自然灾害风险模型分析

黄玉洁　宋立新　著

科学出版社

自然灾害风险模型分析

黄玉洁　宋立新　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

随着现代金融市场的完善与发展，精算学受到越来越多的关注. 本书主要做了四项工作：一是针对自然灾害问题，建立并研究了各风险变量不独立情况下自然灾害风险聚合索赔风险模型及其性质；二是针对风险定价问题，一方面研究了异类风险组合在凸距离测度下的最优定价问题，另一方面考虑到巨大灾害带来的巨额损失，研究了最优再保险策略；三是针对非零利率下的两类相关风险的风险过程进行了研究；四是针对带测量误差的广义线性模型的 M 估计进行了研究.

本书可供金融数学、统计学、数学等相关学科的科技人员参考，也可供相关专业教师、研究生及高年级本科生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

自然灾害风险模型分析/黄玉洁，宋立新著. —北京：科学出版社，2015.4

ISBN 978-7-03-044087-7

Ⅰ. ①自… Ⅱ. ①黄… ②宋… Ⅲ. ①自然灾害-风险分析 Ⅳ. ①X43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 077354 号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：张凤琴
责任印制：肖 兴 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 4 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2015 年 4 月第一次印刷 印张：10 1/2
字数：210 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

由于时代的进步, 经济的发展, 人们风险意识的逐步增强, 致使风险理论已经被公认为是精算学教育中一门重要的学科. 为风险建立适当的保险模型, 对保险产品定价和破产问题研究, 是因为它们广泛的应用前景和重要的理论价值, 已成为当今精算领域的研究热点. 建立合理的模型是科学地研究风险并为保险公司建立保险政策的依据. 合理地建立风险组合是保险公司与客户规避风险的科学手段, 从而为异类风险组合定价也是保险学研究的重要范畴. 在现实世界中, 自然灾害是人类面临的重大风险, 考虑到其低频率、高损失的特点, 实施再保险是不可避免的. 针对这些问题, 本书主要做了如下几个方面的理论研究.

针对自然灾害问题, 首先建立连续情况下各变量不独立的零利率自然灾害风险聚合索赔风险模型, 然后通过引入环境过程处理风险模型中变量间关系, 以拉普拉斯变换为工具确立微小时间段内折现聚合索赔期望表达式, 利用类似矩母函数的性质求出聚合索赔的一阶、二阶矩的显式表达式. 其次将常利率引入风险模型, 得到了类似的表达式. 最后, 考虑了连续情况多相关保险聚合索赔的矩. 考虑到自然灾害发生的低频率特征和一般获得的数据是离散数据的特点, 研究离散状态下的风险模型具有更大的现实意义, 在此我们还建立了离散状态下自然灾害风险模型, 以积分–差分方程为工具研究折现聚合索赔的期望, 与连续情况类似得到了短时间内自然灾害风险的一阶、二阶矩的显示表达式.

针对风险定价问题, 先是考虑一类异类风险组合在凸距离测度下的最优定价问题, 目的在于得到不同目标函数下各种风险相对应的保费的显式表达式. 这部分内容考虑了四个带约束目标函数的最优化问题, 在优先序理论和凸距离测度下得到了各个目标函数的唯一最优解. 我们还用拉格朗日乘数法研究给定风险因子和凸距离测度下异类风险组合的定价问题.

(1) 对给定一个小的破产概率, 为各类风险寻求一个适当的保费使得不同风险距离函数的和能达到最小.

(2) 研究其对偶问题. 这对保险定价实务提供了理论方法, 拓宽了思路, 为精算师定价组合风险提供了理论依据.

(3) 考虑到巨灾带来的巨额损失, 实施必要的再保险策略是必然的, 这里研究了多个保险公司共同承保的再保险问题, 介绍了最优再保险的一些理论上的分保方法.

最后用 M 估计来估计带测量误差广义线性模型中的参数 β 证明其 M 估计的

两个重要性质, 即相合性及渐近正态性. 还用蒙特卡罗方法对参数估计效果进行了数值模拟.

