中学物理奥赛辅导
ZHONGXUE WULI AOSAI FUDAO

物理竞赛解题方法漫谈

WULI JINGSAI JIETI FANGFA MANTAN

江四喜　编著

中国科学技术大学出版社

中学物理奥赛辅导

物理竞赛解题方法漫谈

江四喜　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书作者是长期从事物理竞赛辅导工作的一线中学教师，对中学物理教学与物理奥赛辅导倾注了大量的热情与心血。本书紧紧围绕中学物理解题所涉及的各个方面进行归纳、提炼，特别是对物理竞赛解题中涉及的各种方法，在中学层面上进行了全面的梳理与论述，用大量的例题，阐述了解题方法的选择、解题过程的要点及需要克服的问题，整个论述生动活泼，给读者展示了清晰的解题思路与规范的解题过程。同时，书中给出了一定的训练习题，并配备了参考解答，可促使学生的解题能力得到实质性的提升。

本书可作为广大有志于物理竞赛的中学生提高素质能力的辅导书与工具书，也适合于准备参加各类高校自主招生考试的学生在进行物理备考时阅读，同时，也可作为中学物理教师的教学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

物理竞赛解题方法漫谈/江四喜编著.—合肥：中国科学技术大学出版社，2014.3
(中学物理奥赛辅导)
ISBN 978-7-312-03349-0

Ⅰ.物…　Ⅱ.江…　Ⅲ.中学物理课—题解　Ⅳ.G634.75

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 002587 号

出版　中国科学技术大学出版社
　　　　安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
　　　　http://press.ustc.edu.cn
印刷　合肥市宏基印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　787 mm×1092 mm　1/16
印张　32.5
字数　831 千
版次　2014 年 3 月第 1 版
印次　2014 年 3 月第 1 次印刷
印数　1—3000 册
定价　59.00 元

序言

从1984年开始，为了与国际中学生物理奥林匹克竞赛（简称IPhO）接轨，我国开始了由高中生参加的全国中学生物理竞赛（简称CPhO），之后每年一届，从未间断，至今已经举办了30届，参赛的高中学生累计近千万之众，这一活动为广大优秀的中学生提供了一个展示自己能力的平台。通过这一活动，不仅选拔了众多的优秀青少年物理人才，还极大地增强了广大中学生学习物理的兴趣，激发了他们的潜能，提高了他们的物理素质，同时也极大地推动了中学基础物理教学的发展。事实证明，中学奥林匹克物理竞赛已经得到广大师生和家长的欢迎，受到了社会各界的关注。

虽然从2014年起取消了中学生通过学科竞赛获奖而直接保送至大学的政策，但过去的保送生在大学学习过程中所表现出的卓越性，却得到了方方面面充分的肯定。可以预料，各学科竞赛中表现出色的优秀中学生，仍然会是各大学青睐的对象。这也是在取消保送生政策后，各高校用自主招生全盘接手了保送生的缘由所在。所以，保送生政策的改变并不会改变这一成熟的竞赛活动对中学生越来越具备吸引力的走向。

笔者从事物理奥赛辅导与教学工作已经十多年了，在我们这所并没有特别生源的中学里，在奥赛竞争激烈的环境中，笔者在最近连续三届的辅导中，均将学生送入了此项赛事的顶级赛场，他们是：

余超，2007年第8届亚洲中学生物理奥林匹克竞赛金牌得主；

靖礼，2010年第41届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌得主；

胡琦，2010年第11届亚洲中学生物理奥林匹克竞赛中国队队员（中国队因故未参赛）；

张成锴，2013年第44届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌得主，中国队第一名。

此外，还有更多的学生进入国家集训队及获得赛区一等奖，他们都通过保送和自主招生进入了全国知名高校。这些成绩的取得，当然首先要归功于学生个人的天赋与后天的努力，但同样也离不开科学、规范的指导与训练。

笔者在长期辅导学生的过程中，根据学生的学习特点，参阅与参考了许多相关书籍与网络文章，并结合自己的思考，整理与记录了一些比较典型的处理竞赛问题的方法，目的是想帮助从事竞赛学习的学生在积累了一定的知识后，能以最快的速度理解并掌握竞赛所需的分析问题的方法，以期提高他们“综合分析问题的能力以及其相应的解题能力”。

