华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

56

Algebraic Combinatorics

Walks, Trees, Tableaux, and More

代数组合论

游动、树、表及其他

[美] 理查德 P. 斯坦利 (Richard P. Stanley) 著
辛国策 周岳 译

机械工业出版社
China Machine Press

华 章 数 学 译 丛

56

Algebraic Combinatorics

Walks, Trees, Tableaux, and More

代数组合论

游动、树、表及其他

[美] 理查德 P. 斯坦利 著
(Richard P. Stanley)

辛国策 周岳 译

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

代数组合论：游动、树、表及其他 /（美）斯坦利（Stanley, R. P.）著；辛国策，周岳译．—北京：机械工业出版社，2015.5

（华章数学译丛）

书名原文：Algebraic Combinatorics

ISBN 978-7-111-49782-0

I. 代… II. ①斯… ②辛… ③周… III. 代数 – 研究 IV. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 061625 号

本书版权登记号：图字：01-2013-7857

Translation from English language edition: Algebraic Combinatorics (978-1-4614-6997-1) by Richard P. Stanley

本书内容涉及图中的游动、Radon 变换、矩阵树定理、Sperner 性质、欧拉有向图、杨表、定向树等．全书共 12 章，每一章都论述了组合数学领域里一个经典且有趣的主题，并且简要介绍了所述问题产生的历史背景、相关故事以及现有的应用领域．章末精选了练习题，指出了相关问题进一步的发展方向，书后还附有部分练习题的解答提示．书中还有 3 个章附录，介绍与各章内容相关的组合学的纯粹计数部分，即 RSK 算法、平面分拆、标号树的计数.

本书可作为高年级本科生一学期的“代数组合学”、“计数组合学”或“图论”的教材.

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）

责任编辑：明永玲　　责任校对：殷 虹

印 刷：北京市荣盛彩色印刷有限公司　　版 次：2015 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

开 本：186mm × 240mm 1/16　　印 张：13

书 号：ISBN 978-7-111-49782-0　　定 价：49.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：（010）88378991 88361066　　投稿热线：（010）88379604

购书热线：（010）68326294 88379649 68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

中文版序

I am very happy that my book *Algebraic Combinatorics* has been translated into Chinese. Now many of the pleasures of algebraic combinatorics will be more accessible to Chinese students. I hope that they will enjoy learning from this book and will be inspired to continue further in this area. I am grateful to Guoce Xin and Yue Zhou for the hard work that they did in creating this translation. (很高兴《代数组合论》一书翻译为中文. 现在中国学生可以更方便地了解代数组合中的许多有趣内容. 我希望他们喜欢学习这本书, 得到启发并深入这个领域. 在此感谢辛国策和周岳在翻译此书过程中所做的大量工作.)

Richard P. Stanley
2014 年 8 月 31 日
于麻省剑桥

译者序

本书作者 Richard P. Stanley 是美国国家科学院院士和美国艺术与科学院院士, 2006 年国际数学家大会一小时报告人, 是国际组合数学界的领袖人物之一, 现任美国麻省理工学院教授, 南开大学名誉教授. Stanley 教授所获奖项主要有 George Pólya 奖、Leroy P. Steele 奖、Rolf Schock 奖、Stanley 教授的论著简明深刻, 他所著的几本研究生教材已经成为国内外组合数学专业研究生必读的经典范本.

本书是美国高年级本科生教材, 是代数组合领域中目前唯一的本科生教材. 作者以广博的组合数学和代数知识, 将代数学中一些简单和基本的工具巧妙地应用到组合数学中, 从而极大地激发学生应用代数工具以及探索组合数学相关问题的兴趣. 本书主要内容包括图中的游动, 立方体, Randon 变换, 偏序集的 Sperner 性质, 杨表, 矩阵树定理以及组合数学中的一些"珍宝". 该书每一章都论述了组合数学领域里一个经典且有趣的课题, 各章大多比较简短且相对独立. 每一章的最后都简要阐明了所述问题产生的历史背景、相关故事以及现有的应用领域, 并附上了参考文献. 最后精选的练习指出了相关问题进一步的发展方向. 这一切都会让刚掌握代数知识的学生感受到代数工具的强大力量和组合问题的迷人魅力, 读完每一章时都会感觉意犹未尽, 正如 Stanley 教授所说, 本书每一部分所阐述的内容都可以提供一扇通往更深奥的代数组合世界的大门. 学完本书后读者将会有强大的动力和信心在其最感兴趣的几个方面深入了解和探索下去.

