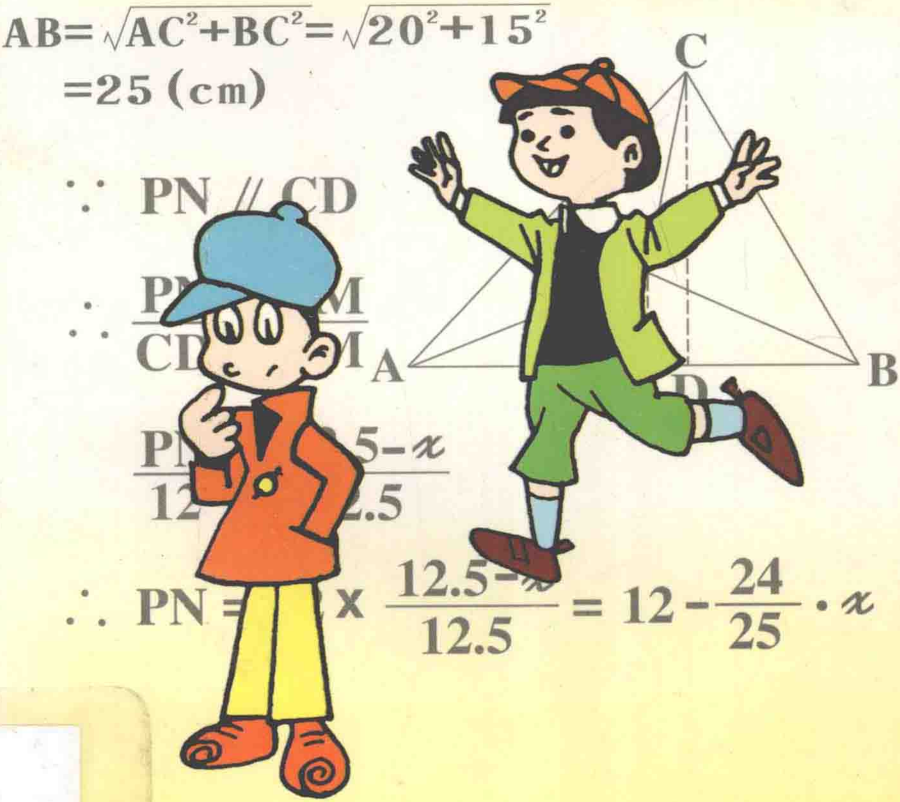
小太阳
学习系列

CHUZHONG
SHUXUE PEIYOU
DIANXING TIKU

初中 数学培优 典型题库

黄东坡　编著



湖北辞书出版社

CHUZHONG SHUXUE
PEIYOU DIANXING TIKU

初中数学培优典型题库

黄东坡 编著

湖北辞书出版社

（鄂）新登字 07 号

图书在版编目（CIP）数据

初中数学培优典型题库 / 黄东坡编著
—武汉：湖北辞书出版社，1996.11（1997 重印）
ISBN7-5403-0213-5
Ⅰ.初…
Ⅱ.黄…
Ⅲ.数学课—中学—竞赛题—教学参考资料
Ⅳ.O.3

初中数学培优典型题库
CHUZHONG SHUXUE PEIYOU DIANXING TIKU

编　　著：©黄东坡
责任编辑：丁　渝
封面设计：王　乔
出版发行：湖北辞书出版社（武汉市东亭路 2 号　430077）
印　　刷：湖北武汉峰迪印务有限责任公司
经　　销：新华书店
开　　本：787×1092　1/32
插　　页：4　　　　印　张：13.25
版　　次：1997 年 1 月第 1 版
印　　次：1997 年 11 月第 2 次印刷
字　　数：258 千字
印　　数：15001-23000 册
ISBN7-5403-0213-5/O•3
定　　价：12.80 元（简精装）

