世纪云图 理工社

2016［张宇考研数学系列丛书］

张宇

考研数学
真题大全解

（解析分册·数学二）

CLASSIC

史上最全
含1987—2015年
全部真题

AUTHENTIC EXAMINATION PAPERS WITH ANSWERS

Mr. Zhang

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

[张宇考研数学系列丛书]

张宇

考研数学
真题大全解

CLASSIC

（解析分册 · 数学二）

张宇 ◎ 主编

编委（按姓氏拼音顺序）：蔡燧林 高昆轮 胡金德 刘国辉 杨洋 亦一（笔名）
于吉霞 曾凡（笔名） 张乐 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 解析分册. 数学二 / 张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2015.5

ISBN 978-7-5682-0401-9

Ⅰ.①张… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 067139 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 11.5
字　　数 / 281 千字
版　　次 / 2015 年 5 月第 1 版　2015 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 / 40.00 元(共 2 册)

责任编辑 / 梁铜华
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前　言

——给读者一份全面的考研数学历史资料

先给读者讲个故事.1637 年,法国律师费马到图书馆看书,在书上读到一句话:"方程 $x^2+y^2=z^2$ 有正整数解."现在说来,小学生都知道:$3^2+4^2=5^2$,上述命题显然成立.然而,费马没有就此罢休,他违反图书馆规定,在书上"乱写乱画":"你们不要以为这个事情很简单,方程 $x^3+y^3=z^3$ 一定没有正整数解,方程 $x^4+y^4=z^4$ 一定没有正整数解,…,也就是说,对于方程 $x^n+y^n=z^n$,只要 $n\geqslant 3$ 为正整数,则这样的方程就一定没有正整数解了."这等于是提出了一个前所未有的定理,是公然向数学界提出挑战.不仅如此,费马还在这个定理后写了更让人惊讶的一句话:"我已经给上述定理做了完整美妙的证明,只是这个位置太小了,所以我就不写了."——这哪里是挑战?简直就是挑衅!

数学界应战吗?那是当然,数学界绝不缺乏天才,怎么会被一个"外行"难倒?于是,读者所熟悉的大数学家高斯、罗尔、莱布尼茨等等均开始研究费马的这个定理,可是历史就是这么奇妙,他们都没有证明出来.一百年过去了,两百年过去了,三百年过去了,直到 1993 年,也就是在费马提出这个定理的 356 年之后,才被美籍英裔数学家威尔斯证明出来,单单证明就写了 1 000 多页.威尔斯的证明举世震惊,因此他也获得了至今唯一一个最高数学奖——菲尔兹奖("唯一"是因为菲尔兹奖只授予 40 岁以前的数学家,但是当时的威尔斯已经 45 岁了,由于他的贡献太大,所以破例授予他这个数学上的最高奖).

费马的这个定理,被数学界称为"会下金蛋的鸡",因为在证明这个定理的数百年中,产生了好多独立的数学分支,使得数学得到了蓬勃发展,这正是:提出一个好的问题,往往比解决它更有价值.因此,费马的这个定理被正式命名为:**费马大定理**.你见过有几个定理叫"大定理"?很少很少.一个"大"字,足以体现这个定理的分量.

故事讲完了,这里讲了什么道理呢?读者自已体会吧——其实,我什么道理都没讲——我只想借用"费马大定理"的"大"字,把我的这本书命名为:真题"大"全解.因为,这本书,我以为,相对于其他真题书来讲,是最有分量的.

一、真题的重要性不言而喻

从 1987 年开始,考研数学实行了全国统一考试的形式,考研数学的命题也由此走上了正轨——其科学性、严肃性、稳定性逐渐达到了国家标准.直到今天,几十年下来,考研数学的命题可以说极其成熟了,也逐渐出现了如下两大特点:

第一,**考研数学命题的风格稳定:重视基础,淡化技巧,计算量大**.考研数学试题是命题组集体智慧的结晶,在确定了上述命题的风格和原则后,考题受到命题组各位成员自身"喜好"的影响很小.所以,做好历年真题,是熟悉考研数学风格的好路子.