本书的素材积累时间始于十多年前，时间虽然很长，但由于本人选题范围及视角有

限，加之本人使用的自编资料并非只此一种，有些方法可能在其他的自编资料中有所强调，导致在本资料中被忽视了，因此论述就难免片面。在编写本书的过程中，虽然穷尽自己的能力，但在解题方法的归纳与整理上，肯定难免挂一漏万，甚至在理解上都存在偏差。只是在教学中将这些内容印发给学生后，反映良好，才敢斗胆呈现给大家。

非常感谢我历届物理小组的同学们，他们不仅将使用过程中发现的错误及时地反馈给我，而且在内容的修改中提出了很多建设性的意见。

如果读者在阅读本书时有相关的建议或更好的方法，在您方便的前提下，请将您的建议或方法发至：714537035@qq.com，本人将不胜感激。

最后，谢谢您阅读本书。

江四喜

2014年1月于武汉二中

目　录

绪论

物理学是一门基础自然科学，它所研究的是物质的基本结构、最普遍的相互作用、最一般的运动规律以及所使用的实验手段和思维方法。物理学不仅以其内容丰富、理论严谨及普遍适用的知识宝库，在近几个世纪里一直处于领头学科的地位；而且，更由于它的一整套思想方法和研究方法的精确巧妙、简洁有效和独具魅力，在科学技术的发展和人类社会的进步中发挥了巨大的推动作用。

研究物理的方法很多，观察与实验是最基本的方法，还有数学方法和逻辑思维的方法。这些科学方法都是无数科学家的智慧结晶，是物理学的精髓所在，而且这些方法比知识本身更富有创造价值，中学生在学习过程中学会方法比学到知识收获更大，时效更长，也只有让学生懂得并掌握物理学的思想方法和研究方法，才能使学生更主动、更灵活地理解物理知识、掌握物理知识和运用物理知识，逐步形成能力，并迁移、嫁接到其他领域，从而达到提高科学素质的目的，使其终身受益。

高中物理是普通高中科学学习领域的一门基础课程，旨在努力提高学生的科学素养，目标是有助于学生继续学习基本的物理知识与技能；体验科学探究过程，了解科学研究方法；增强创新意识和提高实践能力，培养探索自然、理解自然的兴趣与热情；了解物理学对科技进步以及文化、经济和社会发展的影响；为终身发展形成科学世界观和科学价值观打下基础。

然而，众所周知，在中学物理学中，作为规律性的核心内容，如定义、定律、定理之类的内容并不是很多，而且表述也都比较简洁、明了。但从总体上讲，物理又是中学阶段让很多学生闻之色变的学科，是最难学的学科之一。究其原因，主要是要学好物理，学习者必须具备较强的综合处理物理问题的能力。

虽然有许多中学生视学习物理如同负重登山，力不从心。但同样也有许多学生，特别是在各级重点中学中的学生，他们对物理世界充满着浓厚的兴趣与好奇，加之他们与生俱来的对物理问题极强的领悟能力，使得他们对常规教学中物理内容的学习游刃有余，他们渴望更富挑战与更能激发潜能的物理学习。

目前，全国中学生物理竞赛采用的赛制为预赛、复赛和决赛的三轮赛制。预赛只考理论内容，满分为 200 分，试题由全国竞赛委员会统一命制。理论上讲，全国所有的在校高中学生均可报名参加。在预赛中成绩优秀的学生可以参加本省复赛，但各省参加复赛的学生都有一定名额的限制。复赛包括理论和实验两部分，理论部分的试题由全国竞赛委员会统一命制，满分为 160 分；实验部分由各省、自治区、直辖市竞赛委员会命制，满分为 40 分。根据复赛中理论和实验的总成绩，授予相应的全国中学生物理竞赛××赛区一、二、三等奖，各省、自治区、直辖市的名额由全国竞赛委员会根据相关条例计算得出。同时，各省、自治区、直辖市根据复赛成绩选拔出参加全国决赛的省(市)代表队，参加全国中学生物理竞赛决赛。决赛亦分为理论考试与实验考试，均由全国竞赛委员会命题，理论部分满分为 140 分，实验

部分满分为60分，然后再根据两者的总成绩进行评奖。全国决赛根据不同的比例设置一、二、三等奖，并颁发证书和奖牌；此外，还设有与国际中学生物理竞赛的奖项相对应的总成绩最佳奖、理论成绩最佳奖、实验成绩最佳奖和女同学成绩最佳奖等单项特别奖。