两位译者都是以组合数学为主要研究方向, 对于能够翻译 Stanley 教授的教材深感荣幸. 就国内的实际情况而言, 本书最好用做研究生的教材. 对学习过线性代数的本科生来说, 本书可以看作是线性代数在组合学中的应用.

感谢 Stanley 教授及时和耐心地回复了我们的疑问. 感谢明永玲编辑对本书的排版和校对所做出的努力. 最后感谢国家自然科学基金 (No. 11171231, 11101435) 对本书出版的资助。

对 Stanley 教授挂在网上的截止到 2014 年 6 月 11 日的勘误, 本译文都做了相应的修改. 由于译者水平有限, 文中错误和疏漏在所难免, 敬请读者和同行不吝指正.

辛国策　周岳

2014 年 8 月 27 日

前言

本书主要是为美国本科生设计的关于代数组合学课程的一学期用教材. 本书的主要预备知识是域上的基础线性代数知识 (特征值、特征向量等)、有限域的存在性和群论的初等知识. 一个例外是 12.6 节, 其中涉及有理数域的有限扩张以及一点 Galois 理论. 具备组合数学的初级知识有助于理解本书但不是必需的.

为什么我要写一本关于代数组合学的本科生教材呢? 一个显然的原因是收集一些我认为非常有趣的资料并希望学生们认同. 第二个原因关系到学生, 他们学习了代数学入门课程并且想知道新学的知识可以做什么工作. 要求基本代数知识的本科生课程通常是近世代数或者如代数拓扑和代数几何那样的抽象课程. 代数组合学提供了传统代数主干道上的一条蹊径, 更为直观也更容易理解.

代数组合学是一个庞大的课题, 因此需要一些精心选择才有现在的教材. 一些主要结果 (例如弱 Erdős-Moser 定理和 de Bruijn 序列的计数) 的特色是它们的描述不涉及任何代数. 这样的结果很好地宣传了代数的力量和整个数学的统一性. 除最后一章外所有的内容都与图中的游动以及与之关联的线性变换有着模糊的联系. 最后一章是组合数学中一些不相关联的优美代数应用的大杂烩. 该章中的各小节相互独立, 并独立于本书的其他章节. 书中还有 3 个章附录: RSK 算法, 平面分拆, 标号树的计数. 这些附录侧重于组合计数方面, 并与相应章节内容密切相关. 几乎本书涵盖的所有内容都可以提供一扇通往更深入的代数组合研究课题的大门. 我们希望本书确实达到了此目的, 就是说, 启发读者更深入地挖掘代数和组合之间迷人的相互作用.

很多人对本书的写作有贡献, 但特别感谢 Christine Bessenrodt 和 Sergey Fomin 仔细阅读了前期手稿的部分内容.

Richard P. Stanley
于麻省剑桥

基本记号

$\mathbb{P}$	正整数集
$\mathbb{N}$	非负整数集
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$[n]$	对 $n \in \mathbb{N}$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ (故 $[0] = \emptyset$)
$\mathbb{Z}_n$	模 n 整数群
$R[x]$	环 R 上关于变元 x 的多项式环
Y^X	对集合 X 和 Y, 表示所有函数 $f\colon X \to Y$ 构成的集合
$:=$	定义等于
$\mathbb{F}_q$	q 元有限域
$(\boldsymbol{j})$	$1 + q + q^2 + \cdots + q^{j-1}$
$\#S$ 或 $\lvert S\rvert$	有限集 S 的基数 (元素个数)
$S \dot\cup T$	集合 S 和 T 的无交并, 即 $S \cup T$, 其中 $S \cap T = \emptyset$
2^S	集合 S 的所有子集构成的集合, 又称幂集
$\binom{S}{k}$	S 的 k 元子集构成的集合
$\left(\!\binom{S}{k}\!\right)$	S 上的 k 元重集构成的集合
KS	域 K 上基为 S 的向量空间
B_n	$[n]$ 的所有子集构成的偏序集, 序为包含关系
$\rho(x)$	分次偏序集中元素 x 的秩
$[x^n]F(x)$	多项式或幂级数 $F(x)$ 中 x^n 的系数
$x \lessdot y$, $y \gtrdot x$	在偏序集 P 中 y 覆盖 x
δ_{ij}	Kronecker delta, 在 $i = j$ 时为 1, 其他情况为 0
$\lvert L\rvert$	对非负整数的数组 L, 表示 L 的分量 (元素) 和
$\ell(\lambda)$	分拆 λ 的长度 (分量个数)
$p(n)$	$n \geqslant 0$ 的分拆个数
$\ker \varphi$	线性变换或群同态的核
$\mathfrak{S}_n$	$1, 2, \ldots, n$ 的所有置换构成的对称群
ι	集合 X 的恒等置换, 即 $\iota(x) = x$ 对所有 $x \in X$ 成立