本书以作者黄玉洁的博士学位论文为雏形加工整理而成的, 书中的每一部分都融入了导师宋立新教授的心血. 作者感谢陶凤梅教授对本书的认真校对, 感谢本书责任编辑陈玉琢女士, 她为本书的编辑和出版做了大量细致的工作.

尽管作者历时相当长的时间进行本书的撰写工作, 但由于本书涉及内容广泛, 加之作者的知识深度和广度有限, 书中不妥和错误之处在所难免, 恳请读者不吝批评指正.

作　者

2014 年 12 月于鞍山

目　录

第 1 章　绪　　论

自然灾害危害人民生命健康, 破坏经济建设, 阻碍社会进步, 历来为社会各界所关注. 各国政府部门和科学技术界一直在努力探索自然灾害发生、发展的规律, 以及防灾减灾的技术与对策, 尤其是近几十年来, 随着广泛应用卫星遥感、雷达探测和计算机技术, 自然灾害研究, 以及防灾减灾技术与对策有了长足进展. 但由于自然灾害具有广泛性、复杂性和偶然性, 所以人们认识自然灾害需要一个漫长的过程. 由于自然灾害发生频率小, 一旦发生损失巨大的特殊性, 所以自然灾害保险业备受社会各界和保险公司的关注. 灾害险的定价问题是政府职能部门和保险公司最为关心的问题.

自然灾害保险属于巨灾保险范畴, 其中地震灾害是人类社会所面临的主要自然灾害之一, 居各类自然灾害之首, 防震减灾也日渐成为各国政府的重要财政负担. 然而, 由地震、洪水、飓风等巨灾事件导致个体保险损失之间具有较强的正相关性而不是相互独立, 这与保险分散风险基础理论“大数定律”相矛盾. 同时, 洪水、飓风等巨灾风险可以在短时间内猛烈地冲击保险市场, 进而引发连锁理赔反应, 给保险公司带来毁灭性的影响. 由此可见, 洪水灾害是目前全世界所面临的财产巨灾保险中最难应对的风险之一. 地震保险定价长期以来都是巨灾保险研究的难点. 原因在于：一方面保险与再保险的作用将只能承保火灾、盗窃等相互独立的小风险的财产保险人的承保能力拓展到较大的覆盖面, 从而可以承保像地震、台风、洪水那样的巨灾事故; 另一方面, 飓风、地震等此类“低频率、高损失”的巨灾风险. 此外, 洪水还具有高频率、高损失的“双高”特征, 其显著特点是突发性和破坏性. 因此, 如何科学合理地对各种自然灾害进行保险和再保险定价一直都是各国学者、保险公司和监管机构所关注的问题.

精算学 (Bowers 和 Gerber, 1986) 是一门利用数学、统计学等数量方法解决金融、保险等经济应用问题的交叉学科. 它最早起源于人寿保险中的费率计算. 从 E. Halley 于 1693 年编制世界上第一个生命表算起, 精算学的发展已有三百多年的历史. 精算学以现代数学和统计学为基础, 对保险经营中的某些问题进行定量化的分析和研究, 为保险公司进行科学的决策和提高管理水平提供依据和方法. 现在精算研究已经成为保险公司在激烈竞争的市场环境中得以生存和发展的重要环节 (吴岚等, 1997). 依据研究对象的不同, 精算学可分为寿险精算学 (Gerber, 1995; 成世学, 1996) 和非寿险精算学 (Sundt, 1993).

保险定价问题是精算学又一焦点问题, 如何对一类或多类风险进行合理定价为

精算师提供定价的思路和理论保证是学者研究的重要课题. 作为精算学的一部分, 定价问题借助于数学中的概率论、随机过程等理论, 构造适合实际特征和保险事务中的随机风险模型, 并依此来研究风险的理论特征, 进而为风险进行保险定价以达到规避风险的目的. 本书主要讨论非寿险精算学中的自然灾害风险模型、异类风险组合的保险定价问题等.

