{4} = 18$$

第二步，列出从前8个自然数中取4个数，且其和等于18的组合表，如表2-1所示。