同濟高工技術叢書

微積分

王蓉孫 編著
江可宗 校閱

大東書局出版

同濟高工技術叢書

微積分

王蓉孫 編著
江可宗 校閱
同濟高工技術叢書編審委員會主編

大東書局出版

一九五三年三月四版

同濟高工
術技叢書　微積分

定價人民幣：8000元

主編者　同濟高工技術叢書編審委員會
編著者　王　蓉　孫
校閱者　江　可　宗
出版發行者　大東書局
上海福州路310號
印刷者　大東印刷廠
上海安慶路268弄

書號：5052（10001—15000）

同濟高工技術叢書序言

同濟高工從一九三三年設立到現在，已有十七年了．在這段時間內，我們深感到缺乏教科書和參考書的痛苦；爲着校內教學的需要，曾化去許多精力和時間編印講義、繪製藍圖來維持教學．目前、國家建設正趨高潮．要迎接這高潮，勢必先鞏固技術教育的基礎．我們願意在這方面貢獻一部份力量，因此將我們的講義整理出來，陸續出版，作爲訓練中級技術幹部的教材，並供給技術工人自修參考之用．

我們深知這部叢書不一定盡善盡美，但今天的問題不是‘求精”而是“沒有”和“嫌少”的問題；只有普遍起來以後，才能進一步要求提高．因此這些書的出版，只不過作爲“拋磚引玉”，希望以後有更多、更好的書出版．

十七年來，我們如果在中級技術幹部的訓練中，曾有一點貢獻的話，也是非常微小的，因爲在舊統治者摧殘教育的政策下，絕難期望有好的果實；而且，我們的工作是孤單的、缺少與工業界密切的聯系，所以這些書只可說是我們過去工作中的一點收穫，缺點一定難免．但是我們相信：在新民主主義的道路上，在理論與實踐密切的結合裏，在與技術教育工作者的經驗交流下，我們一定盡全力，在技術教育工作中求改造，求進步．

因此，我們絕不自滿，除了經常研究，討論改進外，渴望工程界和技術教育工作者儘量給我們寶貴的批評．

同濟高工技術叢書編審委員會

一九五〇年九月

例　　言

本書是編者在同濟高工教課時所用的講義，材料適合於一學期每周二小時之用.

爲了使同學們清楚認識到微積分的效用，以至能充分運用這項數學工具起見，本書的內容偏重於說明，而於演算則比較短少些.

編者對於數學欠缺研究，所以撰稿時深感不能保持數學的嚴密性，尙祈諸先進不吝指正.

本書承江可宗、蔣式良兩先生審查，潘海林先生繪圖，謹此致謝.

王蓉孫

一九五一年五月

目　　錄

第一章 緒言

一般稱微積分爲高等數學，而稱算術、代數、幾何、三角、解析幾何等爲初等數學.這種區分很容易引起誤會，以爲微積分和初等數學是截然不同的，其實不然.在微積分中要遇到的幾個基本觀念，如函數，數和極限等，早在初等數學中就有的了，祇是以前未曾深入研究，直到近三百年來才開始邁步前進，這方面的收獲是不可計量的.所以稱微積分爲高等數學，倒不如稱爲近代數學來得妥當.

有了初等數學的知識而後研究微積分是對學習有幫助的，但不是說一定要精通了初等數學才夠得上學微積分.編者以爲，要是翻閱過了初等數學就來學習微積分是不致遇到多大困難的.在高級工業職業學校的同學們已具備了進修微積分的條件，而且客觀上的需要又是如此迫切，在工程中有好多問題是要依靠微積分才能獲得滿意的解答的.

現在且舉個例來說明微積分和我們學工程的人的關係是如何密切.譬如有列火車，在四十五分鐘內行了五十公里路，問這列火車每分鐘行多少路.這是個求速度的問題，並不複雜.按照我們以往所知道的該是如此去計算：

火車所行的路程	$\Delta s = 50$	Km
行五十公里所需的時間	$\Delta t = 45$	min

此處用 Δs 和 Δt 來表示路程和時間，和過去的不同，以往都是用 s 和 t 來表示路程和時間的.這兩種不同的表示法含義也不相同.Δs

表示的是整個路程中的一段，在這段路程前或許火車已經行了很多路，但是這很多路卻不在我們要討論的範圍之內．而 s 通常表示的是從起步到目前止所行的路程．Δt 和 t 的區別也是如此，Δt 表示的是整個時間中的一節．往後常要遇到 Δ 這一個符號，在這裏不妨先作一番介紹．於是