目录

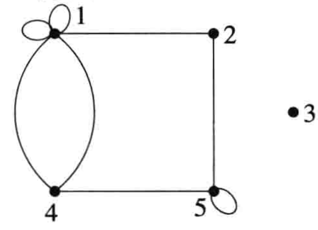
第 1 章　图中的游动

给定有限集 S 及整数 $k \geqslant 0$, 我们用 $\binom{S}{k}$ 表示 S 的 k 元子集所构成的集合. 有些不太正式地, 重集 (multiset) 可视为包含重复元素的集合, 例如 $\{1,1,3,4,4,4,6,6\}$. 我们仅关心每个元素出现的次数, 而不关心这些元素的次序. 因此如 $\{2,1,2,4,1,2\}$ 和 $\{1,1,2,2,2,4\}$ 是同一个重集: 它们都包含了两个 1, 三个 2, 一个 4 (且没有其他元素). 我们称重集 M 是在集合 S 上 (on S) 的, 如果 M 的每个元素都属于 S. 从而上例中的重集是在集合 $S=\{1,3,4,6\}$ 上的或在任何包含 S 的集合上的. 记 $\left(\binom{S}{k}\right)$ 为 S 上所有 k 元重集所构成的集合. 例如, 若 $S=\{1,2,3\}$, 则 (用简化记号)

$$\binom{S}{2}=\{12,13,23\},\quad \left(\binom{S}{2}\right)=\{11,22,33,12,13,23\}.$$

下面定义所谓的图. 直观地说, 图有顶点和边, 其中每条边 "连接" 两个 (允许相同) 顶点. 有可能两条不同的边 e 和 e' 连接相同的两个顶点. 要区分这样的两条边, 我们需要下面更确切的定义. 有限图 (graph) G 由顶点集 (vertex set) $V=\{v_1,\ldots,v_p\}$ 和边集 (edge set) $E=\{e_1,\ldots,e_q\}$, 以及一个函数 $\varphi\colon E\to\left(\binom{V}{2}\right)$ 组成. 约定若 $\varphi(e)=uv$ ($\{u,v\}$ 的简写), 则 e 连接 u 和 v 或等价地 e 与 u 和 v 关联 (incident) . 我们称顶点 u 和 v 是邻接的 (adjacent), 如果至少有一条边与 u 和 v 关联. 如果 $\varphi(e)=vv$, 则称 e 为 v 的自环 (loop). 如果一些边 $e_1,\ldots,e_j$ ($j>1$) 满足 $\varphi(e_1)=\cdots=\varphi(e_j)=uv$, 就说 u 和 v 之间有重边 (multiple edge). 一个没有自环和重边的图称为简单图 (simple graph). 此时可以将 E 看作 $\binom{V}{2}$ 的子集 [为什么].

