

2016

# 挑战压轴题

## 高考数学

主编 尹德好 卜照泽

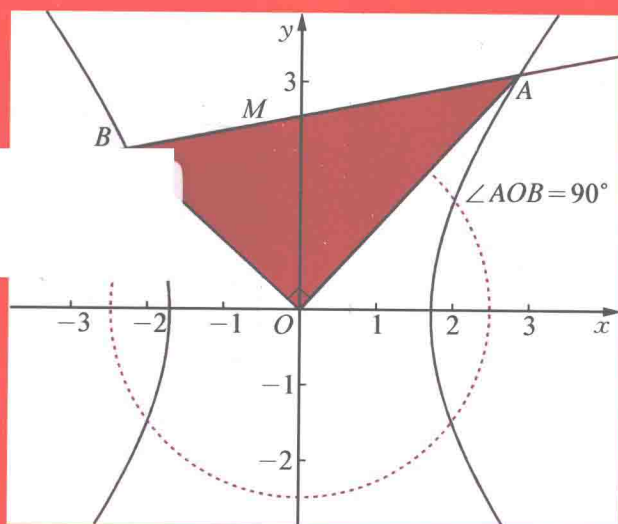
### 轻松入门篇

(修订版)

这里有一群学霸



微信号: tiaozhanyazhouti



华东师范大学出版社  
全国百佳图书出版单位

# 挑战压轴题

高 考 数 学

轻松入门篇

(修订版)

主 编 尹德好 卜照泽  
编写者 张丽华 陈国平

## 图书在版编目(CIP)数据

挑战压轴题. 高考数学. 轻松入门篇/尹德好, 卜照泽主编. —修订本. —上海: 华东师范大学出版社, 2015. 4  
ISBN 978-7-5675-3428-5

I. ①挑… II. ①尹…②卜… III. ①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 083736 号

## 挑战压轴题·高考数学:轻松入门篇

主 编 尹德好 卜照泽  
总 策 划 倪 明  
项目编辑 徐 平  
组稿编辑 徐 平  
审读编辑 罗秀苹  
装帧设计 高 山  
漫画设计 孙丽莹 胡 艺  
责任发行 王 祥

出版发行 华东师范大学出版社  
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062  
网 址 [www.ecnupress.com.cn](http://www.ecnupress.com.cn)  
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105  
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887  
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口  
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 江苏句容市排印厂  
开 本 787×1092 16 开  
印 张 13  
字 数 336 千字  
版 次 2015 年 8 月第 3 版  
印 次 2015 年 8 月第 1 次  
印 数 24000  
书 号 ISBN 978-7-5675-3428-5/G·8210  
定 价 26.00 元

出 版 人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

## 致亲爱的读者

亲爱的读者朋友,看到本书封面上的二维码了吗?一定要扫一扫加“关注”哦!那是我们开通的《挑战压轴题》专属微信公众号(微信号:tiaozhanyazhouti).关注了它,你不仅可以随时随地反馈图书的使用情况,还可以享受我们提供的一系列增值服务,比如说“学霸经验介绍”、“考试技巧与攻略”等等,并且可以与全国各地众多备考学子进行交流哦!!

无论中考还是高考,能拉开差距的其实只有压轴题.

但压轴题有点难,如何攻关?

为了帮助备考的莘莘学子攻克压轴题,圆名校梦,我们邀请了众多一线名师,打造了这套《挑战压轴题》丛书,深受考生欢迎.本丛书涉及中考、高考的数学、物理、化学三门学科,共计18种.

### 3步搞定压轴题

#### 1. 轻松入门篇

- 适合初一、初二、高一、高二及中、高考第一轮复习使用;
- 难度由浅入深、层层推进.

↓  
找思路

#### 2. 精讲解读篇

- 有配套光盘,适合初三、高三复习使用;
- 主要以老师详细解析当年真题为主;
- 旨在帮助学生理解、消化.

↓  
学诀窍

#### 3. 强化训练篇

- 适合备考前3个月冲刺使用;
- 主要以练习题为主;
- 配详细的答案解析;
- 试题主要由真题、模拟题、创新题构成.

↓  
练速度

如果你想搞定压轴题,不妨按照我们的“找思路→学诀窍→练速度”3步骤进行训练哦!

愿这套备考丛书能够帮助你顺利通过中高考升学考试,迈入新的理想校园.  
挑战压轴题,轻松进名校!