1.1 文献综述

保险精算学中的经典风险模型, 索赔过程服从泊松过程的风险模型已经被广泛研究. 尤其是对破产概率和许多与破产相关的量, 如破产时间、破产前盈余、破产时亏损等的联合分布与边际分布已经做了深入研究.

研究经典风险模型的一致方法恰是 Gerber 和 Shiu (1998) 的一篇文章中所潜在的方法: 期望折现罚函数法. 其特征量的详细研究成果可以在 Lin 和 Willmot (1999) 与其参考文献中看到. Lin 和 Willmot (1999) 详细研究了亏损更新方程, 内容包括破产时间、破产前瞬间盈余和破产时的亏损, 这些问题的研究他们仅局限于复合几何分布情况. 近来, 许多学者投入了很多精力研究 Sparre Andersen(更新) 风险模型的 Gerber-Shiu 函数. Andersen 风险模型中总是假定索赔到达时间间隔服从 Erlang 分布. Dickson (1998) 研究了盈余过程中索赔时间间隔服从 Erlang(2) 分布的情况. 考虑了有限时间内生存变量服从复合几何分布, 给出了初始盈余是零且梯高分布可计算得到的生存概率的表达式. Dickson 和 Hipp(1998) 研究了 Sparre Andersen 风险过程, 其索赔间隔仍旧服从 Erlang(2) 分布. 这时他们通过引入辅助函数的方法, 假定破产发生时得到了破产时间矩的表达式. 这类模型的众多研究结果还可以参考: Dickson 和 Hipp(2001), Cheng 和 Tang (2003), Li 和 Garrido(2004a), Tsai 和 Sun (2004), Gerber 和 Shiu (2005) 等. 经典 Cramér-Lundberg 风险模型的一个推广就是根据分红策略允许股东分红的 Sparre Andersen 模型. 分红限的引入源于 Finetti (1957) 介绍的二项风险模型. 前面介绍的风险模型的一般的分红限问题已经有许多的论文和相关书籍给予介绍. 近来, 众人的焦点集中在破产时的折现罚函数 (分红策略量化风险的重要工具) 和直到破产时已付分红的分布. 这些方面的研究成果可以参考 Bühlmann (1970), Gerber(1979), Gerber(1981), Lin 等 (2003), Albrecher 和 Kainhofer (2002), Li 和 Garrido (2004b), Li 和 Dickson(2006), Dickson 和 Waters (2005), Albrecher 等 (2005) 等文献. 其中, Lin 等 (2003) 研究了有分红限的复合泊松风险模型, 推导并求解了 Gerber-Shiu 折现罚函数的积微分方程, 得出方程的解是不带分红限的 Gerber-Shiu 函数与相应齐次积–微分方程的解的线性组合. 在特殊假设下, 这个方程可以推广到平稳更新方程. Li 和 Garrido (2004b) 推广了他们的结论, 当索赔时间间隔服从 Erlang(n) 分布时, 得到了类似

结论. Li 和 Dickson(2006) 研究了索赔时间间隔服从 Erlang(n) 分布时, 在 Sparre Andersen 风险过程下破产前最大盈余的分布, 得到了个体风险服从特定分布时的显式解. Albrecher 等 (2005) 研究了在常数分红限, 用拉普拉斯变换方法推导了直到破产时折现分红和的矩母函数的积 - 微分方程. 近年来, 聚合风险索赔问题为众多学者所关注, 许多作者的研究工作涉猎相关聚合索赔风险模型的各个方面. 这方面的已有成果见 Yuen 等 (2002), Li 和 Garrido (2005), Li 和 Lu (2005), Zhang 等 (2009)(是对 Li 和 Lu (2005) 结果的推广) 的工作. Yuen 等 (2002) 研究了一个风险过程包含两个相依保险风险的风险过程的不破产问题. 其中盈余过程可以描述为具有两个独立风险的过程, 此两类风险的索赔次数过程分别为泊松过程和 Sparre Andersen 过程, 索赔时间间隔服从 Erlang(2) 分布. 他们仅是得到了索赔额服从指数分布时的显式结果. Li 和 Garrido (2005) 在 Yuen 等的研究基础上研究了破产概率问题. 他们研究的是具有两类独立风险: 一个是泊松过程, 另一个是复合更新过程, 索赔时间间隔服从 Erlang(2) 分布. 得到了两类索赔分布为 K_n 族分布时的显式结果. Li 和 Lu (2005) 研究了包含两个独立保险风险: 一个是泊松过程, 一个是广义 Erlang(2) 过程构成的风险模型的期望折现罚函数. S. Chadjiconstantinidis 和 A. D. Papaioannou(2009) 再次研究了这个风险模型, 证明 Gerber-Shiu 函数满足某个瑕更新方程.