随后，中国物理学会、中国科协根据自愿的原则，组织在决赛中获得一等奖和部分获得二等奖(总成绩靠前)的学生组成当年的国家集训队。不过，在决赛中获得一等奖的高二学生不得参加当年的集训，但集训资格保留至下一年。经过短暂的训练，从中选拔出当年参加国际中学生物理奥林匹克竞赛的5名中国队队员及当年参加亚洲中学生物理奥林匹克竞赛的8名中国队队员。

全国中学生物理竞赛的考试内容依据的是由全国中学生竞赛委员会颁布的《全国中学生物理竞赛内容提要》，这一内容与国际中学生物理竞赛大纲相接近，但它却远远超过了我国高中现行的教学内容。所以，在物理竞赛中能走到最后的学生，一定是那些在常规学习过程中学有余力、并具备着超前学习的自主性及能力的学生，而在一般情况下，即便是学生具备了良好的素质，在现行的高考环境下，若是没有家长、学校与老师的支持与配合，学生也很难达到竞赛所要求的知识与能力高度。事实上，能够最终在竞赛中获奖的学生，几乎都是那些投入了大量的时间，在老师的指导下，进行过竞赛"专业"培训的选手。

接触过物理竞赛的同学与老师都十分清楚，从事竞赛理论学习的难度主要来自两个方面：一是根据竞赛内容的要求，必须短时间内学习大量中学课本以外的知识内容；二是必须具备一定的综合分析问题的能力以及相应的解题能力。对于前者，同学们只要坚持不懈地努力，掌握那些知识并不会有太大的障碍，而真正的障碍则是能否将所学的知识用到处理具体的问题中去，即上述的第二点，学生"综合分析问题的能力以及相应的解题能力"能否得到体现。

很多同学将提高"综合分析问题的能力以及相应的解题能力"错误地理解为单一的做题，以为用题海战术的方式可以解决这一问题。明确地说，竞赛学习到了一定的时期，肯定是以做题为主，但仅有做题是不够的，必须总结、归纳、提炼相应的解题方法，明白"掌握一个解题方法比做一百道题更重要"的道理。

有过竞赛学习经历的同学都非常清楚，他们在整个竞赛学习阶段完成的题量应该有数千道之多，但具有代表性的习题大概也就500道左右，也就是说，只要掌握了这几百道题所涉及的解题方法，就足以应对那无穷无尽的题海了。所以，尽快地掌握解题方法，是学好竞赛内容、提高成绩最有效的"捷径"。

全国中学生物理竞赛委员会对物理竞赛试题的命题原则作了明确的说明，即要求答题者不使用较为复杂的高等数学知识便能处理相关的物理问题。不过，由于竞赛的命题老师基本上是大学的物理教授，且由于竞赛承办单位的轮换制，命题老师完全不固定，各命题老师对竞赛委员会给出的命题原则的理解不尽相同，对竞赛知识内容的要求理解也不相同，而对试题难度的把握，不同年度也相去甚远，因此，不同年份的竞赛试题的难易差别是很大的，而且，有的试题明显超出了竞赛要求所给出的范围。但多年的竞赛试题表明，这些老师的命题包含了一个基本特征，就是对大学普通物理学的内容进行初等化处理，其难点除了对知识的把握外，大多体现在要求中学生在不使用复杂的高等数学知识的前提下，能用中学阶段所掌握的知识对普通物理学的问题进行处理。因此，同学们在解答这类试题的过程中，在认清模型结构，作出过程分析，找准物理的临界问题及隐含条件的同时，还必须综合运用对称、微元、等效、类比、联想、守恒、叠加、图像、建模等物理思想方法，对问题进行分析与处理。

另外，试卷的结构与题型也是不固定的。但主要题型为计算题，选择题基本上只出现在预赛试卷中，填空题出现在复赛与决赛中的年份也很少。

从竞赛过程的三赛制及上述的命题内容与试卷的结构不难发现，我们已经很难从应试技巧上来针对竞赛进行相关的模拟训练，只能是通过全面地掌握知识，努力提高自身处理问题的能力方面来进行相应的准备。