## 编写说明

高考数学压轴题是学生既畏惧又难以放弃的一块“鸡肋”，很多同学想，反正也不指望考清华、北大，又没必要考满分，所以在复习备考过程中彻底放弃压轴题。确实，压轴题信息量大、文字多、审题难；或因数学情景新颖，或有时条件隐蔽，甚至要经过推理计算才能看出其中的特殊性；或因过程多，情景变化不断，导致列出的方程多，数学解题过程复杂，甚至有的时候需要用到不常用的数学方法，难以想到。但不管怎样，放弃压轴题绝对不是良策。

为了帮助同学们熟悉压轴题的特征及题型，找到解决这类题的一般程序和方法，化解做题难度，并通过一定的训练提升做题的信心，我们把原本一道道很难的压轴题，通过分散它们的难点，化大题、难题为小题、容易题。本书所选择的压轴题其实是高考中 30% 的较难题，选择、填空、计算题型都有，针对面有所扩大。让读者全面掌握压轴题的命题意图、三维要求及解题策略。为此，我们在原有系列的基础上继续拓展编写了《挑战压轴题》之轻松入门篇和强化训练篇。

《挑战压轴题》之轻松入门篇按知识网络和数学方法并结合压轴题热点题型进行编排，分解答题型压轴题和客观型压轴题。对每一小专题先作解法综述，再以分级例题的方式逐步引出解题之方法策略。从基础题开始，建立解题基础，再对提高题进行解题分级转化，相当于把一道大题分成几道小题，减少了步长，化解了难度。再以压轴题为例题，提出难点分化策略，展示满分解答，帮助学生建立起解决问题的思维程序，让人觉得一道综合题无非是几道小题、基本题的汇集整合。掌握了做题的程序，也就减少了畏惧心理。最后配置真题试做，所选题目有层次，供学生逐级训练，以便最终能直击压轴题。

《挑战压轴题》之强化训练篇纯粹作为配套训练使用，题目来源分为三类，包括真题、模拟题、创新题，其设置比例大概为 5 : 3 : 2。真题主要从近 5 年各地高考试卷中遴选出来，模拟题主要为近两年各地考前的一模、二模试卷，具有一定的典型性。创新题主要是我们根据命题趋势对一些题目进行适当的改编，建议学生在考前 3 个月有计划地进行练习。在做题过程中，先不要看答案，独立思考完成，然后根据自己写的步骤并参照答案进行查漏补缺。在彻底弄懂的基础上通过这样透彻的练习，才能提高准确性和做题速度。

最后，由于作者水平有限，对书里存在的问题，欢迎读者批评指正。

编者

# 目 录

## 第一部分 解答型压轴题 / 1

### 第 1 章 解析几何 / 1

基本问题 1 求已知曲线的标准方程 / 2

基本问题 2 求参数取值范围 / 6

基本问题 3 最值问题 / 12

基本问题 4 定点、定值问题 / 18

基本问题 5 求轨迹方程问题 / 25

### 第 2 章 函数 / 30

基本问题 1 讨论函数的单调性问题 / 31

基本问题 2 求函数的极值、最值问题 / 38

基本问题 3 恒成立、恰成立、能成立问题 / 48

基本问题 4 函数零点问题 / 56

### 第 3 章 数列 / 63

基本问题 1 判断或证明等差、等比数列 / 64

基本问题 2 求数列的通项公式 / 68

基本问题 3 数列求和 / 75

基本问题 4 研究数列的特性 / 80

基本问题 5 数列中的不等式问题 / 87

### 第 4 章 一般能力问题 / 95

一般能力 1 学习能力 / 96

一般能力 2 探究能力 / 103

一般能力 3 应用能力 / 115

一般能力 4 创新能力 / 121

## 第二部分 客观型压轴题 / 129

基本方法 1 直接法 / 131

基本方法 2 特殊值法 / 139

基本方法 3 数形结合 / 145

基本方法 4 等价转化法 / 151

基本方法 5 分析法 / 156

压轴题转化训练答案 / 164

# 第一部分

## 解答型压轴题

### 第1章 解析几何





## 基本问题 1 求已知曲线的标准方程

求已知曲线(如直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线)的标准方程,可以有效地考查学生对圆锥曲线基本思想和基本方法掌握情况.同时此类问题可以在直线与圆锥曲线、圆锥曲线间设计综合题目,还可以很好地考察学生的分析问题和解决问题能力,因此常常作为高考压轴题出现.

### 基本题高考分布

在 2012—2014 年全国高考压轴题中,可转化为求已知曲线的标准方程的考题分布规律如下:

|      | 2012  | 2013  |       | 2014 |    |    |     |    |     |       |
|------|-------|-------|-------|------|----|----|-----|----|-----|-------|
| 省(市) | 陕西    | 重庆    | 湖南    | 全国   | 湖南 | 福建 | 陕西  | 辽宁 | 重庆  | 新课标 1 |
| 理科   |       | 21(2) | 21(2) | 21   |    | 19 | 20② | 20 | 21① | 20    |
| 文科   | 20(2) |       | 20(2) | 21   | 20 |    | 20  | 20 | 21  |       |

### 基本题解法综述

求已知曲线(如直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线)的标准方程问题,常用解法如下:



### 基本题解法示例

求圆锥曲线方程通常使用待定系数法,若能根据条件发现符合圆锥曲线定义时,则用定义法.