第二,**考研数学命题的形势特殊:命题时间短,任务重,参考以往考题成为必须**.为了确保考研数学命题的安全性,不出现泄漏考题的情况,现在的考研命题时间很短,已经不再像多年前那样宽松(以前命题都是提前半年出好题,有足够的时间来校对和检验试题的正确性和科学性)——在考前集中命题,几乎没有时间去校对和检验了.所以,为了保证试题不出错且难度适中,命题人盯上了从

1987 年到今天积累下来的命制过的试题（这里还包括从未考过的备考卷上的试题），以此为基础，“参考”“改编”甚至“照搬”这些题. 故，读者应该懂得，做好历年真题，是预测考研数学考题的好路子.

二、做好真题解析的两大原则

考研数学的历年真题解析需要贯彻两个原则.

第一，**考研数学试题收录的全面性**. 收录从全国统考以来所有的考研数学试题，给读者提供一份完整的历史资料，而不是部分试题. 从而，力图给读者提供原汁原味的历年的实考题，是本书坚持的第一个原则.

第二，**考研数学试题解析的权威性**. 凡是有当年命题人自己写的答案，忠实其答案；凡是有当年考试中心组织的专家写的答案，参考其答案. 总之，本书对真题的答案解析，是最权威、最深刻的，这是本书坚持的第二个原则.

这两个原则，事实上，就是本书分量最重的地方——每一道题的收录，都有根有据；每一道题的解析，都有源有头.

三、本书使用说明

本书共分两册——试卷分册和解析分册. 试卷分册中，我将 1987 年至 2015 年的真题试卷完整地展现给读者，供读者检测、演练之用；解析分册中，我们提供给读者全面、深刻、由命题人把关的试题解析. 其中，为了不影响考生有针对性地备考，有些较早年份的超纲题目，我做了必要的删除. 那么在试卷分册中，被删除题目的套卷中，余下试题的分值稍作调整以使其总分仍为满分. 当然，考虑到读者在做题之余需查阅答案及解析，我们在解析分册中给出了权威的解答，依据考试年份与题号可作相应查找. 值得注意的是，本书仅为数学二的真题大全解，需考数学二的考生若做完了这本书的题目，想再多做演练，亦可参考数学一与数学三的真题大全解.

对于真题大全解的使用，与习题集的使用有类似之处. 我在《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》中已经给读者提出了建议：把题目的演算过程写到草稿纸上去，把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去，总之，不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了，当你下次再做这个题目时，不要有任何提示的情况下，你能保证自己一定会做吗？“干干净净”的真题集，事实上是对读者提出了高标准、严要求，希望读者把真题全部做完一遍后，第二遍就能够查漏补缺、扫清死角.

感谢从命题组中退下来的老专家们，在数学原题的收集、确认与解析中，他们作出了重要贡献. 感谢北京理工大学出版社的各位领导和编辑，感谢高等教育出版社的刘佳同志，他们给作者提供了很多便利和帮助.

张宇

2015 年 5 月 于北京

张宇考研数学系列丛书详细说明

书名	拟出版时间	主要内容
张宇高等数学18讲	2015年1月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中高等数学部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题组长参与.
张宇线性代数9讲	2015年1月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中线性代数部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.
张宇概率论与数理统计9讲	2015年1月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.
张宇考研数学题源探析经典1000题	2015年3月	以考研命题所使用的所有题目源头为依据，精心挑选和编制了超过1000道高仿真练习题，题目与考研无缝接轨，综合性强，知识相对混编，难易变化无常，利于考生复习过程中保持实战演练的状态.原命题组长参与.
张宇考研数学真题大全解	2015年4月	囊括考研数学命题以来所有考研真题(1987—2015)，给读者提供原汁原味的实考题.原命题组长参与.
考研数学命题人终极预测8套卷	2015年9月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上).实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频.原命题组长与命题成员参与.
张宇考研数学最后4套卷	2015年11月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下).实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频.原命题组长与命题成员参与.

目　录

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题答案

（试卷Ⅲ）

一、填空题

(1)答　应填$\frac{a}{1+ax}$；$-\frac{a^2}{(1+ax)^2}$.

解　由 $y=\ln(1+ax)$知，$y'=\frac{a}{1+ax}$，$y''=-\frac{a^2}{(1+ax)^2}$.

(2)答　应填 $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$；$y-\frac{\pi}{4}=-2(x-1)$.

解　$y'=\frac{1}{1+x^2}$，$y'(1)=\frac{1}{2}$，则 $x=1$ 处切线方程为 $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$，法线方程为$y-\frac{\pi}{4}=-2(x-1)$.

(3)答　应填 $f(x)$在$[a,b]$上连续；在$[a,b]$内至少存在一点 ξ，使$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

解　积分中值定理：
若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$内至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

(4)答　应填 e^{-3}.