笔者从事中学物理竞赛十余年了，一直留心解题方法的记录与整理，并将其用于自己的教学辅导中，以期提高学生"综合分析问题的能力以及相应的解题能力"。

在辅导学生的过程中，本人深感解题方法的挖掘是难有止境的。很多时候，我们根本无法用单一的方法来处理所有的问题，而很多方法的应用又依赖于一些特定的前提；很多时候，我们想明确解题所用的是什么方法，却又发现方法之间其实是难以分割的；很多时候，我们找到了某个问题看起来是很成熟的解法，但在使用过程中又冒出了令人耳目一新的解法；很多时候，一道题可以有多种解法；很多时候，一道题的完整解答可能涉及多种思想方法。我们可以通过下述的两道例题来体会这一点。

例 1　一蚂蚁离开巢穴沿直线向外爬行，它的速度大小 v 与到蚁巢中心的距离 l 成反比，当蚂蚁爬到距中心 $l_1 = 1\ \mathrm{m}$ 的 A 处时，其速度大小为 $v_1 = 2\ \mathrm{cm/s}$，试问蚂蚁继续由 A 爬到距中心 $l_2 = 2\ \mathrm{m}$ 的 B 处要多长时间？

这是一道全国中学生物理竞赛的经典试题，几乎所有的竞赛辅导资料都将此题收录其中，我亦将此题多次用于不同年级、不同阶段学生的检测，几乎所有的学生都能给出正确的解答，这些解答方式基本上都来源于各种资料，基本上都是一些成熟的、经典的解法。几种常见的解法如下。

解法 1（微元法）　如图 0.1，将 AB 之间的距离等分为 $N(N \to \infty)$ 份，则每一份的大小为

$$\Delta l = \frac{l_2 - l_1}{N}$$

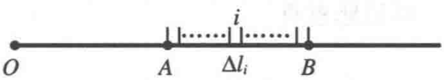

图 0.1

由于 $N \to \infty$，所以每一份的大小都趋近于零，则蚂蚁在每一等份中的运动都可视为是匀速的。

我们考查蚂蚁在第 i 份运动时所用的时间 t_i。

依题意，在第 i 份，蚂蚁爬行的速度满足

$$v_i l_i = v_1 l_1 \quad 即 \quad v_i = \frac{v_1 l_1}{l_i}$$

式中 $l_i = l_1 + i\Delta l$，则蚂蚁爬过第 i 段所用的时间

$$t_i = \frac{\Delta l}{v_i} = \frac{l_2 - l_1}{N} \cdot \frac{l_i}{v_1 l_1}$$

所以，蚂蚁从 A 爬行到 B 的总时间

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{N} t_i = \frac{l_2 - l_1}{N} \cdot \frac{1}{v_1 l_1} \sum_{i=1}^{N} (l_1 + i\Delta l) \\ &= \frac{l_2 - l_1}{v_1} \left(\frac{l_2 - l_1}{N}\right)^2 \cdot \frac{1}{v_1 l_1} \sum_{i=1}^{N} i \\ &= \frac{l_2 - l_1}{v_1} + \left(\frac{l_2 - l_1}{N}\right)^2 \cdot \frac{1}{v_1 l_1} \cdot \frac{N(N+1)}{2} \end{aligned}$$

当 $N\to\infty$ 时，有

$$t=\frac{l_2-l_1}{v_1}+\frac{(l_2-l_1)^2}{2v_1l_1}=\frac{l_2^2-l_1^2}{2v_1l_2}=75\ \text{s}$$

解法 2（图像法）　因为蚂蚁爬行的速度与蚂蚁到巢穴的距离成反比，即有 $v\propto\frac{1}{l}$，考虑到蚂蚁在爬行中的每一小段所用的时间为 $t_i=\frac{\Delta l_i}{v_i}$，我们不妨在 $\frac{1}{v}$ - l 图像中来研究蚂蚁爬行的耗时问题。

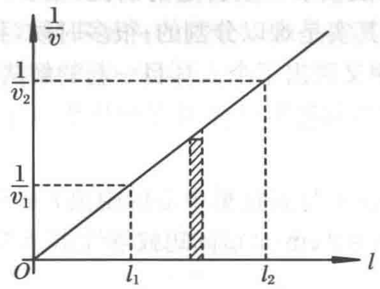

图 0.2

因蚂蚁爬行时有 $v\propto\frac{1}{l}$，则蚂蚁爬行的 $\frac{1}{v}$ - l 图像为一条过原点的直线，如图 0.2 所示。对于蚂蚁爬行过程中的任一微小段，其运动均可视为匀速的，则在该小段所用时间为 $t_i=\frac{\Delta l_i}{v_i}$，即图中 Δl_i 与 $\frac{1}{v_i}$ 的乘积，其大小为图中阴影部分的面积。考虑到蚂蚁爬行的总时间为每一小段时间的累加，即可得总时间为 $\frac{1}{v}$ - l 图像在 $l_1\sim l_2$ 区间段与 l 轴所围的面积，则

$$t=\frac{1}{2}(l_1+l_2)\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right)$$