在经典保险风险模型中, 总是假设净利率为零、聚合索赔没有折现值, 但是现实中利息还可用来再投资, 且聚合索赔的折现率往往是非零的, 而且随索赔的不同而有所波动. 正如 Jang (2004) 指出的, 事实上利率零与非零这两种情况是不一样的. 与经典模型相对, 近来许多学者开发研究了非零净利率下的破产问题和聚合索赔问题. F.Delbaen 和 J. Haezendonck(1987) 研究了宏观经济因素, 如利息和通货膨胀对经典风险盈余过程的影响. Rui M. R. Cardoso 和 Howard R. Waters(2003) 研究用常数利息力作用于经典保险盈余过程, 提出用离散时间马尔可夫 (Markov) 链估计风险过程的有限时间破产概率的数值算法, 基于所提出的方法, 得到了相应有限时间破产概率的上限和下限. Yuen 等 (2007) 等研究了带有利率及常数分红界的经典盈余过程. 在常数利率下, 推导出了 Gerber-Shiu 期望折现罚函数的积–微分方程. 应用 Lin, Willmot 和 Drekic(2003) 的思想, 得到了积分–差分方程的解. 对一些特殊指数索赔情况, 对 Gerber-Shiu 期望折现罚函数能得到封闭形式表达式, 最后将积分–差分方程推广到带有随机返还投资组合的盈余情况. Yi Lu 和 Shuanming Li(2009) 研究了带有分红限的马尔可夫体制转换风险模型. 考虑的是泊松索赔到达率与索赔额分布由一个潜在的马尔可夫跳过程驱动下的马尔可夫风险模型, 采用与 Liu 等 (2006) 相同的方法, 得出了 Gerber-Shiu 折现罚函数与破产前分红给付的矩相一致的结论, 将带有分红策略的经典风险模型的结果应用到该模型, 给出了该模型下积分 - 微分方程系统的矩阵形式并得出这一形式的解析解. Wu 等 (2005) 得出

了带常利率的经典风险过程的三个精算特征变量: 破产时间、破产前瞬时盈余与破产时亏损额的联合分布. Delbaen 和 Haezendonck(1987) 与 Willmot (1989) 等分析了复合泊松净保费的折现聚合索赔. Léveille 和 Garrido(2001) 导出了一个聚合索赔的一二阶矩的分析表达式. Jang (2004) 用冲击噪声过程得到了折现聚合索赔分布的拉普拉斯变换. 这些作者考虑的折现聚合索赔通常在下述假设条件下：首先, 索赔发生服从一个泊松过程; 其次, 索赔形成一个独立同分布随机变量序列; 最后, 索赔额与索赔发生时间点独立.

Bara Kim 和 Hwa-Sung Kim (2007) 将金融环境引入风险模型, 在较弱条件下得到折现聚合索赔的一阶、二阶矩的显式表达式. 第一, 他们假设索赔的到达可以相关. 第二, 索赔额也可以相关. 第三, 索赔额与到达时间点允许相依. 大多数文献涉及的是连续时间零或非零净利率保险风险模型下的聚合索赔. 然而, 研究金融风险环境下索赔、索赔次数过程、索赔发生时间点等多变量相关情况, 尤其是离散时间带有随机利率的保险模型还不多见. 特别地, 离散框架下带随机利率的风险模型的优点是随机利率的弹性性质. 在上述文献及其研究成果中, 未发现对自然灾害风险的详细研究, 尤其是对自然灾害风险进行数学建模的系统研究. 从文献的缺陷与不足出发, 在本书中考虑到在文献应用于风险研究的一些方法和自然灾害风险自身的特点, 建立自然灾害风险模型, 研究了其矩特征. 本书将就这些问题, 尤其是离散框架下情形, 加以研究, 将研究这些问题的方法引入地震风险模型, 并对地震风险模型的一些数字特征加以详细研究.