图 G 的邻接矩阵 (adjacency matrix) 是复数域上的 $p\times p$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(G)$, 其 (i,j)-元 a_{ij} 等于与 v_i 和 v_j 相关联的边的条数. 故 $\boldsymbol{A}$ 是一个实对称矩阵 (从而有实特征值), 其迹为 G 中自环的个数. 例如, 若 G 为图



则

$$A(G)=\begin{bmatrix}2&1&0&2&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&1\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}.$$

图 G 中一个从 u 到 v 的长 (length)为 ℓ 的游动 (walk) 是一个序列

$$v_1,e_1,v_2,e_2,\ldots,v_\ell,\,e_\ell,\,v_{\ell+1},$$

满足:

- v_i 是 G 中的顶点;
- e_j 是 G 中的边;
- 对 $1\leqslant i\leqslant \ell$, 边 e_i 的顶点是 v_i 和 v_{i+1};
- $v_1=u$ 且 $v_{\ell+1}=v$.

1.1 定理　对任意整数 $\ell\geqslant 1$, 矩阵 $A(G)^\ell$ 的 (i,j)-元等于 G 中从 v_i 到 v_j 的长为 ℓ 的游动的条数.

证明　这是矩阵乘法定义的直接推论. 令 $A=(a_{ij})$. $A(G)^\ell$ 的 (i,j)-元由下式给出

$$(A(G)^\ell)_{ij}=\sum a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{\ell-1}j},$$

其中和式遍历所有满足 $1\leqslant i_k\leqslant p$ 的序列 $(i_1,\ldots,i_{\ell-1})$. 但因为 a_{rs} 是 v_r 和 v_s 之间的边数, 所以上面和式中的项 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{\ell-1}j}$ 恰为从 v_i 到 v_j 的具有如下形式的长为 ℓ 的游动的条数 (可能为 0):

$$v_i,e_1,v_{i_1},e_2,\ldots,v_{i_{\ell-1}},e_\ell,v_j$$

(因为有 a_{ii_1} 种方式选择 e_1, $a_{i_1i_2}$ 种方式选择 e_2, 等等.) 从而对所有的 $(i_1,\ldots,i_{\ell-1})$ 求和正好给出了所需的从 v_i 到 v_j 的长为 ℓ 的游动的条数. □

我们希望用定理 1.1 得到 $(A(G)^\ell)_{ij}$ 的具体公式, 即 G 中从 v_i 到 v_j 的长为 ℓ 的游动数. 我们的公式要用到 $A(G)$ 的特征值. $A(G)$ 的特征值也简称为 G 的特征值 (eigenvalue). 回顾一下，一个 $p\times p$ 阶实对称矩阵 M 有 p 个线性无关的实特征向量, 事实上这些向量可以选为标准正交的 (即单位长度的且正交的). 设 M 的实标准正交的特征向量为 $u_1,\ldots,u_p$, 其对应的特征值为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$. 若无特别说明, 所有向量 u 都将视为 $p\times 1$ 列 (column) 向量. 我们用 ^{t} 表示转置, 因此 u^t 是 $1\times p$ 行 (row) 向量. 于是向量 u 和 v 的点积 (或标量积、

内积) 就是 u^tv (正常矩阵乘法). 特别地, $u_i^tu_j=\delta_{ij}$ (Kronecker delta 记号①). 令 $U=(u_{ij})$ 表示以 $u_1,\ldots,u_p$ 为列向量的矩阵, 记为 $U=[u_1,\ldots,u_p]$. 因为 U 是正交矩阵, 所以

$$U^t=U^{-1}=\begin{bmatrix}u_1^t\\ \vdots\\ u_p^t\end{bmatrix}$$

是以 $u_1^t,\ldots,u_p^t$ 为行的矩阵. 由线性代数的理论可知, 矩阵 U 将 M 对角化 (diagonalize) , 即

$$U^{-1}MU=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p),$$

其中 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ 表示依次以 $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ 为对角元的对角矩阵.