再依题意有

$$v_1l_1=v_2l_2$$

由上述两式即可得

$$t=\frac{l_2^2-l_1^2}{2v_1l_2}=75\ \text{s}$$

解法 3（类比法）　由题意知 $vl=v_1l_1$，即 $\frac{1}{v}=\frac{1}{v_1l_1}\cdot l$。

根据速度的定义 $v=\frac{\Delta l}{\Delta t}$，得

$$\frac{1}{v}=\frac{\Delta t}{\Delta l}$$

我们来考察运动的有关规律：速度的定义为 $v'=\frac{\Delta s'}{\Delta t'}$，当速度满足 $v'=at'$ 时，有 $s'=\frac{1}{2}at'^2$。

我们将蚂蚁的运动与匀变速运动进行类比，类比后对应的物理量如下：

$$\frac{1}{v}\sim v',\quad \Delta t\sim\Delta s',\quad \frac{1}{v_1l_1}\sim a,\quad l\sim t'$$

因在匀变速运动中有 $s'=\frac{1}{2}at'^2$，故在蚂蚁的运动过程中有

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v_1 l_1} l^2$$

故蚂蚁从 A 到 B 共用时

$$\Delta t = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2 v_1 l_2} = 75\ \text{s}$$

解法 4（积分法）　因蚂蚁爬行时有 $v \propto \frac{1}{l}$，结合 v_1 与 l_1 的大小，易得

$$v = \frac{v_1 l_1}{l}$$

由 $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}l}{v}$ 可得

$$\int_0^t \mathrm{d}t = \frac{1}{v_1 l_1} \int_{l_1}^{l_2} l \mathrm{d}l$$

即

$$t = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2 v_1 l_2} = 75\ \text{s}$$

学生能掌握并正确应用上述解法当然是非常不错的表现，但到目前为止，在学生的正确解答中，让我印象最深的，并不是上述这些一般的竞赛资料上能够找到的、既已成型的、大家都非常熟悉的解题方法，而是一位学生在考试过程中即兴产生的、非一般的解题方法，那是一位参加竞赛培训不久，还未系统学习竞赛内容的学生在测试中给出的解答，不妨叙述如下。

解法 5　我们将蚂蚁从 $l_1 = 1\ \text{m}$ 的 A 处爬到距中心 $l_2 = 2\ \text{m}$ 的 B 处这段距离依次分为 10 小段，每一小段的大小为 0.1 m，由于每一段的距离较小，我们取这一小段的中间位置的速度为该段的平均速度，我们计算出每一小段的时间，然后累加，即可得到此种情况下的总时间。根据 $v = \frac{v_1 l_1}{l} = \frac{200}{l}$，$\Delta t_i = \frac{\Delta l_i}{v}$，列表计算，如表 0.1 所示。

表 0.1

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
速度 v_i(cm/s)	$\frac{40}{21}$	$\frac{40}{23}$	$\frac{40}{25}$	$\frac{40}{27}$	$\frac{40}{29}$	$\frac{40}{31}$	$\frac{40}{33}$	$\frac{40}{35}$	$\frac{40}{37}$	$\frac{40}{39}$
时间 Δt_i(s)	$\frac{21}{4}$	$\frac{23}{4}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{29}{4}$	$\frac{31}{4}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{35}{4}$	$\frac{37}{4}$	$\frac{39}{4}$

于是有

$$t = \sum \Delta t_i = \frac{1}{4} \times \frac{(21 + 39) \times 10}{2}\ \text{s} = 75\ \text{s}$$