如果我们说定价是保险工作的核心, 没有任何人表示怀疑, 因为精算师和保险人员主要关心的问题有三个, 即保费的厘定、准备金的提取以及破产概率的研究等. 其中保费的厘定是保险业务开展中最基本的一环, 而其他两个又与之息息相关. 对投保人来说, 保单就是一种商品, 物美价廉的商品向来是顾客的首选, 因此, 投保人在选择保险产品时, 价格是需要考虑的关键因素. 在精算学里, 保费的计算一直处于核心地位. 一般地, 承保的风险被定义为一个非负损失随机变量, 保险定价实质上是将一个不断变化的风险对象确定相对固定的价格. 考虑风险的最优定价问题, 实质是求解最优化问题.

最优化问题是精算科学中一类经典问题. 一般来讲, 作者考虑的是保险公司的观点. 一般是在约束一些保费条件下试图将保险公司的风险度量达到最小. Kliger 和 Levikson (1998) 从经济观点研究了一类具有独立同分布索赔变量的组合. 针对某类风险, 他们找到使保险公司受益最大的保险客户数量, 这种情况下客户的数量是保费的一个函数. Goovaerts 等 (1984) 指出了保费计算原理的性质.

在保险范围内, 人们总是对随机变量和的分布感兴趣, 主要体现在某特定时间段内保险组合的聚合索赔或到某时间点一个保险策略或组合的折现赔付. 从计算方便出发, 进行各相加的分量的独立假设是必要的, 但分量间的独立性往往相反. 序

理论是研究优化问题的重要工具之一, Dhaene 等 (2002) 应用序理论考虑的是分量的分布已知, 但它们之间的相关结构位置或太烦琐不变进行讨论时, 应用和的渐近理论, 提出了一些新的研究理论方法.

Dhaene 和 Goovaerts (1996, 1997), Wang 和 Dhaene (1998), Goovaerts 和 Redant(1999), Goovaerts 和 Dhaene(1999), Goovaerts 和 Kaas(2002), Dhaene 等 (2000b), Goovaert 等 (2000), Simon 等 (2000), Vyncke 等 (2001), Kaas 等 (2000,2001), Denuit 等 (2001a), DeVijlder 和 Dhaene(2002) 以及 Denuit 等 (1997), Müller (1997), Bäuerle 和 Müller (1998), Wang 和 Young (1998), Denuit 等 (1999a, b, 2001b, 2002), Denuit 和 Cornet (1999), Dhaene 和 Denuit (1999), Embrechts 等 (2001), Cossette 等 (2000, 2002), Dhaene 等 (2000a) 等都是用优化理论研究的相依风险下聚合索赔的问题. 用优化理论方法, Dahan 等 (2002, 2003, 2004a, b) 研究了寿险组合中各种成分的作用情况. Denuit 和 Frostig (2006) 用优化的凸序和单调性概念研究一般保险组合不同成分的作用. Denuit 和 Frostig (2006) 认为异类风险使危险趋于增加, 文献中将这种直观想法公式化了. Frostig 等 (2006) 只是考虑了平方距离测度, Zaks 等 (2007) 推广了 (Zaks 等 2006) 做的工作, 考虑了一般的凸距离测度, 在给定总的小破产概率情况下, 他们找到了每类风险的保费, 这个保费使得距离函数的和最小. Bowers 等 (1997, Chapter 2.5) 建议每类风险的保费可以用期望准则进行定价.