一、待定系数法:求已知曲线类型的曲线方程问题,常采用待定系数法,即“先定形,后定式,再定量”.

定形——指的是二次曲线的焦点位置与对称轴的位置;

定式——根据“形”设方程的形式,注意曲线系方程的应用,如当椭圆的焦点不确定在哪个坐标轴上时,可设方程为  $mx^2 + ny^2 = 1 (m > 0, n > 0)$ ;

定量——由题设中的条件找到“式”中特定系数的等量关系,通过解方程得到量的大小.

例 1 求圆心在  $y$  轴上,半径为 1,且过点  $(1, 2)$  的圆的方程.

解 设圆心坐标为  $(0, b)$ ,则由题意知  $\sqrt{(0-1)^2 + (b-2)^2} = 1$ ,解得  $b = 2$ ,故圆的方程为  $x^2 + (y-2)^2 = 1$ .

点评 求圆的方程可采取“待定系数法”,不论圆的标准方程还是一般方程,都有三个字母  $(a, b, r$  或  $D, E, F)$  的值需要确定,因此需要三个独立的条件.题设中给出了确定圆的条件:

(1)半径、(2)圆心位置、(3)过定点,故可设出圆的标准方程.

## 二、用定义法求曲线的方程.

求直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线的标准方程也可以借助其定义来确定方程中的系数.

**例2** 求以椭圆  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$  的焦点为焦点,且经过点  $P(1, \frac{2\sqrt{10}}{3})$  的椭圆的标准方程.

**解** 由已知:  $c = \sqrt{12-8} = 2$ , 所求椭圆焦点为  $F_1(2, 0)$ ,  $F_2(-2, 0)$ .

(解法一)因  $P$  点在椭圆上,由椭圆定义:

$$2a = |PF_1| + |PF_2| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)^2} + \sqrt{3^2 + \left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)^2} = \frac{7}{3} + \frac{11}{3} = 6,$$

得  $a = 3$ ,  $b = \sqrt{5}$ . 所求椭圆方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ .

(解法二)设所求椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 则  $\begin{cases} a^2 = b^2 + 4, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{40}{9b^2} = 1. \end{cases}$  解得:  $b^2 = 5$ ,  $a^2 = 9$ .

故所求椭圆方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ .

**点评** 求椭圆的标准方程,只需确定  $a, b$  的值.解法一用了椭圆的定义求椭圆方程.解法二用了待定系数法求椭圆方程.



## 压轴题转化分析

**高考真题 1.** (2014 全国文理)已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 直线  $y = 4$  与  $y$  轴的交点为  $P$ , 与  $C$  的交点为  $Q$ , 且  $|QF| = \frac{5}{4} |PQ|$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 过  $F$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A, B$  两点, 若  $AB$  的垂直平分线  $l_1$  与  $C$  相交于  $M, N$  两点, 且  $A, M, B, N$  四点在同一圆上, 求  $l$  的方程.

**[分析与转化]** 求曲线的标准方程一般用待定系数法, 先定式、再定量, (1) 曲线  $C$  的标准方程已存在, 只需用条件 “ $|QF| = \frac{5}{4} |PQ|$ ” 求  $p$  的值. (2) 由已知条件设  $l$  的方程为  $x = my + 1 (m \neq 0)$  可回避讨论, 再用已知条件求  $m$ .

**解** (1) 设  $Q(x_0, 4)$ , 代入  $y^2 = 2px$ , 得  $x_0 = \frac{8}{p}$ , 所以  $|PQ| = \frac{8}{p}$ ,  $|QF| = \frac{p}{2} + x_0 = \frac{p}{2} + \frac{8}{p}$ .

由题设得  $\frac{p}{2} + \frac{8}{p} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{p}$ , 解得  $p = -2$  (舍去) 或  $p = 2$ , 所以  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ .

(2) 依题意知  $l$  与坐标轴不垂直, 故可设  $l$  的方程为  $x = my + 1 (m \neq 0)$ .

代入  $y^2 = 4x$ , 得  $y^2 - 4my - 4 = 0$ .

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则  $y_1 + y_2 = 4m$ ,  $y_1 y_2 = -4$ .

故线段  $AB$  的中点为  $D(2m^2 + 1, 2m)$ ,  $|AB| = \sqrt{m^2 + 1} |y_1 - y_2| = 4(m^2 + 1)$ .

又直线  $l_1$  的方程为  $x = -\frac{1}{m}y + 2m^2 + 3$ .

将上式代入  $y^2 = 4x$ , 并整理得  $y^2 + \frac{4}{m}y - 4(2m^2 + 3) = 0$ .

设  $M(x_3, y_3)$ ,  $N(x_4, y_4)$ , 则  $y_3 + y_4 = -\frac{4}{m}$ ,  $y_3 y_4 = -4(2m^2 + 3)$ .

