高 等 学 校 教 材 17

# 运筹学概论

INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH

吴振奎 钱智华 于亚秀 编著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高 等 学 校 教 材

# 运筹学概论

## INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH

吴振奎　钱智华　于亚秀　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 提 要

本书共 12 章．本书选材上力求详略得当，知识内容力求新颖，方法技巧多样，且适当介绍了一些重要的数学思想．本书力求科学系统严谨，讲解方法由浅入深，注重对读者的启发性．

本书适合作为相关专业数学教材和参考书使用．

**图书在版编目(CIP)数据**

运筹学概论/吴振奎，钱智华，于亚秀编著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.2

ISBN 978-7-5603-5096-7

Ⅰ.①运…　Ⅱ.①吴…②钱…③于…　Ⅲ.①运筹学—高等学校—教材　Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 302535 号



策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 28　字数 526 千字
版　　次　2015 年 2 月第 1 版　2015 年 2 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－5096－7
定　　价　48.00 元

# 前　　言

运筹学是20世纪30年代末期诞生并逐步发展起来的一门应用性学科，它是根据实际问题，利用科学的方法特别是数学的方法，通过建立数学模型以及求解模型，对复杂系统、组织的内部行为结构等进行定量分析，并为系统结构的优化设计或组织行为的管理决策等提供依据的科学. 如今，运筹学已广泛地应用于科学技术、政治、经济、军事、国防等诸多领域. 运筹学也成为高校的一门主干课程，它所涉及的专业主要有应用数学、工商管理、工程管理、交通管理、物流工程、邮电通信、市场营销、系统工程、微机会计、电子信息、电脑网络、管理信息、工业经济、技术经济以及其他许多工程技术专业. 然而对大多数非应用数学专业而言，囿于学时及数学基础限制，必须撰写一本适合他们的运筹学教材.

人类进入21世纪后，随着社会经济的迅速发展，科学技术的进步创新，运筹学同样在不断地发展，新的分支以及新的方法日益涌现，其应用也更深、更广、更宽. 随着高校众多专业增设运筹学课程，运筹学已经且必将成为各类人群成才所必需的一门学问.

本书编写时始终秉承以下原则：

1. 选材力求详略得当. 从整体上讲，线性规划部分较详，其他内容较略；方法讲述较详，理论证明较略.

2. 知识内容力求新颖. 由于本课程系新兴学科，不少内容、方法在不断改进和完善，我们力求将其写入，以开阔读者视野.

3. 方法技巧注意多样（意让读者从中比较优劣），且适当介绍了一些重要的数学思想.

4. 科学系统力求严谨，讲解方法由浅入深，注重对读者的启发性.

5. 文字叙述尽量简洁.

如前所述，由于本教程重在应用，因而对书中某些方法原理未能一一严格证明，但这不会影响方法的使用.

诚然，要在这样一个篇幅里，包罗这样多分支内容，对笔者而言确是一件难事.

因而，内容取舍，方法介绍，无不留下笔者喜恶的痕迹. 当否？只有敬请读者去品鉴了.

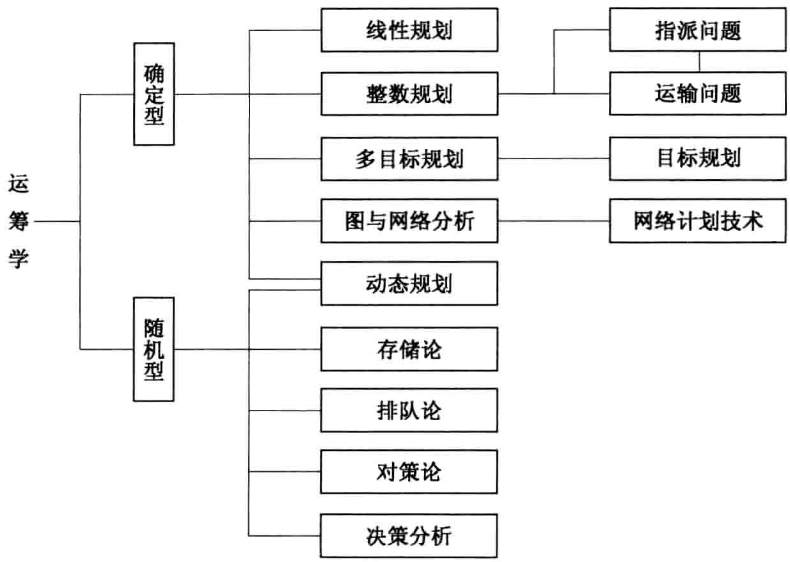
本书在编写过程中，参考了大量的文献，且引用了其中的一些例子和叙述，在此对原作者深表谢意. 还要谢谢钱智华、于亚秀后生才俊对于本书的贡献. 此外，书稿中融入了我们的某些工作与成果，这也是本书的一个特点.