解　由于$\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{-3}{n+1}\right)^n$，又$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-3}{n+1}\cdot n\right)=-3$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-3}$.

(5)答　应填 $f(x)+C$，其中 C 为任意常数；$\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)]$.

解

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C,$$

$$\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}f(2x)\Big|_a^b=\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)].$$

二、解　$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$.

三、解　因$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=5\sin t$，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=5-5\cos t$，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{5\sin t}{5(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

且

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{5(1-\cos t)^2}.$$

四、解　$\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，

令 $x=\sin t$，有$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$，因此$\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$.

五、解　$V=\pi\int_0^{\pi}(\sin x+1)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sin x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(8+3\pi)$.

六、证明题

(1)证　$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，故由拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

由于 $f'(x)$ 在 (a,b) 内恒大于零，所以 $f'(\xi)>0$，又 $x_2-x_1>0$，因此 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

(2)证　因 $g''(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g'(x)-g'(c)}{x-c}<0$，而 $g'(c)=0$，故 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g'(x)}{x-c}<0$. 由极限的保号性，$\exists\delta>0$，当 $x\in(c-\delta,c)$ 时，有 $\dfrac{g'(x)}{x-c}<0$，即 $g'(x)>0$，从而 $g(x)$ 在 $(c-\delta,c)$ 上单增；当 $x\in(c,c+\delta)$ 时，有 $\dfrac{g'(x)}{x-c}<0$，即 $g'(x)<0$，从而 $g(x)$ 在 $(c-\delta,c)$ 上单减.

又由 $g'(c)=0$ 知，$x=c$ 是 $g(x)$ 的驻点，因此 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

七、解　当 $a\neq0,b\neq0$ 时，

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{a^2\tan^2x+b^2}\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C;$$

当 $a=0,b\neq0$ 时，

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{b^2}\tan x+C;$$

当 $a\neq0,b=0$ 时，

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a^2}\cot x+C,$$

其中 C 为任意常数.

八、(1)解　化原方程为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}\cdot y=1,$$

得其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int1\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{2}x+\frac{C}{x}.$$

由 $y\Big|_{x=\sqrt2}=0$，得 $C=-1$，故所求特解为

$$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}.$$

(2)解　由特征方程 $r^2+2r+1=0$，知其特征根为 $r_{1,2}=-1$. 故对应齐次方程的通解为

$$\bar{y}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

设原方程的特解为 $y^*(x)=\mathrm{e}^x(ax+b)$，代入原方程可得 $a=\dfrac{1}{4},b=-\dfrac{1}{4}$.

因此，原方程的通解为 $y(x)=\bar{y}+y^*=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{4}(x-1)\mathrm{e}^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

九、选择题

(1)答　应选(D).

解　由于 $f(-x)=|-x\sin(-x)|\mathrm{e}^{\cos(-x)}=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数.

(2)答　应选(C).

解　由于 $f(2k\pi)=2k\pi\sin2k\pi=0$，$f(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大，也没有有限极限. 则应选(C).

(3)答　应选(B).

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a-x)-f(a)}{-x}=f'(a)+f'(a)=2f'(a)$.

(4)答　应选(D).

解　$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\mathrm{d}x \xlongequal{tx=u} \int_0^s f(u)\mathrm{d}u$,由此可见,$I$ 的值只与 s 有关,所以应选(D).

十、解　设所求点为(x_1,y_1),$x_1>0$,$y_1>0$,于是 $y'|_{x=x_1}=-2x_1$.过(x_1,y_1)的切线方程为

$$y-y_1=-2x_1(x-x_1).$$

令 $x=0$ 得切线在 y 轴的截距 $b=x_1^2+1$,令 $y=0$ 得切线在 x 轴的截距 $a=\frac{x_1^2+1}{2x_1}$.

于是,所求面积为

$$S(x_1)=\frac{1}{2}ab-\int_0^1(-x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(x_1^3+2x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\frac{2}{3}.$$

令
$$S'(x_1)=\frac{1}{4}\left(3x_1^2+2-\frac{1}{x_1^2}\right)=\frac{1}{4}\left(3x_1-\frac{1}{x_1}\right)\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)=0,$$

得 $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

又 $S''(x_1)\Big|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{4}\left(6x_1+\frac{2}{x_1^3}\right)\Big|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}}>0$,即知点$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3}\right)$为所求,此时 $S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{9}(2\sqrt{3}-3)$.