故线段  $MN$  的中点为  $E\left(\frac{2}{m^2} + 2m^2 + 3, -\frac{2}{m}\right)$ .

$$|MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} |y_3 - y_4| = \frac{4(m^2 + 1)\sqrt{2m^2 + 1}}{m^2}.$$

由于线段  $MN$  垂直平分线段  $AB$ , 故  $A$ 、 $M$ 、 $B$ 、 $N$  四点在同一圆上等价于  $|AE| = |BE| = \frac{1}{2}|MN|$ .

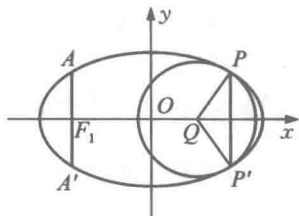
从而  $\frac{1}{4}|AB|^2 + |DE|^2 = \frac{1}{4}|MN|^2$ , 即

$$4(m^2 + 1)^2 + \left(2m + \frac{2}{m}\right)^2 + \left(\frac{2}{m^2} + 2\right)^2 = \frac{4(m^2 + 1)^2(2m^2 + 1)}{m^4},$$

化简得  $m^2 - 1 = 0$ , 解得  $m = 1$  或  $m = -1$ .

故所求直线  $l$  的方程为  $x - y - 1 = 0$  或  $x + y - 1 = 0$ .

**高考真题 2.** (2013 重庆理) 如图, 椭圆的中心为原点  $O$ , 长轴在  $x$  轴上, 离心率  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 过左焦点  $F_1$  作  $x$  轴的垂线交椭圆于  $A$ 、 $A'$  两点,  $|AA'| = 4$ .



(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 取垂直于  $x$  轴的直线与椭圆相交于不同的两点  $P$ 、 $P'$ , 过  $P$ 、 $P'$  作圆心为  $Q$  的圆, 使椭圆上的其余点均在圆  $Q$  外. 若  $PQ \perp P'Q$ , 求圆  $Q$  的标准方程.

**[分析与转化]** (1) 略. (2) 欲求圆  $Q$  的标准方程, 需求圆心坐标和圆的半径. 关键是将条件“使椭圆上的其余点均在圆  $Q$  外”, 转化为“ $P$  和  $P'$  是椭圆上到  $Q$  的距离最小的点.”

**解** (1) 由题意知点  $A(-c, 2)$  在椭圆上, 则  $\frac{(-c)^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1$ , 从而  $e^2 + \frac{4}{b^2} = 1$ , 由  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$  得  $b^2 = \frac{4}{1-e^2} = 8$ , 从而  $a^2 = \frac{b^2}{1-e^2} = 16$ , 故该椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ .

(2) 由椭圆的对称性, 可设  $Q(x_0, 0)$ , 又设  $M(x, y)$  是椭圆上任意一点, 则

$$\begin{aligned} |MQ|^2 &= (x - x_0)^2 + y^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + 8\left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \\ &= \frac{1}{2}(x - 2x_0)^2 - x_0^2 + 8, \quad x \in [-4, 4]. \end{aligned}$$

设  $P(x_1, y_1)$ , 由题意,  $P$  是椭圆上到  $Q$  的距离最小的点, 因此, 上式当  $x = x_1$  时取得最小值, 又因  $x_1 \in (-4, 4)$ , 所以上式当  $x = 2x_0$  时取得最小值, 从而  $x_1 = 2x_0$  ①

且  $|QP|^2 = 8 - x_0^2$ .

因为  $PQ \perp P'Q$  且  $P'(x_1, -y_1)$ , 所以  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{P'Q} = (x_0 - x_1, -y_1) \cdot (x_0 - x_1, y_1) = 0$ ,

即  $(x_1 - x_0)^2 - y_1^2 = 0$  ②, 将  $\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{8} = 1$  及  $x_1 = 2x_0$  代入②得  $\frac{1}{4}x_1^2 - 8\left(1 - \frac{x_1^2}{16}\right) = 0$ , 解得

$$x_1 = \pm \frac{4\sqrt{6}}{3}, x_0 = \frac{x_1}{2} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}, \text{从而 } |QP|^2 = 8 - x_0^2 = \frac{16}{3}.$$

故这样的圆有两个,其标准方程分别为  $\left(x + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{3}$ ,  $\left(x - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{3}$ .

**高考真题 3.** (2012 陕西) 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 椭圆  $C_2$  以  $C_1$  的长轴为短轴, 且与  $C_1$  有相同的离心率. (1) 求椭圆  $C_2$  的方程; (2) 设  $O$  为坐标原点, 点  $A, B$  分别在椭圆  $C_1$  和  $C_2$  上,  $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$ , 求直线  $AB$  的方程.

**[分析与转化]** (1) 略. (2) 欲求直线  $AB$  的方程, 用待定系数法“先定式”, 根据已知可设直线  $AB$  的方程为  $y = kx$ , 此处  $k$  为待定系数. “再定量”确定  $k$  的值. 由  $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$  可得方程从而可确定  $k$  的值.