再保险 (reinsurance) 是对保险人的保险, 是保险人对其承担的风险责任进行转移的行为或方式, 保证保险公司经营的安全和稳定. 较早的最优再保险问题文献有: Gerber(1979), Waters(1983), Pesonen (1984), Deprez 和 Gerber (1985), Goovaerts 等 (1989, 1990), Daykin 等 (1994), Bühlmann (1996), Bowers 等 (1997), Rolski 等 (1999), Gerber 和 Pafumi (1998), Young (1999), Schmitter (2001), Verlaak 和 Beirlant(2003) 的相关文献, 还有被 Kaluszka(2004) 引用的文章等. 这些文献的结论都是在不同的准则下得到的最优停止损失再保险策略. 近年来又有一些最优再保险问题的文章涌现出来, 如 Kaluszka (2001, 2004), Gajek 和 Zagrodny (2000, 2004), 还有 Cao(2007) 等. 这些作者提出了一些确立再保险合约的方法, 给出了最优再保合约的充分条件. 上述文献中都是研究只有一个再保险公司的保险问题, 由于巨灾往往损失很大, 并不是一个保险公司和再保险公司所能承受的, 研究有多个保险公司参与的再保问题就显得非常有价值. 在本书中研究了多个保险公司共同参与的再保险问题.

准备金在保险、银行和证券等领域都有广泛的应用, 在不同的领域, 准备金的概念有不同的内涵和外延. 简单地说, "非寿险准备金"就是指经营非寿险业务的保险公司根据保险合同用于支付未来赔付所应预留或准备的资金. 非寿险准备金的科学估计、有效检验与合理评估, 一方面能够保证产品定价准确, 提高保险公司的市场竞争力; 另一方面, 可以增强保险公司的偿付能力, 降低经营风险, 提高风险管

理水平. 在非寿险精算中, 传统线性模型虽然得到了广泛的应用, 但也面临无法克服的缺点. 用于损失准备金估计的广义线性模型将传统线性模型中反应变量的正态假设放宽为具有散布参数的数型分布, 这大大扩展了其在非寿险精算中的应用. 使用该分布假设, 即可对连续变量进行拟合, 也可对离散型变量进行拟合; 即可对分布为对称的变量进行拟合, 也可对分布具有偏度的变量进行拟合; 而且对非寿险精算中的常用变量, 如索赔次数、损额度、损失率、损失频率等都可以建立广义线性模型进行拟合并进行预测和估计; 建立广义线性模型符合保险精算中反应变量与其影响因素之间的更为复杂的非线性关系, 从而克服了传统线性模型应用上的局限性. 广义线性模型作为线性模型的拓展, 其良好的特性决定了其在非寿险学中应用的广泛性.

广义线性模型在形式上是常见的正态线性模型的直接推广. 广义线性模型的个别特例起源很早, Fisher 在 1919 年就曾用过它. 最重要的 Logistic 模型, 在 20 世纪 40~50 年代曾被 Berkson, Dyke 和 Patterson 等使用过. 1972 年 Nelder 和 Wedderburn(1992) 在一篇论文中引进广义线性模型一词, 自那时以来研究工作逐渐增加. 1983 年 McCullagh 和 Nelder 出版了系统论述此专题的专著并于 1989 年再版, 研究论文数以千计. 它可适用于连续数据和离散数据, 特别是后者, 如属性数据、计数数据. 这在实用上, 不仅在生物、医学、社会数据的统计分析上有重要的意义, 而且在经济上也有重要应用. 在精算统计学领域的许多问题可以归结为 GLM. 除了假设误差项服从正态分布, 还可以考虑具有泊松、伽马和二项分布等形式的随机型误差. 此外, 观察变量的期望值不一定必须是回归量的线性函数, 有时它可以是一些协变量的线性变换的一个函数, 如对数函数. 在最后这种情形下, 可以得到适用于大多数保险场合的乘积模型. 用这种方法我们可以处理在 IBNR 型理赔下盈余的估计问题, 也可以解决一些保费估计问题. 在信度模型中一般有许多随机影响, 但在 GLM 模型中这些作用则是相对确定的, 尽管仍然未知. 对于 GLM 模型, 我们可以寻求计算软件来处理众多问题.