火車的速度　　　$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{50}{45}$$
$$\sim 1.11 \quad {}^{Km}/_{min}$$

這個答案是否能使人滿意呢？僅在一種情況下是可以使人滿意的，要是火車的速度始終不變，就是說在相等的時間內都是行相等的路程，那末依上面的計算法所算得的結果 $v\sim 1.11\ {}^{Km}/_{min}$ 是有具體意義的．我們可以根據這個數字來測定，火車在某一時刻上的位置．要是火車的速度是在變動的，那末依上面的計算法所算得的結果，祇能看做是在這四十五分鐘內火車的平均速度．火車的最快和最慢速度，可能和平均速度相差得很多．這裏很容易看出上面的計算法的內容是如何貧乏，除非我們要求的就是這個平均速度，否則這個答案是不能使人滿意的．

在工程中有很多問題，性質和這裏所舉的例題相同．我們又並不滿意於平均值，而一定要知道問題中的實在數值．且仍以火車爲例，要問火車在某一點時間上的速度，譬如說在第二十二分鐘這時間上火車的速度究竟是多少．若是我們僅有初等數學的知識，那末祇有這樣做去．在第二十二分鐘的前後我們觀察一段比較短的時間，譬如說四分鐘，這是一段比四十五分要短得多的時間，看火車行了多少路，假設是六公里，那末：

$$\Delta s' = 6 \quad Km$$

$$\Delta t' = 4 \quad min$$

而　　　$$v' = \frac{\Delta s'}{\Delta t'} = \frac{6}{4} = 1.5 \quad {}^{Km}/_{min}$$

這裏要指出的是，第二次的計算和第一次的計算在準確程度上有些不同.在第一次計算中，我們觀察的時間共有四十五分鐘，時間一長，速度的變動就可能很大，就是說最大和最小速度間的差別很大，因而平均速度距離實在速度也遠. 若是把觀察的時間縮短了，那末在這段短時間內的變動不致十分顯著，於是平均速度就和實在速度要接近些.所以說，先後兩次的計算在程度上有些不同. 可是不論怎樣去把時間縮短，依上面的方法計算出來的結果，終究是一個在第二十二分鐘左右的平均速度，而不是第二十二分鐘上的實在速度.

要問某一點時刻上的速度，我們已經知道，憑觀察一節時間是得不到滿意的結果的.現在且來試探另一條途徑.若是把觀察的時間縮短為零，也就是僅觀察問題中的一點時間，那末火車在這一點時刻上的位置是一定的，決不可能在同一時刻上佔據兩個地位，所以是此刻並無路程出現，就是說，如果 Δt 等於零，那末 Δs 亦等於零.於是

$$\text{火車的速度} \qquad v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{0}{0}$$

$\frac{0}{0}$ 可以等於任何一個實數 a. 按除法的定義是要尋出一個商數來，這商數和除數的相乘積就等於被除數.那末任何一個實數 a 乘上除數 0，總是等於被除數 0 的. 我們是否可以說，這個問題的答案，就是任何一個實數？要是如此就等於說，火車在某一時刻上，可以有很多不同的速度，這是和經驗違背的.那末這一問題以及其他類似問題的滿意答案，是該怎樣去獲得呢？

上面一個例題，是屬於微分法範圍內要解決的問題.在工程中這一類的問題多得很. 此處不在立即解決問題，主要在說明微積分的重要性，他是每個工程師不可或缺的工具，下面還要舉個例來說明，在積分法範圍內所要處理的問題.

計算面積是積分法範圍內的一個重要題目．要計算面積必先定個單位面積，然後其他大小的面可以和他作比較．所謂單位面積是一個正方形，他邊的長度是一．若問一個面的面積是多少，祇要看這個面上一共可以劃出幾個單位面積來．凡是由直線圍成的面，要量他們的面積是很容易的，例如平行四邊形，三角形等，因爲這幾種面都很容易劃分成爲若干單位面積．若面是由曲線圍成的，那問題就困難了．例如要求一個圓的面積，若是我們沒有學過"π"這個數字，單憑初等數學中的知識是無法獲得滿意的結果的．