为了验证上述方法的正确性，我们不妨将上述分段方式进一步小量化，如将其分为 20 小段，列表计算如表 0.2 所示。

表 0.2

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
速度 v_i(cm/s)	$\frac{80}{41}$	$\frac{80}{43}$	$\frac{80}{45}$	$\frac{80}{47}$	$\frac{80}{49}$	$\frac{80}{51}$	$\frac{80}{53}$	$\frac{80}{55}$	$\frac{80}{57}$	$\frac{80}{59}$
时间 Δt_i(s)	$\frac{41}{8}$	$\frac{43}{8}$	$\frac{45}{8}$	$\frac{47}{8}$	$\frac{49}{8}$	$\frac{51}{8}$	$\frac{53}{8}$	$\frac{55}{8}$	$\frac{57}{8}$	$\frac{59}{8}$
序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
速度 v_i(cm/s)	$\frac{80}{61}$	$\frac{80}{63}$	$\frac{80}{65}$	$\frac{80}{67}$	$\frac{80}{69}$	$\frac{80}{71}$	$\frac{80}{73}$	$\frac{80}{75}$	$\frac{80}{77}$	$\frac{80}{79}$
时间 Δt_i(s)	$\frac{61}{8}$	$\frac{63}{8}$	$\frac{65}{8}$	$\frac{67}{8}$	$\frac{69}{8}$	$\frac{71}{8}$	$\frac{73}{8}$	$\frac{75}{8}$	$\frac{77}{8}$	$\frac{79}{8}$

同样有

$$t = \sum \Delta t_i = \frac{1}{8} \times \frac{(41 + 79) \times 20}{2} \text{ s} = 75 \text{ s}$$

由此可以确定，蚂蚁从 A 处爬到 B 处所需时间为 75 s。

的确，“解法 5”还存在着理论不够充分与严谨的不足，但从学生原创的解法中我们不难发现学生用到了数据的表格处理法、平均的思想、小量分析的思维、递推的思想等，并且从卷面上看，这些都是学生原创的，是学生思维能力的展现。而且，从学生的解答过程出发，我们还可作相应的引申，得到一个运动学的推论，即：当物体运动的速度大小与距某点距离的大小成反比时，则在某一运动过程中，其中间位置的速度等于这一运动过程中的平均速度。

我记得，我当时在试卷上的留言是：哇，太神奇了！

例 2　三个大小、材质完全相同的小行星，如图 0.3 所示，行星(a)上有一个以表面 A 点和球心 O 的很窄的、试验用的、内壁光滑的矿井；行星(b)上有一个以表面 A 点和球心 O 为直径的球形空腔；行星(c)因某种原因被运走了半个行星，只剩下一个规则的半球体。

(1) 在(a)，(b)两行星表面 A 点处无初速地掉入一小绿人，试计算，在两颗行星中，从 A 落至球心 O 所用的时间之比以及撞击 O 点的速度之比。

(2) 在行星(c)上，若在原来球形小行星表面的重力加速度为 g_0，问余下半球圆形表面中心位置的重力加速度 g 为多大？

这是一道在一定背景下给出了一系列问题的试题，毫无疑问，解答它离不开程序思路，即一个一个问题地逐步处理，我们先看解答。

(1) 我们首先讨论试验井的情况。

行星的密度为 ρ，半径为 R，小绿人的质量为 m。当一个质点处于球体内部时，我们设想球体是由一个个均匀的球壳组成，由于质量分布均匀的球壳对其内部质点的作用力为零，加之试验井的体积可忽略不计，则不难理解，质点所受的引力为其所在位置到球心的距离为半径的球体对它的作用力[如图 0.3(d)所示]。所以，小绿人在试验井中下落的过程中所受到的引力大小为

$$F = G\frac{M(r)m}{r^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho G m r, \quad r \leqslant R$$