1.2 推论　在前面的图 G 中固定两个顶点 v_i 和 v_j. 设邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$. 则存在实数 $c_1,\ldots,c_p$ 使得对任意 $\ell\geqslant 1$ 都有

$$\left(\boldsymbol{A}(G)^\ell\right)_{ij}=c_1\lambda_1^\ell+\cdots+c_p\lambda_p^\ell. \tag{1.1}$$

事实上, 如果 $U=(u_{rs})$ 是满足 $U^{-1}\boldsymbol{A}U=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ 的实正交矩阵, 那么

$$c_k=u_{ik}u_{jk}.$$

证明　我们有 [为什么]

$$U^{-1}\boldsymbol{A}^\ell U=\operatorname{diag}(\lambda_1^\ell,\ldots,\lambda_p^\ell).$$

于是

$$\boldsymbol{A}^\ell=U\cdot\operatorname{diag}(\lambda_1^\ell,\ldots,\lambda_p^\ell)U^{-1}.$$

对等两边的 (i,j)-元 (并用等式 $U^{-1}=U^t$) 可得 [为什么]

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{ij}=\sum_k u_{ik}\lambda_k^\ell u_{jk},$$

得证. □

要应用推论 1.2 我们必须能够计算特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ 以及对角化矩阵 U (或特征向量 u_i). 但在一个有趣的特殊情形下, 我们无需计算 U. 图 G 的一个闭游动 (closed walk) 是一个起点与终点相同的游动. G 中从 v_i 出发的长为 ℓ 的闭游动的条数就是 $(\boldsymbol{A}(G)^\ell)_{ii}$, 因此长为 ℓ 的闭游动的总 (total) 条数 $f_G(\ell)$ 由下式给出

$$f_G(\ell)=\sum_{i=1}^p(\boldsymbol{A}(G)^\ell)_{ii}$$

① δ_{ij} 的值在 $i=j$ 时为 1, 其他情况为 0.——译者注

$$= \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}(G)^{\ell}),$$

其中 tr 表示迹 (即主对角线上元素的和). 回顾一下，一个方阵的迹等于它的特征值的和. 若矩阵 M 有特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, 那么 [为什么] M^ℓ 就有特征值 $\lambda_1^\ell, \ldots, \lambda_p^\ell$. 因此我们证明了如下结果.

1.3 推论　如果 $\boldsymbol{A}(G)$ 有特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, 那么 G 中长为 ℓ 的闭游动的条数为

$$f_G(\ell) = \lambda_1^\ell + \cdots + \lambda_p^\ell.$$

到目前为止, 我们是在应用线性代数的各种方法和窍门来对图中的游动计数. 但有时我们也可以用组合的推理来对图中的游动计数, 而这样的结果可以反过来确定 G 的特征值. 作为第一个简单的例子, 考察完全图 (complete graph) K_p, 其顶点集为 $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$, 且任意两个不同 (distinct) 的顶点之间都有一条边. 于是 K_p 有 p 个顶点, 有 $\binom{p}{2} = \frac{1}{2}p(p-1)$ 条边.

1.4 引理　令 J 表示 $p \times p$ 阶全 1 矩阵. 则 J 的特征值为 p (1 重) 和 0 ($p-1$ 重).

证明　由于所有的行都相等且非零, 秩 $(J) = 1$, 再由秩为 $p-m$ 的 $p \times p$ 矩阵至少有 m 个特征值等于 0, 可以推断 J 至少有 $p-1$ 个特征值等于 0. 因为 $\mathrm{tr}(J) = p$ 而迹是所有特征值的和, 所以 J 的剩余特征值就是 p. □

1.5 命题　完全图 K_p 的特征值有: 重数为 $p-1$ 的特征值 -1, 重数为 1 的特征值 $p-1$.

证明　我们有 $\boldsymbol{A}(K_p) = J - I$, 其中 I 表示 $p \times p$ 单位矩阵. 如果矩阵 M 的特征值为 $\mu_1, \ldots, \mu_p$, 那么 $M + cI$ (c 为常数) 的特征值就是 $\mu_1 + c, \ldots, \mu_p + c$ [为什么]. 由引理 1.4 得证. □

1.6 推论　完全图 K_p 中从顶点 v_i 出发的长为 ℓ 的闭游动的条数是

$$(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell)_{ii} = \frac{1}{p}((p-1)^\ell + (p-1)(-1)^\ell). \tag{1.2}$$

(注意这也是由数 $1, 2, \ldots, p$ 构成的序列 $(i_1, \ldots, i_\ell)$ 的个数, 满足 $i_1 = i$, 任意两个相邻的数都不同, 且 $i_\ell \neq i_1$ [为什么].)