憑初等數學中的知識，我們祇可能求得一個圓面積的近似數值，方法如下．在圓內作一個內接多邊形，例如一個正六邊形，這六邊形可以劃成六個相等面積的三角形（圖1）．三角形的面積是可以量得的，假設等於F．很明顯的$6F$祇是個近似數值，他和圓的面積是有差別的，這差別在圖1中很容易察看出來．若嫌答案的誤差太大，那末重作一個邊數更多的多邊形，例如一個正十二邊形，在十二邊形中可以劃出十二個三角形來，而三角形的面積假設是F'，那末$12F'$該是一個比較準確的答案，因爲他和圓面積間的差別比較要小些．無論邊數取得如何多，用這個方法所能得到的終究還是個近似數值．

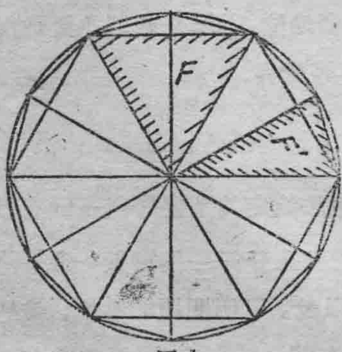

圖 1

先後兩個例題，分別介紹了微分法和積分法的內容．在這裏要聲明的，微分法和積分法是兩個不同的運算方法，但是本質上他們却是完全相同的，都是求一個極限的計算法．下面卽開始系統的學習．

第二章 函數

1. 常數和變數 一個數字可以表示一個有一定多少的量，所以稱之爲常數.在代數學中我們又採用a,b,c……等字母來表示一個有一定多少的量,所以也是常數.但是後一類常數所代表的量,祇限於在某一討論範圍內是一定的，在另一個範圍內，他或許又代表另一個數值.例如

$$s=a+\frac{1}{2}bt^2$$

這是個在等加速運動中計算路程的公式.a表示的是在觀察前已經跑過的路程，b 是等加速運動中的加速度.在某一問題中，或許 $a=17\,Km$，$b=2\,Km/min^2$，但在另一個等加速運動中，就不一定是上面的兩個數值了.

又式中s表示路程，t 表示時間，他們不是常數而是變數，因爲他們可以取得很多的數值不僅一個. 在觀察過程中 t 自零起逐漸增加，而 s 亦隨之變動.

變數習慣，用 x,y,z……等字母來表示.

變數的變動常受到限制，例如熱學中的氣體定律:

$$PV=GRT$$

P 表示氣體的壓力，V 表示氣體的體積，G 是氣體的重量，R 是氣體常數，T 是絕對溫度.使P 保持不變，而把溫度降至絕對零度，即是使$T=0$，則按此定律勢必 V 亦等於零.但這是不可能的，氣體定律在絕對零度時是失效了，甚至在絕對零度的附近.所以在引用氣體定律時T 的變

動要受到限制，他不可變動至絕對零度的附近．

變數變動時所受到的限制有下列數類，他的表示方法是：

(1)　$a \leqq x \leqq b$,　此處 a 和 b 表示兩個實數．這表示變數 x 可以自 a 變動至 b，即是 x 可以等於 a 或 b 以及 a 和 b 間的任何一個數字．關於"數"在後面還有說明．

(2)　$a \leqq x < b$　這表示 x 可以等於 a 以及 a 和 b 間的任何一個數字，但不等於 b．

(3)　$a < x < b$　這表示 x 可以等於 a 和 b 間的任何一個數字，但既不等於 a，又不等於 b．

變數的變動，也可以絲毫不受限制，他的表示方法是：$-\infty < x < \infty$．

如上面所說的變數，他可以在某一範圍內取得任何一個數字的，稱之爲連續變數．也有不連續的變數，例如：$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots\cdots n$，此處變數 n 祇取得正整數．又如下面的幾何級數：

$$S_n = q + q^2 + \cdots\cdots + q^n,$$

式中任何一項的指數，適等於該項的序數，則指數 n 無疑的祇取正整數，把其他數字代進去是沒有意義的．這一類的變數，我們稱爲整變數．

2．**自變數和因變數，函數**　在第一節中提到的兩個變數 s 和 t，是相關相聯的．若任時間延長了，就影響到路程也變動了．所以此處稱 t 爲自變數，而稱 s 爲因變數．我們又可以說"s 是 t 的函數"，或者用下面一個符號來表示：$s = F(t)$．也有用 f，ϕ，φ …… 等符號來表示函數的．所有這些符號，僅說明了有個函數，至於函數的內容，兩個變數間的關聯究竟如何，却未明確出來．

函數的定義是：如有 x 的數值，且有 y 的數值與之相當，則稱 y 是 x 的函數，亦可稱 x 是 y 的函數．

在第一節等加速運動的公式中，有了 t 的數值，便可計算出 s 的數

值來.這些都是相當的數值,所以稱 s 是 t 的函數.