因此，小绿人在试验井中下落的过程中所受到的引力与到小行星中心的距离成正比，并

总是指向其球心。所以,小绿人在下落的过程中受到的平均力为

$$\bar{F} = \frac{1}{2}F_m = \frac{2}{3}\pi\rho GmR$$

对小绿人的下落过程应用动能定理可得

$$\bar{F}R = \frac{1}{2}mv_1^2$$

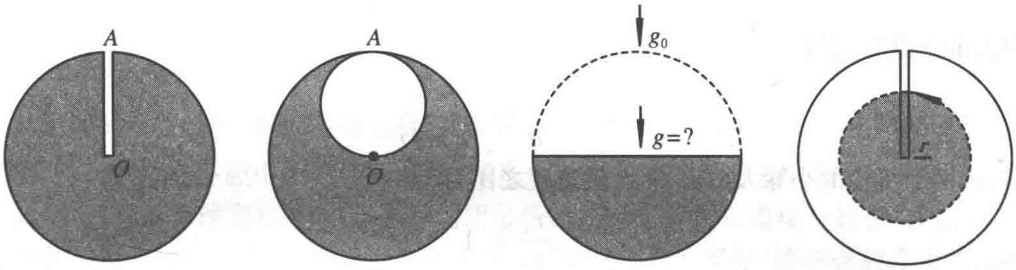

图 0.3

即

$$\frac{2}{3}\pi\rho GmR^2 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

由此可得,从试验井中落下的小绿人撞击球心的速度为

$$v_1 = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}}$$

另一方面,由于小绿人在下落过程中的受力满足:$F\propto r$,且总是指向地心,因此小绿人的运动是简谐运动,从开始下落到地心的时间为$\frac{1}{4}$个周期,即

$$t_1 = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}})$$

式中 $k=\frac{4}{3}\pi\rho Gm$,所以

$$t_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$$

下面我们来讨论第二个事件发生的情况。如图 0.4 所示此时小绿人已经在小行星内部开采了八分之一的材料,当小绿人从入口处落下时,将沿直线撞向球心 O,在这一过程中小绿人的受力可这样求得,设想将靠近挖走的部分用钛填充,则小绿人在下落的过程中受到的力为整个行星对他的引力与填充部分对他的引力之差,所以,当小绿人距球心 O 为 r 时,距填充球的球心的距离为 $r' = r-\frac{R}{2}$,则小绿人的受力为

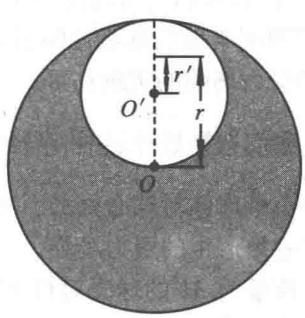

图 0.4

$$F = \frac{4}{3}\pi\rho Gmr - \frac{4}{3}\pi\rho Gm\left(r - \frac{R}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi\rho GmR$$

显然，在这种情况下，小绿人在下落过程中所受到的力为恒力，与距球心的距离无关，即小球在下落过程中做匀加速直线运动，其加速度 $a = \frac{F}{m} = \frac{2}{3}\pi\rho GR$，则小绿人的撞击速度为

$$v_2 = \sqrt{2aR} = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}}$$

小绿人的下落时间为

$$t_2 = \frac{v_2}{a} = \sqrt{\frac{3}{\pi\rho G}}$$

所以，这两个可怜的小绿人撞击 O 点的速度之比为

$$\frac{v_1}{v_2} = 1$$

从 A 点掉到 O 点的时间之比为

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\pi}{4}$$

(2) 先求 g_0。

由 $\frac{GMm}{R^2} = mg_0$，知

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi GR\rho$$

下面求半球体圆面中心处的 g。

把整个半球体分成 n 个同心的、等厚的半球壳，每个半球壳的厚度为 $\frac{R}{n}$（$n \to \infty$）。对于其中任意一个球壳，讨论其对球心处引力场强的贡献：

（ⅰ）与质量的关系：正比于球壳的质量 ΔM，即正比于该球壳的半径的平方（r^2）；

（ⅱ）与距离的关系：与距离的平方成反比，即 $\propto \frac{1}{r^2}$。

由此可知，球壳对球心处的引力场与球壳的半径无关，则这 n 个等厚的球壳对球心 O 点处的引力场强的贡献是相等的。

所以，我们只需选出一个球壳作为代表，计算出它对球心 O 点处场强的贡献，再乘上 n，即得到半球的球心处的引力场强；或者，将所选出的半球的质量乘以 n，再计算其对球心 O 的引力场强的贡献亦可。

我们选择最外层的、半径为 R 的那个半球壳为代表，该球壳的质量为 $\Delta M = 2\pi R^2\frac{R}{n}\rho$，则整个半球体对球心处的引力场强等效为质量为 $M' = n\Delta M = 2\pi R^3\rho$、半径为 R 的球壳对其球心处产生的引力场强。

质量为 M' 的球壳对 O 点处单位质量的质点的作用力等于处于 O 点的单位质量的质点对半球壳的作用力，而这一作用力的大小通过与压强对半球体的作用情况进行类比可知，处在 O 点处的单位质量的质点对半球体的作用力等于单位质量的质点对半球壳单位面积的