解 (1)  $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ .

(2) 椭圆  $C_2$  的方程为  $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ , 设  $A, B$  两点坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ .

由  $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$ , 知  $O, A, B$  三点共线且不在  $y$  轴上, 因此可设直线  $AB$  的方程为  $y = kx$ .

将  $y = kx$  代入  $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 得  $x_1^2 = \frac{4}{1+4k^2}$ .

将  $y = kx$  代入  $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ , 得  $x_2^2 = \frac{16}{4+k^2}$ .

由  $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$ , 得  $x_2^2 = 4x_1^2$ , 即  $\frac{16}{4+k^2} = \frac{16}{1+4k^2}$ .

解得  $k = \pm 1$ , 故直线  $AB$  的方程为  $y = x$  或者  $y = -x$ .



### 压轴题转化训练

● (2014 天津文) 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 右顶点为

$A$ , 上顶点为  $B$ . 已知  $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1F_2|$ .

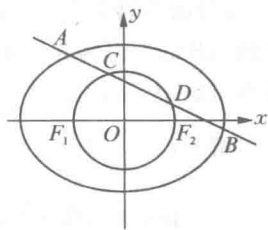
(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设  $P$  为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段  $PB$  为直径的圆经过点  $F_1$ , 经过点  $F_2$  的直线  $l$  与该圆相切于点  $M$ ,  $|MF_2| = 2\sqrt{2}$ , 求椭圆的方程.

2 (2014 陕西文) 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过点  $(0, \sqrt{3})$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ , 左、右焦点分别为  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ .

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若直线  $l: y = -\frac{1}{2}x + m$  与椭圆交于  $A, B$  两点, 与以  $F_1F_2$  为直径的圆交于  $C, D$  两点, 且满足  $\left| \frac{AB}{CD} \right| = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ , 求直线  $l$  的方程.



## 基本问题 2 求参数取值范围

求参数取值范围问题是圆锥曲线中的一类重要的基本问题. 这类问题可以附着很多知识点, 在知识的交汇处设计题目, 综合性强, 变量多, 涉及知识面广, 难度大, 可以很好地考察学生分析问题和解决问题的能力, 因此常常做为高考压轴题出现.

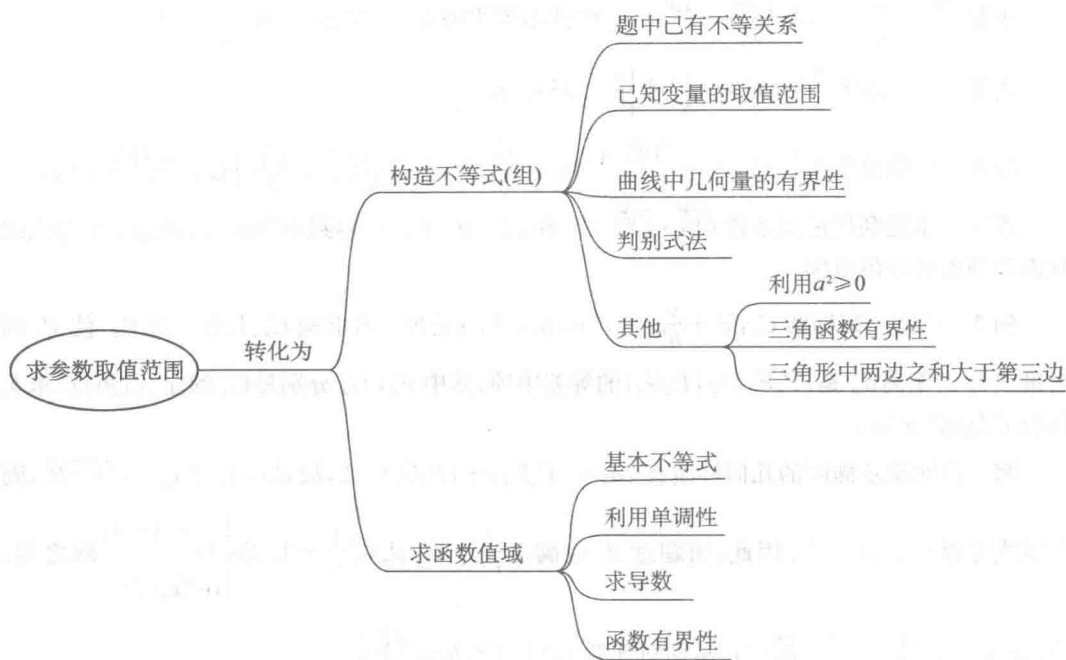
### 基本题高考分布

在 2012—2014 年全国高考压轴题中, 求参数取值范围问题的考题分布规律如下:

|      | 2012  |       |       | 2013  |       |       | 2014  |       |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 省(市) | 北京    | 天津    | 四川    | 山东    | 湖南    | 四川    | 湖北    | 上海    |
| 理科   | 19(1) | 19(2) | 21(2) | 22(2) | 21(1) |       | 21(2) | 22(2) |
| 文科   |       |       | 21(2) |       |       | 20(1) |       | 22(2) |

### 基本题解法综述

求参数取值范围问题常用解法如下:



### 基本题解法示例

#### 一、构造含参数的不等式(组)求解.

**例 1** 已知椭圆  $C_1$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 双曲线  $C_2$  的方程为  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ . 若直线  $l: y = kx + \sqrt{2}$  与  $C_1$  及  $C_2$  都恒有两个不同的交点, 且  $l$  与  $C_2$  的两个交点  $A$  和  $B$  满足  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 6$  (其中  $O$  为原点), 求  $k$  的取值范围.