前 言

本书是笔者根据多年从事初中数学竞赛辅导积累的素材，依照《初中数学竞赛大纲修改稿》的精神，把握初中数学竞赛的“大众化、普及型”的新特点，从丰富的初中数学竞赛试题中精选 950 道题，分 62 个专题，潜心编写而成，以满足初中学生拓宽知识、开阔视野、训练思维、培养能力的需要，为指导培优、辅导竞赛的老师提供一份实用的参考资料。

本书具有如下特点：

1. 资料性：本书选题以全国性和省市级初中各级数学竞赛试题为候选集，以代表性、权威性、导向性和实用性为原则，收集了从 1985 年至 1996 年全国初中数学竞赛的一些典型问题，集中反映了初中数学竞赛的重点、主流和趋势。

2. 系统性：本书按照现行义务教材的内容及顺序编写，分为代数、几何、方法原理三大部分，将知识的拓宽加深与解题方法的介绍溶为一体，力求完整性与系统性的有机统一。

3. 实用性：本书对现行初中数学竞赛训练辅导内容作了较为完整的分类。每一类系统地整理了基础知识，介绍一般解题规律，以数学竞赛的主要题型精编了典型问题，并对每一问题作了详细的解答或提示。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免会有疏漏或错误之处，敬请读者批评指正。

黄东坡

1996 年 9 月于武昌水果湖中学

目　录

代数

几何

方法 原理

代 数

1 整数

整数的基本知识主要是以下内容：十进制整数表示法，奇数与偶数，质数与合数，最大公约数与最小公倍数，整除与带余除法，完全平方数等。整数问题题型多样，构思独特，知识面广，解法灵活。丰富的性质与重要的分析方法是解整数问题的基础，细心观察，大胆探索，灵活转化是解整数问题的关键。

一、填空题

1. 把 1111122222 分解成两个连续正整数的积，则较大的一个是________.

2. a、b 为正整数且 56a＋392b 为完全平方数，则 a＋b 的最小值为________.

3. 一个自然数 N 被 10 除余 9，被 9 除余 8，被 8 除余 7，被 7 除 6，被 6 除余 5，被 5 除余 4，被 4 除余 3，被 3 除余 2，被 2 除余 1，则 N 的最小值为________.

4. 在 $1^2,2^2,3^2\cdots,95^2$ 这 95 个数中，十位数字为奇数的数共有________个。

5. 对于一个自然数 n，如果能找到自然数 a 和 b，使得 n＝a＋b＋a×b，则称 n 为一个"好数"，例如 3＝1＋1＋1×1，即 3 是个"好数"，那么，在 1～100 之间的自然数中"好数"共有________个。

二、选择题

1. 任意调换五位数 12345 各数位上数字的位置,所得的五位数中质数的个数是( )

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 0

2. 为了给一本书的各页标上页码,印刷工人用了 3289 个数字,则这本书的页数是( )

(A) 1095 (B) 1096 (C) 1099 (D) 非上述答案

3. 若 n 是大于 1 的整数,则 $p=n+(n^2-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}}$ 的值为( )

(A) 一定是偶数 (B) 一定是奇数

(C) 是偶数但不是 2 (D) 无法确定奇偶性

4. 把一张纸剪成 5 块;从所得纸片中取出若干块,每块剪成 5 块;再从以上所得纸片中取出若干块,每块剪成 5 块;……这样类似的进行,剪完某一次后停止,共得纸片总块数可能是( )

(A) 1990 (B) 1991 (C) 1992 (D) 1993

5. n 是一个两位数,它的数码之和为 a,当 n 分别乘以 3、5、7、9 以后得到 4 个乘积,如果每一个积的数码之和仍为 a,那么这样的两位数 n 有( )

(A) 3 个 (B) 5 个 (C) 7 个 (D)9 个

三、解答题

1. 桌上放有 1993 枚硬币,第一次翻动 1993 枚,第二次翻动其中 1992 枚,第三次翻动其中 1991 枚,……,第 1993 次翻动其中的一枚,按这样的方法翻动硬币,问能否使桌上所有的