证明　由推论 1.3 和命题 1.5, K_p 中长为 ℓ 的闭游动的总条数为 $(p-1)^\ell + (p-1)(-1)^\ell$. 由图 K_p 的对称性, 从 v_i 出发的长为 ℓ 的闭游动的条数与 i 无关 (所有顶点 “看起来一样”). 因此将闭游动的总条数除以 p (顶点数) 即得所求结果. □

推论 1.6 的组合证明相当巧妙 (练习 1.1). 我们的代数证明则初显代数学在解决计数问题中的威力.

对 K_p 中一般游动应如何处理呢? 不难将矩阵 $\boldsymbol{A}(K_p)$ 具体地对角化 (或等价地, 计算特征向量), 但有一个更简单的特殊论证. 由二项式定理①可得

$$(J-I)^\ell=\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}J^k. \tag{1.3}$$

现在对 $k>0$ 有 $J^k=p^{k-1}J$ [为什么], 而 $J^0=I$. (J^0 的 "正确" 值事先 (priori) 并不清楚, 但为使等式 (1.3) 成立必须取 $J^0=I$.) 因此

$$(J-I)^\ell=\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}p^{k-1}J+(-1)^\ell I.$$

再次应用二项式定理可得

$$(J-I)^\ell=\frac{1}{p}\big((p-1)^\ell-(-1)^\ell\big)J+(-1)^\ell I. \tag{1.4}$$

对 $i\neq j$ 对等两边 (i,j)-元可得

$$\big(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\big)_{ij}=\frac{1}{p}\big((p-1)^\ell-(-1)^\ell\big). \tag{1.5}$$

如果取 (1.4) 的 (i,i)-元就重新得到等式 (1.2). 注意一个有趣的事实: 如果 $i\neq j$ 那么

$$\big(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\big)_{ii}-\big(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\big)_{ij}=(-1)^\ell.$$

我们也可以用推论 1.6来推导 (1.5), 应用

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\big(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\big)_{ij}=p(p-1)^\ell,$$

此即 K_p 中长为 ℓ 的游动的总条数. 细节留给读者完成.

接着我们来说明如何从等式 (1.2) 自身来确定 $\boldsymbol{A}(K_p)$ 的特征值. 因此, 如果我们可以证明 (1.2) 而无需先计算 $\boldsymbol{A}(K_p)$ 的特征值 (恰如在前两段中的做法), 那么就给出了计算特征值的另一种方法. 我们的论证原则上适用于任何图 G, 而不仅仅是 K_p. 先说一个简单的引理.

1.7 引理　设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\ldots,\beta_s$ 是非零复数, 并使得对任意正整数 ℓ 都有

$$\alpha_1^\ell+\cdots+\alpha_r^\ell=\beta_1^\ell+\cdots+\beta_s^\ell. \tag{1.6}$$

则 $r=s$ 且这些 α 恰是这些 β 的重排.

① 这里可以应用二项式定理是因为 I 和 J 可交换 (commute). 一般对没有交换性的 $p\times p$ 矩阵 A 和 B, 我们顶多可以说 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$, 对更高幂次的情形类似.

证明 我们用生成函数 (generating function) 这一强大的工具. 令 x 为一个绝对值 (或模) 接近 0 的复数. 将式 (1.6) 乘以 x^ℓ 并对所有的 $\ell \geqslant 1$ 求和. 所得几何级数必然收敛, 且有

$$\frac{\alpha_1 x}{1-\alpha_1 x}+\cdots+\frac{\alpha_r x}{1-\alpha_r x}=\frac{\beta_1 x}{1-\beta_1 x}+\cdots+\frac{\beta_s x}{1-\beta_s x}. \tag{1.7}$$

这个等式对 (模) 足够小的复数成立. 通分可得一个多项式恒等式. 但如果两个关于 x 的多项式在无限多个点上相等, 那么它们是相同的多项式 [为什么]. 因此式 (1.7) 对所有 (all) 复数 x 成立 (忽略掉那些导致分母为零的 x 的值).