一本好教材的形成，要经多次使用和反复修改(这是一个复杂和漫长的过程)，即便如此它仍不能算是至臻至美——因为知识在不断更新，方法在不断改进. 在这里我们殷切期望广大读者及同行专家们的批评指正.

**作　者**

2014 年 1 月

# 本书内容结构



运筹学
确定型
随机型
线性规划
整数规划
多目标规划
图与网络分析
动态规划
存储论
排队论
对策论
决策分析
指派问题
运输问题
目标规划
网络计划技术

# 本书常用的数学符号、缩写及某些常数

## 常用的数学符号

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ | 表示矩阵,如 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ |
| $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\cdots$ | 表示向量,如 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ |
| $x,y,z,\cdots$ | 表示变元 |
| $a,b,\alpha,\beta,\cdots$ | 表示数量 |
| $\lceil x \rceil$ | 不小于 $x$ 的最小整数($x$ 的顶,又称上取整) |
| $\lfloor x \rfloor$ | 不大于 $x$ 的最大整数($x$ 的底,又称下取整) |
| $\{\boldsymbol{x} \mid p(\boldsymbol{x})\}$ | 表示具有 $p(\boldsymbol{x})$ 性质的元素 $\boldsymbol{x}$ 的集合 |
| $\boldsymbol{I}$ | 表示单位矩阵 |
| $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ | 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置 |
| rank $\boldsymbol{A}$ | 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,简记 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 |
| $Tr(\boldsymbol{A})$ | 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 |
| dim $D$ | 表示空间 $D$ 的维数 |
| $\boldsymbol{e}_i$ | 表示$(0,0,\cdots,0,\underset{\text{第}i\text{个}}{1},0,\cdots,0)$ |
| $\vee$ | 表示关系 $\geqslant,\leqslant,>,<,=$ 之一 |
| $\gg(\ll)$ | 表示远大(小)于 |
| $\alpha=O(\beta)$ | 表示 $\alpha$ 与 $\beta$ 同阶,即 $\left\lvert\dfrac{\alpha}{\beta}\right\rvert\to M$(常数) |
| $\alpha=o(\beta)$ | 表示$\dfrac{\alpha}{\beta}\to 0$ |
| $\alpha\sim\beta$ | 表示$\dfrac{\alpha}{\beta}\to 1$ |

## 数学名词记号

| | | | |
|---|---|---|---|
| O. R. | 运筹学 | MP | 数学规划 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| LP | 线性规划 | NLP | 非线性规划 |
| ILP | 整数线性规划 | LGP | 多目标线性规划 |
| AHP | 层次分析法 | MOP | 多目标问题 |
| PERT | 计划评审方法 | A/B/C/D/E/F | 排队论 Kendall 记号 |
| V | 表示目标 | s. t. | 表示约束 |
| mod $p$ | 表示与模 $p$ 同余 | max | 表示极(最)大 |
| $\Leftrightarrow$ | 表示充分必要 | min | 表示极(最)小 |
| $\succ$ | 表示优于 | opt | 表示最优 |
| $d^{\pm}$ | 表示偏差 | parero | 解　非劣解 |

## 几种重要常数

$e \approx 2.718\ 281\ 828\cdots$

$\pi \approx 3.141\ 592\ 654\cdots$

$\gamma \approx 0.577\ 215\ 664\ 9\cdots$　（欧拉常数：$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \xrightarrow{n \to \infty} \gamma$）

$\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.618\ 033\ 988\cdots$　（黄金数）

## 两个常用公式

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1 + \frac{1}{12n}\right)$$

Fibonacci 数列通项：$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^n - \varphi_2^n)$，其中 $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

# 目　　录

# 绪　论

运筹学是一门新兴的应用科学，它是利用科学方法，特别是数学方法，在建立模型的基础上，解决有关人力、物资、货币等复杂系统的运行、组织、管理等方面所出现的问题，并力求优化的学科.

运筹学一词的英文“operations research”(简记 O. R.) 原意为“作战研究”，它是 1938 年英国空军为了研究诸如雷达和新型作战飞机等而建立的组织名称. 在第二次世界大战期间盟军中同类组织不断增加和扩大，其所建立起来的方法在第二次世界大战后被转移到民用事业中去，从而 O. R. 一词的含义不再局限于军事方面.