1993 枚硬币原来朝下的一面都朝上，说明你的理由。

2. 在黑板上写出下面的数 2,3,4……,1994，甲先擦去其中的一个数，然后乙再擦去一个数，如此轮流下去，若最后剩下的两个数互质，则甲胜；若最后剩下的两个数不互质，则乙胜，你如果想胜，应当选甲还是选乙？说明理由(注：两数互质是两个数无 1 以外的公约数，如 2 与 5 互质，3 与 15 不互质)。

3. 把一个正整数的数码按顺序倒写后所得的数与原数相同称为回文数。(例如：22,101,342243,……)

(1)将任意四位回文数的差记为 x，求 x 的最小正值 m。

(2)证明：每一个四位回文数都能被 m 整除。

4. 试证：每个大于 6 的自然数都可表示为两个大于 1 且互质的自然数之和。

5. 某校在向“希望工程”捐款活动中，甲班的 m 个男生和 11 个女生的捐款总数与乙班的 9 个男生和 n 个女生的捐款总数相等，都是$(m\cdot n+9m+11n+145)$元，已知每人的捐款数相同，且都是整数元，求每人的捐款数。

参考答案或提示

一、填空题

1. 33334 提示 从简单情况入手，然后归纳猜想，如 $12=3\times4$，$1122=33\times34$，$111222=333\times334$ 等

2. 提示 $56a+392b=2^3\cdot7(a+7b)$，$a+7b$ 含因子 2 和 7，要求 $a+b$ 的值最小，取 $a=7$，于是 $1+b=2$，$b=1$.

3. 2519

4. 19 提示：经计算 $1^2,2^2,\cdots,10^2$，知十位数字为奇数的只有 $4^2=16$，$6^2=36$，对两位数 $10a+b$，有$(10a+b)^2=20(5a+$

$b)+b^2$，其十位数字为 b^2 的十位数字加上一个偶数，故两位数的平方中，也只有 $b=4$ 或 6 时，其十位数字才会出现奇数。问题转化为，在 $1,2,\cdots,95$ 中个位数出现了几次 4 或 6，有 $2\times9+1=19$.

5. 74 提示 $n+1=a+b+a\times b+1=(a+1)(b+1)$，a、b 均为自然数，故 $n+1$ 必为合数。因数，"好数"n 的个数即为 1～100 之间的自然数中合数的个数，共有 $(100-25-1)=74$ 个。

二、选择题

1. D

2. C 提示 从 1 到 999，共含有 $9+180+2700=2889$ 个数字，有 $3289-2889=400$ 个数字用于构成四位数，共构成 100 个四位数(从 1000 到 1099).

3. B 提示 就 n 的奇偶性讨论。

4. D 提示 剪纸过程可看作每次只取一块来剪成 5 块，每取出一块剪成 5 块时，总数增加 4 块，无论取多少块来剪，总数应被 4 除余 1。

5. B 提示 9n 的数码和一定能被 9 整除，即 a 能被 9 整除。

三、解答题

1. 能 按规定的翻法，共翻动了 $1+2+3+\cdots+1993=1993\times997$(次)。平均每枚硬币翻动 997 次，是奇数，翻动奇数次的结果，必使硬币朝向相反。在翻动 n 个硬币时，选择翻动 $(1993-n)$ 个硬币所剩余的硬币，则每个硬币恰好都翻动了 997 次，故能使所有 1993 枚硬币，将原来朝下的面都变成朝上。

2. 我如想胜，应选甲。

因相邻两数互质，故甲只要想法使所剩两数为相邻数即可获胜。而甲先擦，有充足理由获胜，这是由于，此数列共有1993个数，而相邻数均成对出现，擦到最后必有一数配不上对，甲只须先擦去这个配不上对的数，以后无论乙擦哪个数，甲只须擦去与乙所擦数相邻的这个数。这样，甲、乙各擦一次后，就擦去了一对相邻数，到最后必剩下一对相邻数。由于相邻两数互质，所以甲胜。

3. (1)设两个四位回文数分别为 abba，cddc，不妨设 abba $>$ cddc，要使其差 abba $-$ cddc $= x$ 最小，可分两种情况考虑：

①若 $a=c$，要使得其差值最小，必须 $b-d=1$，这时 $x=$ abba $-$ cddc $=110$.