固定一个复数 $\gamma \neq 0$. 将式 (1.7) 乘以 $1-\gamma x$ 并令 $x \to 1/\gamma$. 左边化为等于 γ 的 α_i 的个数, 而右边化为等于 γ 的 β_j 的个数 [为什么]. 于是这两个数对所有 γ 都相等, 引理得证. □

1.8 例 设图 G 有 12 个顶点且 G 中长为 ℓ 的闭游动的条数等于 $3\cdot 5^\ell+4^\ell+2(-2)^\ell+4$. 那么由推论 1.3 和引理 1.7 [为什么] 可知 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值为 5, 5, 5, 4, −2, −2, 1, 1, 1, 1, 0, 0.

第 1 章注记

图的特征值与游动计数之间的联系被认为是“民间传说”. 图谱理论 (spectral graph theory) 研究各种与图相关的矩阵的谱 (特征值所构成的重集), 该课题起始于 1931 年对量子化学的研究. 第一篇数学论文由 L. Collatz 和 U. Sinogowitz 在 1957 年发表. 专著 Cvetković, Doob, and Sachs [22] 提供了很好的一般参考书目[①]. 关于该课题还有两本教材, 一本是 Cvetković, Rowlinson, and Simić [23], 另一本是 Brouwer and Haemers [13].

第 1 章练习

注 对有 (*) 标记的练习的处理请参见书末的“部分练习提示”.

1. (巧题) 给出推论 1.6的组合证明, 即 K_p 中某个顶点到其自身的长为 ℓ 的闭游动的条数是 $\frac{1}{p}((p-1)^\ell+(p-1)(-1)^\ell)$.
2. 假设图 G 有 15 个顶点且对任意 $\ell \geqslant 1$, G 中长为 ℓ 的闭游动的条数是 $8^\ell+2\cdot 3^\ell+3\cdot(-1)^\ell+(-6)^\ell+5$. 记 G' 为在图 G 中每个顶点添加一个自环 (该顶点处已有自环

① 所有引用文献都指向本书末的参考文献.

的除外) 所得到的图. 在图 G' 中有多少条长为 ℓ 的闭游动? (用线性代数的技巧. 也可以试试纯组合的方法.)

3. 具有顶点二部划分 (A, B) 的二部图 G 是一个以 A 和 B 的无交并 $A \dot\cup B$ 为顶点集的图, 满足 G 中每一条边都关联一个 A 中顶点和一个 B 中顶点. 用游动计数的方法来说明 G 中的非零特征值成对 $\pm\lambda$ 出现.

   也可以用矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征多项式 $f(x)$ 来给出一个等价的描述. 回顾 $p \times p$ 矩阵 A 的特征多项式定义为 $\det(A - xI)$. 当前的练习就等价于说, 如果 G 是二部图, 那么 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征多项式 $f(x)$ 可以写为 $g(x^2)$ (若 G 有偶数个顶点) 或 $xg(x^2)$ (若 G 有奇数个顶点), 其中 $g(x)$ 是一个多项式.

   注 有时 $p \times p$ 矩阵 A 的特征多项式定义为 $\det(xI - A) = (-1)^p \det(A - xI)$. 我们采用定义 $\det(A - xI)$, 这使得其在 $x = 0$ 处的值等于 $\det A$.

4. 设 $r, s \geqslant 1$. 完全二部图 K_{rs} 有顶点 $u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s$, 且每个 u_i 和 v_j 之间都有一条边 (故共有 rs 条边).
   (a) 通过纯组合论证, 计算 K_{rs} 中长为 ℓ 的闭游动的条数.
   (b) 利用 (a) 推导 K_{rs} 的特征值.

5. (*) 设 H_n 是从完全二部图 K_{nn} 去掉 n 条顶点无交的边所得的图. 于是 H_n 有 $2n$ 个顶点和 $n(n-1)$ 条边, 每个顶点的度 (所关联的边的条数) 为 $n-1$. 证明 H_n 的特征值为 ± 1 (每个 $n-1$ 重) 和 $\pm(n-1)$ (每个 1 重).

6. 设 $n \geqslant 1$. 完全 p 部图 $K(n, p)$ 有顶点集 $V = V_1 \dot\cup \cdots \dot\cup V_p$ (无交并), 每个 $|V_i| = n$, 且对 $i \neq j$, V_i 中任一顶点与 V_j 中任一顶点都连一条边. (如果 $u, v \in V_i$ 那么没有边 uv.) 因此 $K(1, p)$ 就是完全图 K_p, 而 $K(n, 2)$ 就是完全二部图 K_{nn}.
   (a) (*) 用推论 1.6 计算 $K(n, p)$ 中长为 ℓ 的闭游动的条数.
   (b) 利用 (a) 推导 $K(n, p)$ 的特征值.