1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题答数

(试卷Ⅲ)

一、填空题

(1)答 应填 1.

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}(2x+a)=a, f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1$. 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,只需 $a=1=f(0)$,即 $a=1$.

(2)答 应填 $(1+2t)e^{2t}$.

解
$$f(t)=\lim_{x\to\infty}t\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{2t}=te^{2t},$$
则
$$f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}=(1+2t)e^{2t}.$$

(3)答 应填$\frac{1}{12}$.

解 等式 $\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$,两边对 x 求导得 $3x^2f(x^3-1)=1$. 令 $x=2$ 得 $12f(7)=1$,则 $f(7)=\frac{1}{12}$.

(4)答 应填 1.

解 令 $y=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$, $\ln y=-\frac{1}{2}\tan x\ln x$.

而
$$\lim_{x\to0^+}\tan x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=0,$$
则
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=e^0=1.$$

(5)答 应填 $2(e^2+1)$.

解 $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx\overset{\sqrt{x}=t}{=\!=\!=}2\int_0^2te^tdt=2\int_0^2tde^t=2\left(te^t\Big|_0^2-\int_0^2e^tdt\right)=2(e^2+1)$.

二、选择题

(1)答 应选(A).

解 $f'(x)=x^2+x+6, f'(0)=6$,点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y-1=6x$,令 $y=0$ 得 $x=-\frac{1}{6}$. 即此切线与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{1}{6},0\right)$.

(2)答 应选(C).

解 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆可导,则必在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0),$$
又 $f(x)<g(x)$,从而 $f(x_0)<g(x_0)$,即
$$\lim_{x\to x_0}f(x)<\lim_{x\to x_0}g(x).$$

(3)答 应选(B).

解
$$dy=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x,\lim_{\Delta x\to0}\frac{dy}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2},$$
则当 $\Delta x\to0$ 时,dy 与 Δx 是同阶无穷小.

(4)答　应选(B).

解　$V_x=\pi\int_0^{\pi}(\sin^{\frac{3}{2}}x)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\sin^3x\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi$.

(5)答　应选(D).

解　此为"向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表示的充分必要条件是向量组线性相关"的逆否命题.

三、(1)解　由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$,即 $x\leqslant 0$. 所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\leqslant 0$.

(2)解　$y'=e^{xy}(x^2y'+xy+1)$,

$y''=e^{xy}(x^2y''+2xy'+xy'+y)+e^{xy}(x^2y'+xy+1)(xy'+y)$.

因 $x=0$ 时 $y=1$,所以

$$y'|_{x=0}=e^0=1,\quad y''|_{x=0}=e^0+e^0=2.$$

(3)解　$y=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{x(x^2+1)}e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left(\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x}(\arctan x+C)$,

其中 C 为任意常数.

四、解

单调增加区间	$(-\infty,1)$
单调减少区间	$(1,+\infty)$
极值点	1
极　值	2
凹($\cup$)区间	$(-\infty,0)$及$(2,+\infty)$
凸($\cap$)区间	$(0,2)$
拐点	$\left(0,\frac{3}{2}\right)$及$\left(2,\frac{3}{2}\right)$
渐近线	$y=0$

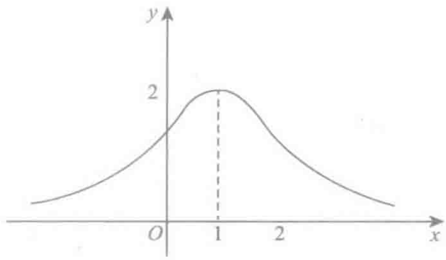

图 1

五、解　设圆形的周长为 x,则正方形的周长为 $a-x$,两图形的面积之和为

$$A=\left(\frac{a-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{4+\pi}{16\pi}x^2-\frac{a}{8}x+\frac{a^2}{16},$$

$$A'=\frac{4+\pi}{8\pi}x-\frac{a}{8}, A''=\frac{4+\pi}{8\pi}>0.$$

令 $A'=0$,得 $x=\frac{\pi a}{4+\pi}$,故当圆的周长为 $x=\frac{\pi a}{4+\pi}$,正方形的周长为 $a-x=\frac{4a}{4+\pi}$时,两图形的面积之和最小.