**解** 将  $y = kx + \sqrt{2}$  代入  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  得  $(1 + 4k^2)x^2 + 8\sqrt{2}kx + 4 = 0$ .

由直线  $l$  与椭圆  $C_1$  恒有两个不同的交点得:

$$\Delta_1 = (8\sqrt{2})^2 k^2 - 16(1 + 4k^2) = 16(4k^2 - 1) > 0, \text{ 即 } k^2 > \frac{1}{4}. \quad ①$$

将  $y = kx + \sqrt{2}$  代入  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  得  $(1 - 3k^2)x^2 - 6\sqrt{2}kx - 9 = 0$ .

由直线  $l$  与双曲线  $C_2$  恒有两个不同的交点  $A, B$  得

$$\begin{cases} 1 - 3k^2 \neq 0, \\ \Delta_2 = (-6\sqrt{2}k)^2 + 36(1 - 3k^2) = 36(1 - k^2) > 0. \end{cases} \quad \text{即 } k^2 \neq \frac{1}{3} \text{ 且 } k^2 < 1. \quad ②$$

设  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ , 则  $x_A + x_B = \frac{6\sqrt{2}k}{1 - 3k^2}, x_A x_B = \frac{-9}{1 - 3k^2}$ .

由  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 6$  得  $x_A x_B + y_A y_B < 6$ , 而  $x_A x_B + y_A y_B = x_A x_B + (kx_A + \sqrt{2})(kx_B + \sqrt{2}) = (k^2 + 1)x_A x_B + \sqrt{2}k(x_A + x_B) + 2 = (k^2 + 1) \cdot \frac{-9}{1 - 3k^2} + \sqrt{2}k \cdot \frac{6\sqrt{2}k}{1 - 3k^2} + 2 = \frac{3k^2 + 7}{3k^2 - 1}$ .

于是  $\frac{3k^2+7}{3k^2-1} < 6$ , 即  $\frac{15k^2-13}{3k^2-1} > 0$ . 解此不等式得  $k^2 > \frac{13}{15}$  或  $k^2 < \frac{1}{3}$ . ③

由①、②、③得  $\frac{1}{4} < k^2 < \frac{1}{3}$  或  $\frac{13}{15} < k^2 < 1$ .

故  $k$  的取值范围为  $(-1, -\frac{\sqrt{195}}{15}) \cup (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{195}}{15}, 1)$ .

点评 本题利用已知条件  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} < 6$  和  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$  得到不等式组, 通过解不等式组从而得到参数取值范围.

例2 已知一列椭圆  $C_n: x^2 + \frac{y^2}{b_n^2} = 1$ ,  $0 < b_n < 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . 若椭圆  $C_n$  上有一点  $P_n$ , 使  $P_n$  到右准线  $l_n$  的距离  $d_n$  是  $|P_n F_n|$  与  $|P_n G_n|$  的等差中项, 其中  $F_n, G_n$  分别是  $C_n$  的左、右焦点. 求  $b_n$  的取值范围 ( $n \geq 1$ ).

解 由题设及椭圆的几何性质有  $2d_n = |P_n F_n| + |P_n G_n| = 2$ , 故  $d_n = 1$ . 又  $c_n = \sqrt{1-b_n^2}$ , 则右准线方程为  $l_n: x = \frac{1}{c_n}$ . 因此, 由题意  $d_n$  应满足  $\frac{1}{c_n} - 1 \leq d_n \leq \frac{1}{c_n} + 1$ . 即  $\begin{cases} \frac{1}{c_n} - 1 \leq 1, \\ 0 < c_n < 1. \end{cases}$  解之得:

$\frac{1}{2} \leq c_n < 1$ . 即  $\frac{1}{2} \leq \sqrt{1-b_n^2} < 1$ . 从而对任意  $n \geq 1$ ,  $0 < b_n \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

点评 本题用曲线中几何量的有界性构造不等式: 即  $\frac{a^2}{c} - a \leq d_n \leq \frac{a^2}{c} + a$ .

例3 直线  $y = kx + 1$  与双曲线  $2x^2 - y^2 = 1$  的右支交于不同的两点, 求实数  $k$  的取值范围.