“运筹”的中文译名取自《史记·高祖本纪》里“运筹帷幄之中，决胜千里之外”中的两字(运筹系运算算筹之意，算筹是我国古代计算工具，此处意思已引申)，它恰当地反映了这门学科的性质和内涵.

1976 年美国运筹学会定义“运筹学是研究用科学方法来决定在资源不充分的情况下如何最好地设计人－机系统，且使之最好地运行的一门学科”.

1978 年联邦德国科学辞典上定义“运筹学是人事决策模型的数学解法的一门学科.”

英国运筹学杂志认为“运筹学是运用科学方法(特别是数学方法)来解决那些在工业、商业、国防等部门中有关人力、机器、物资、金钱等大型系统的指挥和管理方面出现的问题，其目的是帮助管理者科学地决定其策略和行动”.

简而言之，运筹学是一门可以使办事情变得多、快、好、省的应用科学.

运筹学是一门内容丰富、应用广泛、发展迅速的新兴(应用数学)学科，它通常包含的一些分支和内容如图 1.

运筹学处理各类问题的方法步骤为：

分析问题 → 确定目标 → 制定方案 → 建立模型 → 寻求解法 → 检验控制 → 方案实施

- 运筹学
  - 数学规划
    - 线性规划
    - 整数规划　0-1 规划——指派问题
    - 非线性规划*
    - 组合规划（组合最优化）*
    - 随机规划*
    - 多目标规划
    - 参数规划*
    - 动态规划
    - 几何规划*
  - 图与网络分析——网络计划技术
  - 库存（存贮）论
  - 排队论
  - 对策论
  - 决策分析
  - 可靠性理论*
  - 系统模拟方法*

**（这里带“*”号者系本书未涉及的内容）**

图 1

为了运筹学的研究和发展，同其他自然科学一样，各国运筹学工作者相继建立了自己的学会组织.

第一个运筹学会于 1952 年在美国成立，尔后不少国家陆续成立了运筹学会.

1959 年成立国际运筹学会联盟，到 1986 年为止已有 35 个会员国和 6 个兄弟学会. 其会刊为《运筹国际文摘》.

第一份运筹学杂志创刊于 1950 年的英国.

1980 年中国数学会运筹学会成立，1982 年我国加入国际运筹学会联盟，同年《运筹学杂志》(如今已改为《运筹学学报》) 在我国上海创刊.

此外，1992 年《运筹与管理》杂志在合肥工业大学系统工程研究所问世.

运筹学在 20 世纪 40 年代以后得到迅速发展，其原因：(1) 大规模的新兴工业崛起；(2) 产品更新换代(特别是高科技产品) 加速；(3) 大型高速电子计算机的出现及普遍应用.

如今，运筹学已在诸多领域得以广泛应用，且取得了灼人的成果，它有着无限广阔的发展前景和充满希望与机遇的未来，这在我们今后的学习中将会看到.

运筹学必将且已经成为了各类人才需要掌握的一门学问，这一点也已为实践所验证.

# 第 1 章　线性规划及单纯形法

## 1.1　线性规划及其几何解法

### 1. 数学规划

数学规划是应用数学的一个重要分支，主要研究如何有效地利用有限资源，合理分配生产任务或选择最佳生产布置及恰当安排调运方案等，以获得最佳经济效益的问题. 用数学语言描述：它是研究在给定的约束条件下，求所得目标函数的极（最）大（max）或极（最）小（min）值，故有时亦称此类问题为最优化问题.

一个极（最）大（或极（最）小）化的数学模型可表为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{V}:\ \max(\text{或 } \min) f(\boldsymbol{x})\\
(\mathrm{MP})\quad &\text{s.t.}\quad g_i(\boldsymbol{x}) \vee 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)\\
&\vee \text{ 表示 } <, >, = \text{或} \leqslant, \geqslant \text{之一}
\end{aligned}
$$

或记为

$$\max(\text{或 } \min)\{f(\boldsymbol{x}) \mid g_i(\boldsymbol{x}) \vee 0, i=1,2,\cdots,m\}$$

其中，$f(\boldsymbol{x})$，$g_i(\boldsymbol{x})$ 是 $n$ 元实函数，且 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. $f(\boldsymbol{x})$ 称为目标函数（简记为 V），$g_i(\boldsymbol{x}) \vee 0$，称为约束条件（简记为 s.t.）.

目标函数亦称评价函数. 一般它是 $n$ 元单值函数.

约束条件是指在数学规划中变量必须满足的条件. 其中用等式表示的条件称为等式约束，用不等式表示的条件称为不等式约束.