六、解　对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

设原方程的特解为 $y^*=Axe^x$. 得 $A=-2$. 故原方程通解是 $y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$. 又已知其图形在点(0,1)处与曲线 $y=x^2-x+1$ 有公共切线,得

$$y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=-1,$$

即 $C_1+C_2=1, C_1+2C_2=1$. 解得 $C_1=1, C_2=0$. 所以 $y=(1-2x)e^x$.

七、解　当 $-1\leqslant x<0$ 时,原式$=\int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+t)^2\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}(1+x)^2$;

当 $x\geqslant 0$ 时,原式$=\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+\int_0^x(1-t)\mathrm{d}t=1-\frac{1}{2}(1-x)^2$.

八、(1)解　由积分中值定理和微分中值定理有

$$\lim_{a\to0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t=\lim_{a\to0^+}\frac{1}{2a}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]$$
$$=\lim_{a\to0^+}f'(\xi^*)=\lim_{\xi^*\to0}f'(\xi^*)=f'(0)\quad(-2a\leqslant\xi-a<\xi^*<\xi+a\leqslant2a).$$

(2)**证** 由 $f(x)$的有界性及积分估值定理有

$$m\leqslant\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t\leqslant M.$$

又

$$-M\leqslant-f(x)\leqslant-m,$$

故有

$$-(M-m)\leqslant\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t-f(x)\leqslant M-m,$$

即

$$\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t-f(x)\right|\leqslant M-m.$$

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题答案

（试卷Ⅲ）

一、填空题

(1)答　应填$\frac{1}{2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x\cdot\frac{x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}$.

(2)答　应填 π.

解　$\int_0^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi}t\mathrm{d}(\cos t)=-t\cos t\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}t=\pi$.

(3)答　应填 $y=2x$.

解　$y'=(x-1)(x-2)$，$y'(0)=2$. 则所求切线方程为 $y-0=2(x-0)$，即 $y=2x$.

(4)答　应填 $n!$.

解法 1　因为 $f'(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)+x(x+2)(x+3)\cdots(x+n)+\cdots+$
$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$，

所以 $f'(0)=n!$.

解法 2　由于 $f(x)$是多项式函数，则 $f'(0)$应等于其一次项系数，则 $f'(0)=n!$.

解法 3　由导数定义

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x}=n!.$$

(5)答　应填 $x-1$.

解法 1　令$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=a$，则 $f(x)=x+2a$. 将 $f(x)=x+2a$ 代入$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=a$，得

$$\int_0^1(t+2a)\mathrm{d}t=a,\text{即}\frac{1}{2}+2a=a.$$

由此可得
$$a=-\frac{1}{2},$$
则
$$f(x)=x-1.$$

解法 2　等式 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 两端从 0 到 1 对 x 积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

由此可得
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2},$$
从而
$$f(x)=x-1.$$

(6)答　应填 $a=b$.

解　由于 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+bx^2)=a$，$f(0)=a$. 要使 $f(x)$在$x=0$ 处连续，则应有 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$，即 $a=b$.

(7)答　应填 $\cot^2 y\mathrm{d}x$.

解　等式 $\tan y=x+y$ 两边求微分得 $\sec^2 y\mathrm{d}y=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，则 $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sec^2 y-1}\mathrm{d}x=\cot^2 y\mathrm{d}x$.

二、(1)解　$y'=\dfrac{(\mathrm{e}^{-\sqrt{x}})'}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot(-\sqrt{x})'}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x(1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}})}}$.

(2)解　$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}+C$，其中 C 为任意常数.

(3)解　原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}\right\}=\mathrm{e}^2$.

(4)解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{1+t^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2t}{1+t^2}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{1}{2t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2t}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

(5)解　设 $t=2x$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{t^2}{4}f''(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left[t^2 f'(t)\Big|_0^2-2\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{8}\left[-2\int_0^2 t\mathrm{d}f(t)\right]=-\frac{1}{4}\left[tf(t)\Big|_0^2-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right]=-\frac{1}{4}(1-1)=0.\end{aligned}$$

三、选择题

(1)答　应选(A).

解　由于 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，又 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，则原曲线有且仅有水平渐近线 $y=1$.

(2)答　应选(B).

解　由于 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 为 5 次方程，则该方程至少有一个实根(奇次方程至少有一实根). 令 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$，$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$，而

$$\Delta=(6a)^2-60b=12(3a^2-5b)<0,$$

则 $f'(x)\neq 0$. 因此，原方程最多一个实根，故原方程有唯一实根.

(3)答　应选(C).