正是由于广义线性模型在理论和实际应用中的重要意义和价值, 对广义线性模型问题的研究一直是学者关注的焦点问题之一. 这方面的文献如: Pregibon(1982), Stefanski Carroll 和 Ruppert(1986), Hampel 等 (1986), P. J. Huber(1989), Künch et al.(1989), McCullagh 和 Nelder(1989), Heyde(1997), Preisser 和 Qaquish(1999) 等. Christophe Croux 对 M 估计的性质的证明具有突出贡献. 重要贡献见 Croux (2003), Boudt 和 Croux (2007), Mancini 等 (2005) 的文献, Muler 与 Yohai (2002, 2006) 提出了一个稳健的 M 估计. 这些作者都假设模型的输入变量是可测的, 但是实施时收集到的协变量值存在着不可忽略的度量误差. 一些近期的工作有 Wayne A. Fuller(1980, 2007), Hausman 等 (1998), Hsiao 和 Sun(1999), Li 等 (2003) 和 Li 等 (2004).

1.2 本书的基本内容

本书共分七章, 各章内容安排如下.

第 1 章是绪论部分. 主要是指出本书相关内容进行研究的背景、意义、研究内容与方法, 同时也包括与本书研究内容相承文献的综述.

第 2 章介绍了风险模型与保险定价的基础知识.

第 3 章和第 4 章讨论各种地震风险模型在马尔可夫环境下的矩. 在这几部分, 首先在与实际情况相符情形下建立地震风险模型, 然后应用拉普拉斯变换的性质研究地震风险的矩, 最后得到风险的一阶矩、二阶矩的显式表达式.

第 5 章讨论了两类保险定价问题. 一是应用 Shur 凸理论和优先序理论研究了四类问题的定价方法. 这几个问题均是考虑的凸距离测度下的目标函数的带约束的优化问题, 方法简便直接, 对定价方法提供了广阔的空间与思路. 二是应用拉格朗日乘子法研究了异类风险组合在一般凸增距离测度下的带约束定价问题. 研究方法实用, 清晰明了, 适合精算需求. 三是讨论各种最优再保险问题, 其中突出了停止损失再保险, 这种保险方法可以应用于地震保险模型.

第 6 章考虑的是具有两类相关风险的带常利率风险过程的破产函数. 推导出了破产前瞬间盈余的分布函数、破产后瞬间盈余的分布函数、破产前后瞬间盈余的联合分布函数的显式结果, 还得到了一些其他显式结果.

第 7 章研究了广义线性模型在不可观状态下、带测量误差的 M 估计方法.

第 2 章　风 险 模 型

本章是本书的基础内容. 主要讨论个体风险模型、聚合风险模型下保险人风险组合的总理赔 S 的分布函数和矩特征以及马尔可夫链与可测转移矩阵的基本概念和基本理论.

2.1　个体风险模型

假设保险人在某个时间段内, 比如, 一个会计年度内已售出 n 张保单, 保单持有者若遭遇损失则可以根据投保内容向保险人索赔, 保险人则按保单的承诺赔付被保险人, 即理赔. 对第 i 张保单来说, 在这段时间内可能发生索赔也可能不发生, 若发生索赔, 则索赔额可能是一个确定的数目也可能按损失的大小和保单承诺的具体条款而定, 假定第 i 张保单可能发生的理赔 (或理解为保险人的赔付) 为 X_i, 则 X_i 应视作随机变量, 在所考虑时间段内的理赔或赔付总量为 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 个体风险模型就是要研究随机变量 S 分布情况, 并且在此基础上不仅要确定保险人随机资产的均值和方差, 还要确定其理赔额超过某一给定门限值的概率. 但在一般情况下要获得 S 分布是十分复杂的, 只能在一些特殊假设下建立关于总理赔 S 的模型, 然后讨论其分布. 个体风险模型通常作如下假设:

(1) 每张保单是否发生理赔以及理赔额大小是相互独立、互不影响的, 即对 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的假设都是对实际情况的简化和理想化, 一般设它们是一列相互独立的随机变量.