解 将直线方程代入双曲线方程, 得  $(k^2 - 2)x^2 + 2kx + 2 = 0$ , 依题意上述方程应有两个不等正实根, 于是  $\begin{cases} k^2 - 2 \neq 0, \\ \Delta = (2k)^2 - 8(k^2 - 2) > 0, \\ -\frac{2k}{k^2 - 2} > 0, \\ \frac{2}{k^2 - 2} > 0. \end{cases}$

解得  $k$  的取值范围为  $-2 < k < -\sqrt{2}$ .

点评 对于直线与圆锥曲线相交, 求参数  $k$  的取值范围, 一般都是将直线方程代入曲线方程, 利用一元二次方程判别式及根的分布来构造含参变量的不等式. 但当一元二次方程的二次项系数含参数时需分类讨论.

## 二、构造函数, 转化为求函数的值域.

例4 设直线  $l$  过点  $P(0, 3)$ , 与椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  顺次交于  $A, B$  两点, 且  $\vec{AP} = \lambda \vec{PB}$ . 试求  $\lambda$  的取值范围.

解 当直线  $l$  垂直于  $x$  轴时, 可求得  $\lambda = -\frac{1}{5}$ ;

当  $l$  与  $x$  轴不垂直时, 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 直线  $l$  的方程为:  $y = kx + 3$ , 代入椭圆方程, 消去  $y$  得  $(9k^2 + 4)x^2 + 54kx + 45 = 0$ , 解之得  $x_{1,2} = \frac{-27k \pm 6\sqrt{9k^2 - 5}}{9k^2 + 4}$ .

因为椭圆关于  $y$  轴对称, 点  $P$  在  $y$  轴上, 所以只需考虑  $k > 0$  的情形.

$$\text{当 } k > 0 \text{ 时, } x_1 = \frac{-27k+6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}, x_2 = \frac{-27k-6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}.$$

$$\text{所以 } \lambda = -\frac{x_1}{x_2} = \frac{-9k+2\sqrt{9k^2-5}}{9k+2\sqrt{9k^2-5}} = 1 - \frac{18k}{9k+2\sqrt{9k^2-5}} = 1 - \frac{18}{9+2\sqrt{9-\frac{5}{k^2}}}.$$

$$\text{由 } \Delta = (-54k)^2 - 180(9k^2+4) \geq 0, \text{ 解得 } k^2 \geq \frac{5}{9}.$$

$$\text{所以 } -1 \leq 1 - \frac{18}{9+2\sqrt{9-\frac{5}{k^2}}} < -\frac{1}{5}, \text{ 综上, } -1 \leq \lambda \leq -\frac{1}{5}.$$

**点评** 在  $\lambda = -\frac{x_A}{x_B}$  中, 有两个变量  $x_A, x_B$ , 这两个变量的范围不好控制, 所以想到利用第 3 个变量——直线  $AB$  的斜率  $k$ . 问题就转化为如何将  $x_A, x_B$  转化为关于  $k$  的表达式, 到此为止, 将直线方程代入椭圆方程, 消去  $y$  得出关于  $x$  的一元二次方程, 其求根公式呼之欲出.

### 三、利用数形结合.

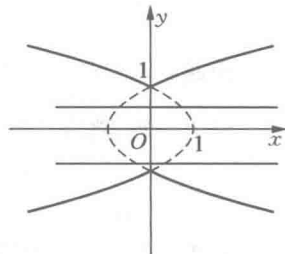
**例 5** 已知曲线  $y^2 = |x| + 1$  与直线  $y = kx + b$  没有公共点, 求实数  $k, b$  的取值范围.

**解** 作出方程  $y^2 = |x| + 1 = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ -x+1, & x < 0 \end{cases}$  所表示的曲

线, 如图所示:

由图观察可得:  $k = 0, b \in (-1, 1)$ .

**点评** 将求参数范围问题转化为曲线几何意义, 再结合曲线分析求解, 数形结合常常可使复杂问题简单化.



### ★ 压轴题转化分析

**高考真题 1.** (2014 上海) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 对于直线  $l: ax + by + c = 0$  和点  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ , 记  $\eta = (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c)$ . 若  $\eta < 0$ , 则称点  $P_1, P_2$  被直线  $l$  分隔. 若曲线  $C$  与直线  $l$  没有公共点, 且曲线  $C$  上存在点  $P_1, P_2$  被直线  $l$  分隔, 则称直线  $l$  为曲线  $C$  的一条分隔线.

(1) 求证: 点  $A(1, 2), B(-1, 0)$  被直线  $x + y - 1 = 0$  分隔;

(2) 若直线  $y = kx$  是曲线  $x^2 - 4y^2 = 1$  的分隔线, 求实数  $k$  的取值范围.