下面幾個方程式都表示 x 是自變數,而 y 是因變數:

$$y=x+1,\ y=sinx,\ y=logx.$$

附帶聲明的,在本書中要採用兩個對數符號.log 指的是常用對數,他的底是 10;而 log_e 指的是自然對數,他的底是 $e=2.718\cdots\cdots$.

把上面幾個方程式變換個形式如下:

$$x=y-1,\ x=arc\ siny,\ x=10^y,$$

於是就表示 y 是自變數,而 x 是因變數.若稱 $y=f(x)$ 為正函數,則 $x=\varphi(y)$ 便稱為反函數.

又如上面形式的函數,稱為顯函數.另一形式的函數,如 $x^2+xy+y^2=0$,則稱為隱函數.

補充要說明的,在函數定義中並未規定,每一 x 的數字,必有 y 的數字與之相當.例如 $y=logx$,當 $x<o$ 時,y 一無解答,然 y 仍不失為 x 的函數.又函數定義中亦未規定,一個 x 數字僅和一個 y 數字相當.例如 $y^2=x$,每一個 x 數字可以有二個 y 數字與之相當,這兩個數字的差別僅在正負號.

一個 x 和一個 y 相當的函數,稱為單值函數,否則就稱為多值函數.$y^2=x$ 是個多值函數,但是我們可以用兩個單值函數來表達它,這兩個單值函數是 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$.

函數如 $y=x+1$,當 x 增加時,y 亦隨之增加,則稱為純昇函數.又函數如 $y=\frac{1}{x}$,當 x 增加時,y 反而減少,則稱為純降函數.

3. 若干種函數 下面僅介紹幾種常見的函數,往後討論微分法,積分法時亦限於這一類的函數.

(1) 代數函數 由變數和常數等用加減乘等運算法,則所組成的函數稱為整有理函數.例如 $y=ax^2+bx+c$,此中指數都是正整

數，就是個整有理函數．又如 $f(x,y)=ax^3y^2+bxy^3+c$，這是個二變數的整有理函數．

由變數和常數等用加減乘除等運算法，則所組成的函數稱為分有理函數．最簡單的分有理函數，如 $y=\dfrac{1}{x}+c$．

函數凡能變換成 $f(x,y)=0$ 的形式的，統稱為代數函數，此處 $f(x,y)$ 是一個二變數的整有理函數．若把 $f(x,y)=0$ 變換成顯函數，我們或許要用到開方方法．整有理函數和分有理函數都是代數函數．

代數函數以外的函數稱為特殊函數，如三角函數，指數函數以及對數等．

(2)　三角函數　　如 $\sin x$, $\cos x$ 等．變數 x 指的是角度．常用的角度單位是度（°），往後我們要採用的是另外一種單位叫做弧度．一弧度約等於 $57°17'45''$，一周共有 2π 弧度．

(3)　指數函數和對數　　指數函數是變數發現於指數中的一種函數，如 $y=e^x$．對數是指數的反函數，如 $x=\log_e y$．

這些種函數的性質留在第三章中，再加說明．

習　題　1

1)　試以公式來表達，一立方體的體積是它的邊長的函數．又利用此公式來計算一邊長為一公尺的立方體的體積．

2)　試以公式來表達，一球體的表面面積是它的半徑的函數．又計算半徑為十公分時，球體的表面面積是若干？

3)　運動物體中儲藏的能量和這物體的質量，以及它的速度的平方成正比．這一事實試以公式表達之．又速度增加一倍後，儲藏的能量增加了多少？

4)　下列若干函數，試加以分門別類．

$y=6x^3-2x+5$　　　　$y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(t)=at+bt^2$　　　　$y=x^e$