有些规划问题没有约束，常称其为无约束最优化问题；而有约束则称为有约束最优化问题. 这样数学规划问题可分为：

$$\text{数学规划问题（最优化问题）}\begin{cases}\text{有约束最优化问题}\\ \text{无约束最优化问题}\end{cases}$$

**可行域**　指模型（MP）中满足所有约束条件的解（称其为可行解）所形成的集合，记为 $G=\{\boldsymbol{x} \mid g_i(\boldsymbol{x}) \vee 0, i=1,2,\cdots,m\}$.

比如 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$，$m=3$ 时的 $G$ 图形如图 1.1.1 所示.

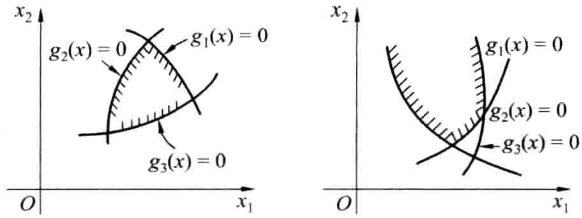



图 1.1.1

模型(MP)的可行域可以是有界的，也可以是无界的.

**最优解** 模型(MP)中满足所有约束条件且使目标函数取得极大(或极小)的点 $\boldsymbol{x}^*$，称为最优点，而称 $f(\boldsymbol{x}^*)$ 为最优值，称 $\{\boldsymbol{x}^*, f(\boldsymbol{x}^*)\}$ 为最优解. 有时也简称 $\boldsymbol{x}^*$ 为最优解.

## 2. 线性规划问题实例

在有约束最优化问题中，有一类重要的模型即线性规划问题. 它的历史可追溯到 20 世纪 30 年代，苏联学者 Л. В. Канторович 发表的《生产组织与计划的数学方法》一书所论及的问题，首次向人们提出了线性规划模型.

1947 年，美国学者 G. B. Dantzig 提出了解决线性规划问题的方法——单纯形法，这为该问题的研究、发展奠定了坚实的理论基础.

有人曾做过调查：世界 500 强企业中有 85% 以上曾使用线性规划进行经营管理，而使它们获得数以万亿计的财富. 全世界计算机进行的数值计算大部分用于线性规划的求解上.

20 世纪后叶，全球范围兴起的数学建模活动，因其中绝大多数为线性规划模型，这也使得线性规划更加为世人瞩目.

下面我们先来看几个属于该问题的简单例子.

**例 1.1.1(利润问题)** 某工厂生产 $n$ 种产品，每种产品均需要 $m$ 道工序(具体数据见表 1.1.1)，且：

(1) 第 $j$ 种单位产品在第 $i$ 道工序上所需工时为 $a_{ij}$；

(2) 第 $j$ 种单位产品利润为 $c_j$；

(3) 由于设备限制每月第 $i$ 道工序最多可提供 $b_i$ 工时.

试问：如何安排生产，可使工厂每月所获利润最高？

**表 1.1.1**

| 工时 产品 / 序号 | 1 | 2 | … | $n$ | 每月最多工时 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| 1 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| $m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| 单位产品利润 | $c_1$ | $c_2$ | … | $c_n$ | |

**解**　设 $x_j$ 表示第 $j(1\leqslant j\leqslant n)$ 种产品月产量，$z$ 为总利润，依题意可建立模型

$$\mathrm{V}:\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \quad \text{（目标函数）}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i & (j=1,2,\cdots,n) \quad \text{（工时约束）}\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n) \quad \text{（符号约束）}\end{cases}$$

具体地，若 $\boldsymbol{c}=(2,3)$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\\ 4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}12\\ 8\\ 16\\ 12\end{pmatrix}$，则问题化为

$$\mathrm{V}:\max\ z=2x_1+3x_2$$

$$(*)\qquad \text{s. t.}\begin{cases}2x_1+2x_2\leqslant 12 & ①\\ x_1+2x_2\leqslant 8 & ②\\ 4x_1\leqslant 16 & ③\\ 4x_2\leqslant 12 & ④\\ x_1\sim x_2\geqslant 0 & ⑤\end{cases}$$

稍后，我们将介绍该问题的解法.

**例 1.1.2(饮食问题)**　某人欲从 $n$ 种食品中(每种食品含有 $m$ 种营养成分)选择在保证满足最低必需营养需要的前提下，使其花费最少的食品. 假设 $a_{ij}$ 为第 $j$ 种食品所含第 $i$ 种营养成分的数量，$b_i$ 为每天对第 $i$ 种营养的最低需要，$c_j$ 为第 $j$ 种食品单价；又设 $x_j$ 为选购第 $j$ 种食品的数量，其中 $1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant m$. 这样可建立数学模型