②若 $a>c$，其差值最小必须 $a-c=1, b=0, d=9$，这时 $x=$ abba $-$ cddc $=11$.

故所求 x 的最小正值为 $m=11$.

(2)任何一个回文数都可表示为 abba，而 abba $=1000a+100b+10b+a=11(91a-10b)$，且 a、b 为数码($1\leqslant a\leqslant 9, 0\leqslant b\leqslant 9$).

故每一个四位回文数都能被 m 整除。

4. 证明(1)若 n 为奇数，设 $n=2k+1$，k 为大于 2 的整数，则写 $n=k+(k+1)=1,(k,k+1)=1$，合乎要求。

(2)若 n 为偶数，设 $n=4k$，或 $4k+2$，k 为大于 1 的整数，

当 $n=4k$ 时，$n=(2k-1)+(2k+1),(2k-1,2k+1)=1$,

当 $n=4k+2$ 时，$n=(2k-1)+(2k+3),(2k-1,2k+3)=1$.

5. 解 设每人的捐款数为 x 元,则

$$\begin{cases} mx+11x=9x+nx & ① \\ mx+11x=mn+9m+11n+45 & ② \end{cases}$$

由①得 $n=m+2$ ③

将③代入②得 $(m+11)x=m(m+2)+9m+11(m+2)+145$

即 $(m+11)x=(m+11)^2+46$

$$\therefore\ x=\frac{(m+11)^2+46}{m+11}=m+11+\frac{46}{m+11}$$

因 m、n、x 均为整数,故 $m+11=23$ 或 46.

即 $m=12$ 或 35,从而 $x=25$ 或 47

所以,每人的捐款数为 25 或 47 元。

2 数值计算

准确是数值计算的基本要求，迅速是数值计算的较高追求。一些数值计算题，常因数字大、项数多、次数高而使问题表面复杂，通常都是计算与推理两兼的技巧题。进行复杂数值计算的常用技巧是：巧用运算律；凑整组合；反序相 加；裂项相消；分解相约等。

一、填空题

1. 自然数 1,2,3,…,9998,9999 所有数码的和是________.

2. 把$-\frac{1991}{1992}$，$-\frac{91}{92}$，$-\frac{1992}{1993}$，$-\frac{92}{93}$四个分数按从小到大顺序排列为________.

3. 计算$\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\cdots+(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\frac{3}{60}+\cdots+\frac{58}{60}+\frac{59}{60})$的值为________.

4. 化简$\left(\frac{1\times2\times4+2\times4\times8+\cdots+n\cdot2n\cdot4n}{1\times3\times9+2\times6\times18+\cdots+n\cdot3n\cdot9n}\right)^2=$________.

5. 按一定规律排列的一串数：$\frac{1}{1}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$-\frac{3}{3}$，$\frac{1}{5}$，$-\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$-\frac{4}{5}$，$\frac{5}{5}$，$-\frac{1}{7}$，$\frac{2}{7}$，$-\frac{3}{7}$…中，第 98 个数是________.

二、选择题

1. $\frac{5}{2}+\frac{9}{4}+\frac{17}{8}+\frac{33}{16}+\frac{65}{32}+\frac{129}{64}-13$的值是(　)

(A)$\frac{1}{16}$　(B)$\frac{1}{64}$　(C)$-\frac{1}{64}$　(D)$-\frac{1}{16}$

2. 从和式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$,那么,应除去的项为( )

(A) $\frac{1}{4}$和$\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{6}$和$\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{8}$和$\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{8}$和$\frac{1}{10}$