$$f(x)=\frac{a-x}{a+x} \qquad y=a^{\sin x}$$

$$xy-2x+2y+1=0 \qquad y=e^{1-x}$$

$$f(x)=\log_a \tan x \qquad y=\log\sqrt{1-x^2}$$

4. **數線** 在一直線上確定一零點，並選擇一單位長度．把這單位長度在直線上自零點出發截取許多點，而後每點附上一個數字如圖 2．

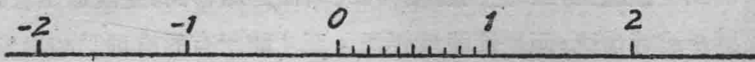

圖 2

這一直線就叫做數線，在0點的右邊都是正數，在左邊的都是負數．這是利用幾何圖形來表示數的一個方法．這方法把數字有規則地排列起來，凡右邊的數字都比左邊的為大． 又在二鄰接的，代表整數的點之間用等分方法截取若干點，例如在0與1之間十等分而得到九個點，按自左至右的次序附上 $0.1\left(=\frac{1}{10}\right)$，$0.2\left(=\frac{2}{10}\right)$……等數字．用等分方法獲得的點統稱為有理點，代表它們的數字，又稱為有理數．所謂有理數是指可以用分數 $\frac{p}{q}$ 來表達的數，此中 p 和 q 都是整數，而且假設它們間是沒有公約數的，整數亦是有理數，若把等分方法繼續下去，很明顯的可以取得很多很多的有理點，這些有理點排列得很密，但却不能充滿整個數線．

除去有理點之外，其餘的點就叫做無理點．有理點和無理點共同組成一連續而不中斷的數線．有理數和無理數統稱為實數．

5. **無理數** $\sqrt{2}$ 是我們所熟悉的一個無理數，它在數線上的位置可以如此來決定．作一兩股都等於單位長度的直角三角形，把它的斜邊在數線上截取一點，這一點就代表 $\sqrt{2}$，因為斜邊的長度是 $\sqrt{2}$ 個單位長度．要證明 $\sqrt{2}$ 是個無理數，祇要去證明它不是有理數便可以了．

若 $\sqrt{2}$ 是個有理數，我們就可以用 $\frac{p}{q}$ 來表達它的數值．於是 $2=\frac{p^2}{q^2}$，而 $2q^2=p^2$．因為 $2q^2$ 是個偶數，所以 p^2 也是個偶數，而 p 一定也

是個偶數.爲了表示 p 是個偶數,我們用 $2r$ 來替代它.於是 $2q^2=4r^2$,而 $q^2=2r^2$.根據同一理由 q 勢必也是個偶數.若 p 和 q 都是偶數,則二者之間至少有個公約數 2,但這是和第四節中的假設違背的.所以 $\sqrt{2}$ 不是個有理數,而是個無理數,代表 $\sqrt{2}$ 的點,就是個無理點.

有一個連續變數,例如 $1\leqq x\leqq 2$,若用幾何方法來說明,便是有個變動的點在數線上1至2之間連續移動.所謂連續移動,是說這點在移動時並無跳越等情况,而是接連地經過 1 至 2 間所有的有理點和無理點,$\sqrt{2}$ 就是其中一個無理點.那末變數 x 就接連取得 1至2 間所有的有理數和無理數,$\sqrt{2}$ 就是其中一個無理數.所以若僅認識到有理數,是不夠去了解連續變數的內容的.

已知道無理數是不可能用分數來表達的,但我們仍可以用有理數來明確它.在敍述這方法之前我們先來說,在數線上如何用有理點來明確無理點.

圖 3

圖 3 中數線上有個無理點 I.爲了明確它的位置,我們選擇了兩個有理點 A_1 和 B_1,I 就在 A_1B_1 這一線段中.僅有 A_1 和 B_1 是不能充分把 I 明確出來的,因爲在 A_1B_1 這線段上,尙有很多其他的無理點.於是我們又選擇一線段 A_2B_2,它的長度較 A_1B_1 爲短.A_2B_2 包含在 A_1B_1 內,而 I 又在 A_2B_2 中.在第二步方法中 I 的位置要比較明確些,因爲有一部分無理點,在 A_1A_2 和 B_1B_2 中的無理點,已加剔除.把這方法繼續下去,線段的長度逐步收縮,於是 I 的位置越益明確.若把這方法繼續下去而無窮盡,線段的長度收縮幾乎至零,則 I 點,而且僅有這一點,它的位置是可以完全確定的了.這是用兩組有理點:一組是 A_1,A_2,A_3