**[分析与转化]** (1) 只须证  $\eta < 0$  即可. (2) 可由  $\eta < 0$  和  $y = kx$  与  $x^2 - 4y^2 = 1$  无交点得到两个不等式, 求交集即可.

**证** (1) 因为  $\eta = -4 < 0$ , 所以点  $A, B$  被直线  $x + y - 1 = 0$  分隔.

**解** (2) 直线  $y = kx$  与曲线  $x^2 - 4y^2 = 1$  有公共点的充要条件是方程组  $\begin{cases} y = kx, \\ x^2 - 4y^2 = 1 \end{cases}$  有

解, 即  $|k| < \frac{1}{2}$ . 因为直线  $y = kx$  是曲线  $x^2 - 4y^2 = 1$  的分隔线, 故它们没有公共点, 即  $|k| \geq$

$$\frac{1}{2}.$$

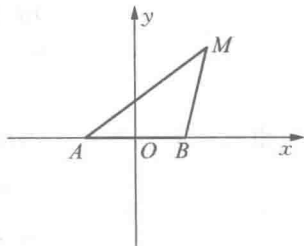
当  $|k| \geq \frac{1}{2}$  时, 对于直线  $y = kx$ , 曲线  $x^2 - 4y^2 = 1$  上的点  $(-1, 0)$  和  $(1, 0)$  满足



$\eta = -k^2 < 0$ , 即点  $(-1, 0)$  和  $(1, 0)$  被  $y = kx$  分隔.

故实数  $k$  的取值范围是  $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ .

**高考真题 2.** (2012 四川文) 如图, 动点  $M$  与两定点  $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$  构成  $\triangle MAB$ , 且直线  $MA$ 、 $MB$  的斜率之积为 4, 设动点  $M$  的轨迹为  $C$ .



(1) 求轨迹  $C$  的方程;

(2) 设直线  $y = x + m (m > 0)$  与  $y$  轴相交于点  $P$ , 与轨迹  $C$  相交于点  $Q, R$ , 且  $|PQ| < |PR|$ , 求  $\frac{|PR|}{|PQ|}$  的取值范围.

**[分析与转化]** (1) 因  $k_{MA} \cdot k_{MB} = 4$  可用“直译法”得  $C$  的方程. (2) 可将  $\frac{|PR|}{|PQ|}$  表示为  $m$  的函数, 转化为求函数的值域, 但应注意  $m$  的范围.

**解** (1) 设  $M(x, y)$ , 当  $x = -1$  时, 直线  $MA$  的斜率不存在, 当  $x = 1$  时, 直线  $MB$  的斜率不存在.

于是  $x \neq \pm 1$ , 此时直线  $MA$  的斜率为  $\frac{y}{x+1}$ , 直线  $MB$  的斜率为  $\frac{y}{x-1}$ .

由题意得  $\frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-1} = 4$ , 得  $4x^2 - y^2 - 4 = 0$ .

综上可知, 轨迹  $C$  的方程为  $4x^2 - y^2 - 4 = 0 (x \neq \pm 1)$ .

(2) 由  $\begin{cases} y = x + m, \\ 4x^2 - y^2 - 4 = 0, \end{cases}$  消去  $y$ , 可得  $3x^2 - 2mx - m^2 - 4 = 0$ . (\*)

对于方程 (\*) 其判别式  $\Delta = (-2m)^2 - 4 \times 3(-m^2 - 4) = 16m^2 + 48 > 0$ .

而当 1 或 -1 为方程 (\*) 的根时,  $m$  的值为 -1 或 1. 由已知, 可知  $m > 0$  且  $m \neq 1$ .

设  $Q(x_1, y_1)$ ,  $R(x_2, y_2)$ , 则  $x_1, x_2$  是方程 (\*) 的两根, 由  $|PQ| < |PR|$  有  $|x_1| < |x_2|$ ,

$$x_1 = \frac{m - 2\sqrt{m^2 + 3}}{3}, x_2 = \frac{m + 2\sqrt{m^2 + 3}}{3}.$$

$$\text{所以 } \frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{|x_2|}{|x_1|} = \frac{2\sqrt{1 + \frac{3}{m^2}} + 1}{2\sqrt{1 + \frac{3}{m^2}} - 1} = 1 + \frac{2}{2\sqrt{1 + \frac{3}{m^2}} - 1}, \text{ 此时 } \sqrt{1 + \frac{3}{m^2}} > 1 \text{ 且}$$

$$\sqrt{1 + \frac{3}{m^2}} \neq 2.$$

$$\text{所以 } 1 < 1 + \frac{2}{2\sqrt{1 + \frac{3}{m^2}} - 1} < 3 \text{ 且 } 1 + \frac{2}{2\sqrt{1 + \frac{3}{m^2}} - 1} \neq \frac{5}{3}.$$

$$\text{所以 } 1 < \frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{|x_2|}{|x_1|} < 3, \text{ 且 } \frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{|x_2|}{|x_1|} \neq \frac{5}{3}.$$

$$\text{所以 } \frac{|PR|}{|PQ|} \text{ 的取值范围是 } (1, \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}, 3).$$