3. 积$(1+\frac{1}{1\times3})(1+\frac{1}{2\times4})(1+\frac{1}{3\times5})\cdots(1+\frac{1}{98\times100})(1+\frac{1}{99\times101})$的值的整数部分是( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 已知 $a=3^{55}$,$b=4^{44}$,$c=5^{33}$,则有( )

(A) $a<b<c$ (B) $c<b<a$

(C) $c<a<b$ (D) $a<c<b$

5. 给出下列两列数

2,4,6,8,10,…1994

6,13,20,27,34,…1994

则这两列数中,相同的数的个数是( )

(A) 142 (B) 143 (C) 284 (D)285

三、解答题

1. 若 $A=\frac{5678901234}{6789012345}$,$B=\frac{5678901235}{6789012347}$,试比较 A、B 的大小。

2. 计算:$\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$.

3. 已知:$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}=\frac{10^n-1}{9}$,求证:$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\underbrace{22\cdots\cdots25}_{(n+1)个2}=(\underbrace{33\cdots35}_{n个3})^2$

参考答案或提示

一、填空题

1. 180000 提示 由于 $0+9999, 1+9998, 2+9997, \cdots 4999+5000$ 每两数相加时均没有进位，其和为 9999，故所有数码之和为：$4\times9\times\frac{10^4}{2}=180000$

2. $-\frac{1992}{1993}<-\frac{1991}{1992}<-\frac{92}{93}<-\frac{91}{92}$ 提示 将每个分数都加上 1

3. 885 提示 设原式为 S，则 $=\frac{1}{2}+(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})+(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{59}{60}+\frac{58}{60}+\frac{57}{60}+\cdots+\frac{2}{60}+\frac{1}{60}$，易得 $2S=1+2+3+\cdots+58+59$，$S=\frac{59\times60}{4}=885$

4. $\frac{64}{729}$ 提示 原式 $=[\frac{1\times2\times4\times(1^3+2^3+\cdots+n^3)}{1\times3\times9(1^3+2^3+\cdots+n^3)}]^2=\frac{8^2}{27^2}=\frac{64}{729}$

5. $-\frac{17}{19}$

二、选择题

1. C 提示 原式 $=(\frac{5}{2}-2)+\frac{9}{4}-2+(\frac{17}{8}-2)+(\frac{17}{8}-2)+\frac{33}{16}-2)+(\frac{65}{32}-2)+(\frac{129}{64}-2)-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-1=-\frac{1}{64}$

2. D 提示 原式 $=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{3}-$

$\frac{1}{4}=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$.

3. A 提示 原式$=\frac{2^2}{1\times3}\cdot\frac{3^2}{2\times4}\cdot\frac{4^2}{3\times5}\cdot\frac{5^2}{4\times6}\cdot\cdots\cdot\frac{99^2}{98\times100}\cdot\frac{100^2}{99\times101}=\frac{2}{1}\cdot\frac{100}{101}=1\frac{99}{101}$.

4. C 提示 $a=(3^5)^{11}=243^{11}, b=(4^4)^{11}=256^{11}, c=(5^3)^{11}=125^{11}$.

5. B 提示 第一组表示为 $2n$,第二组可表示为 $7k+6$. 当 $7k+6$ 为偶时,两列数有相同的数。所以 k 必为偶数,而 $0\leqslant k\leqslant284$,所以 $k=0,2\cdots142$.

三、解答题

1. 解 设 $A=\frac{x}{y}$,则 $B=\frac{x+1}{y+2}$,于是

$$A-B=\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+2}=\frac{2x-y}{y(y+2)},\text{而 } 2x>y$$

$\therefore$ $A-B>0$,即 $A>B$

2. 解 原式$=\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}+\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}+10^n$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}\times(\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}+1)+10^n$$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}\times10^n+10^n$$

$$=10^{2n}$$

3. 证明 $\because$ $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}\underbrace{22\cdots\cdots2}_{(n+1)\text{个}2}5$

$$=\frac{10^{n-1}}{9}\times10^{n+2}+2\times\frac{10^{n+1}-1}{9}\times10+5$$