7. 设 G 是有限简单图, 有特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. 用 $G(n)$ 表示将 G 中每个顶点 v 替换为 n 个顶点集 V_v 所得的图, 满足若 uv 是 G 的边, 则 V_u 中每个顶点与 V_v 中每个顶点都连一条边 (且没有更多的边). 例如, $K_p(n) = K(n, p)$. 用 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ 表示 $G(n)$ 的特征值.

8. 设 G 是 p 个顶点上的 (有限) 图. 记 G' 为如下所得的图: 在 G 的每个顶点 v 上添加一条与其关联的边 e_v, 而 e_v 的另一个顶点是一个新顶点 v'. 于是 G' 有 p 条新边和 p 个度为 1 的新顶点. 用组合或代数的方法证明: 如果 G 有特征值 λ_i, 那么 G' 有特征值 $(\lambda_i \pm \sqrt{\lambda_i^2 + 4})/2$. (代数证明比组合证明简单得多.)

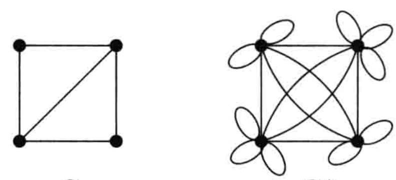
9. 设 G 是 (有限) 图, 它具有顶点 $v_1, \ldots, v_p$ 和特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. 我们知道对任意 i, j 有实数 $c_1(i, j), \ldots, c_p(i, j)$ 使得对所有 $\ell \geqslant 1$,

$$\left(\boldsymbol{A}(G)^{\ell}\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}c_k(i,j)\lambda_k^{\ell}.$$

(a) 证明 $c_k(i,i)\geqslant 0$.

(b) 证明 $i\neq j$ 时可以有 $c_k(i,j)<0$. (最简单的例子就可以证明.)

10. 设 G 是有限图, 它具有特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$. 用 G^* 表示与 G 的顶点集相同的图, 但在顶点 u 和 v (包含 $u=v$) 之间有 $\eta(u,v)$ 条边, 其中 $\eta(u,v)$ 是 G 中从 u 到 v 的长为 2 的游动的条数. 例如,



G　　**G^***

用 G 的特征值表示 G^* 的特征值.

11. (*) 用 K_n^o 表示在 n 个顶点的完全图的每个顶点添加一个自环所得的图. (从而 $\boldsymbol{A}(K_n^o)=J_n$, 就是 $n\times n$ 全 1 矩阵, 并且 K_n^o 有 $\binom{n+1}{2}$ 条边.) 用 $K_n^o-K_m^o$ 表示在 K_n^o 中去掉 K_m^o 的所有边所得的图, 即选 K_n^o 的 m 个顶点, 并去掉这些顶点之间的所有边 (包含自环). (于是 $K_n^o-K_m^o$ 有 $\binom{n+1}{2}-\binom{m+1}{2}$ 条边.) 计算图 $\Gamma=K_{21}^o-K_{18}^o$ 中长为 $\ell\geqslant 1$ 的闭游动的条数 $C(\ell)$.

12. (a) 设 G 是有限图, Δ 为 G 中顶点的最大度. 记邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 的最大特征值为 λ_1. 证明 $\lambda_1\leqslant\Delta$.

(b) (*) 假设 G 是有 q 条边的简单图 (无自环或重边). 证明 $\lambda_1\leqslant\sqrt{2q}$.

13. 设 G 是有至少两个顶点的有限图. 假设对某个 $\ell\geqslant 1$, 任意两顶点 u,v (包含 $u=v$) 之间的长为 ℓ 的游动数都是奇数. 证明存在非空顶点子集 S 使得 S 有偶数个元素, 而且 G 的任意顶点 v 都与 S 中的偶数个顶点相连. (顶点 v 与自己相连当且仅当 v 处有自环.)