(2) 每张保单至多发生一次理赔. 若用随机变量 N 表示可能发生的理赔次数, 则 N 的取值为 0 或 1, 亦即 N 服从 0-1 分布或伯努利分布. 其中, 理赔一次的概率的确定视具体问题而定, 如在寿险中可跟据某种生命表来确定.

(3) 保单组合 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 中的风险都为同质风险, 理解为同类保单, 数学上则反映为每张保单的理赔 X_i 具有相同的分布.

(4) 所考虑的保单总数 n 是一个确定的正整数.

承保人最关心的问题是总索赔 S 的分布规律, 如果 S 的分布规律清楚了, 就可以恰当地定出该收多少保费, 如何支配和运用收取的保费. 本节的主要目的是给

出 S 的一些计算方法. 假设一项业务中的风险是独立的随机变量, 那么总风险的分布可以用卷积方法得到. 然而这样做非常麻烦, 因而需要其他更简单的方法. 一种就是利用矩母函数或利用相关的一些变换, 如特征函数、概率母函数、累积量母函数等. 有时需要通过辨认一个卷积的母函数来识别其对应的分布函数. 另一种是对总风险的分布作出近似. 如果 S 是多个随机变量的和, 那么根据中心极限定理得到 S 的近似正态分布. 但在保险实务中不尽令人满意, 因为在这里 S 的三阶中心矩近似为 0, 而保险中 S 的三阶中心矩通常大于 0, 在保险实践中, 尾概率对应大额理赔的概率, 这个尾概率的近似误差偏大, 所以需要 S 分布的更为精细的近似.

2.1.1 混合分布和风险

在保险实务中, 风险通常不能由纯粹离散型的或连续型的随机变量来刻画. 例如, 在责任险中, 理赔额有很大的取值范围, 每一种理赔额都对应一个非常小的发生概率. 有两种例外情况不容忽视: 无理赔 (理赔为 0) 发生的概率很大, 以及理赔额等于最大保险金额的概率 (即损失超过某个门限值的概率). 为求这样的混合随机变量的均值, 我们用黎曼–斯蒂尔切斯 (Riemann-Stieltjes) 积分, 而不必去探究其数学原理. 能够产生这类随机变量的一个简单而灵活的模型是混合模型. 该模型取决于事件结果: 对 0 理赔和最大额理赔, 采用离散分布, 其他采用连续分布. 下面讨论保险风险的一些实例.

例2.1.1 (有索赔, 且索赔额服从指数分布) 假设风险 X 具有如下分布:

(1) $P(X=0)=\dfrac{1}{2}$,

(2) $P(X\in[x,x+\mathrm{d}x])=\dfrac{1}{2}\beta\mathrm{e}^{-\beta x},\quad \beta=0.1,\ x>0$,

这里 $\mathrm{d}x$ 表示正的无穷小量. X 的均值是多少? 对于厌恶系数为 $\alpha=0.01$ 且具有指数效用的人, 愿意为风险 X 支付的最大保费为多少?

随机变量 X 不是连续型的, 因为它的分布函数在 0 点有一个跳跃: 也不是离散型的, 因为其分布函数不是一个阶梯函数. 在计算 X 的均值时, 可以把分布函数有跳跃的部分单独处理. 因此有

$$
\begin{aligned}
EX&=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F_X(x)=0\mathrm{d}F_X(0)+\int_0^{\infty}xF_X'(x)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x\beta\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x=5.
\end{aligned}
$$

如果被保险人使用的是参数为 $\alpha=0.01$ 的指数效用函数, 则由最大保费公式得

$$
\begin{aligned}
P^{+}&=\frac{1}{\beta}\log\left(m_X(x)\right)=\frac{1}{\beta}\log\left(\mathrm{e}^0\mathrm{d}F_X(0)+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x\beta\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{\beta}\log\left(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2(\beta-\alpha)}\right)=100\log\frac{19}{18}\approx 5.4.
\end{aligned}
$$