解　$V_x=\pi\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}$.

(4)答　应选(D).

解　本题的关键在于由题设可知在 $x=a$ 的某邻域内有 $f(a)\geqslant f(x)$，$g(a)\geqslant g(x)$，由此能否得到 $g(a)f(a)\geqslant g(x)f(x)$ 或 $g(a)f(a)\leqslant g(x)f(x)$，在一般情况下是得不到此结论的.

若取 $f(x)=-(x-a)^2$，$g(x)=-(x-a)^2$，显然 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 处取极大值 0，但 $f(x)g(x)=(x-a)^4$ 在 $x=a$ 处取极小值. 则(A)，(C)都不正确；若取 $f(x)=1-(x-a)^2$，$g(x)=1-(x-a)^2$，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取极大值 1，而 $f(x)g(x)=[1-(x-a)^2]^2$ 在 $x=a$ 处仍取极大值 1，则(B)也不正确，从而只有(D)对.

(5)答　应选(B).

解　$y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的特解应为方程 $y''-y=\mathrm{e}^x$ 和 $y''-y=1$ 的特解之和，而特征方程为

$$r^2-1=0，解得\ r=\pm 1.$$

因此 $y''-y=\mathrm{e}^x$ 的特解应为 $y_1^*=ax\mathrm{e}^x$，$y''-y=1$ 的特解应为 $y_2^*=b$.

则原方程特解应具有形式

$$y=ax\mathrm{e}^x+b.$$

(6)答　应选(D).

解 由于 $h\to+\infty$ 时 $\frac{1}{h}\to 0^+$，则 $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在只能得出 $f(x)$ 在 a 点的右导数存在，不能得出 a 点导数存在.(B)，(C)明显不对，这两个选项中的极限存在不能推导出 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在，故不能作为 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的充分条件.

又
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'(a),$$
则应选(D).

四、解 由通解公式有
$$y=e^{-\int\frac{1-x}{x}dx}\left(\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx}dx+C\right),$$
得
$$y=\frac{e^x}{x}(C+e^x).$$
再由 $y(1)=0$，得 $C=-e$.

故所求解为
$$y=\frac{e^x}{x}(e^x-e).$$

五、解 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$,
$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt,\ f''(x)=-\sin x-f(x),$$
即
$$f''(x)+f(x)=-\sin x.$$
这是二阶常系数非齐次线性微分方程，初值条件
$$y|_{x=0}=f(0)=0,\ y'|_{x=0}=f'(0)=1.$$
对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\sin x+C_2\cos x$. 非齐次方程的特解可设为 $y^*=x(a\sin x+b\cos x)$.
用待定系数法求得 $a=0,b=\frac{1}{2}$. 于是 $y^*=\frac{x}{2}\cos x$. 非齐次方程的通解为
$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{x}{2}\cos x.$$
由初值条件得 $C_1=\frac{1}{2}$，$C_2=0$，从而
$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x.$$

六、证 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=2\sqrt{2}$.

记 $F(x)=\frac{x}{e}-\ln x-2\sqrt{2}$，$F'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{x}$. 则
$$F(e)=-2\sqrt{2}<0,\ \lim_{x\to 0^+}F(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty.$$
故由零点定理知，$F(x)$ 在 $(0,e)$，$(e,+\infty)$ 内分别至少有一个零点.

又当 $0<x<e$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调减少. 当 $e<x<+\infty$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调增加，所以 $F(x)$ 在 $(0,e)$，$(e,+\infty)$ 内分别只有一个零点，所以原方程在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个实根.

七、解

单调减区间	$(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$	凹区间	$(-3,0)$，$(0,+\infty)$
单调增区间	$(-2,0)$	凸区间	$(-\infty,-3)$
极值点	-2	拐点	$\left(-3,-\frac{2}{9}\right)$
极值	$-\frac{1}{4}$	渐近线	$x=0$ 和 $y=0$

八、解　因为曲线过原点，所以 $c=0$.

由题设有 $\int_0^1 (ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$，即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$，则

$$V=\pi\int_0^1 (ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{1}{2}ab+\frac{b^2}{3}\right)$$

$$=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2\right].$$

令 $V_a'=\pi\left[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0$，得 $a=-\frac{5}{4}$，代入 b 的表达式得 $b=\frac{3}{2}$.

又因 $V_a''\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况，知当 $a=-\frac{5}{4}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=0$ 时，体积 V 最小.