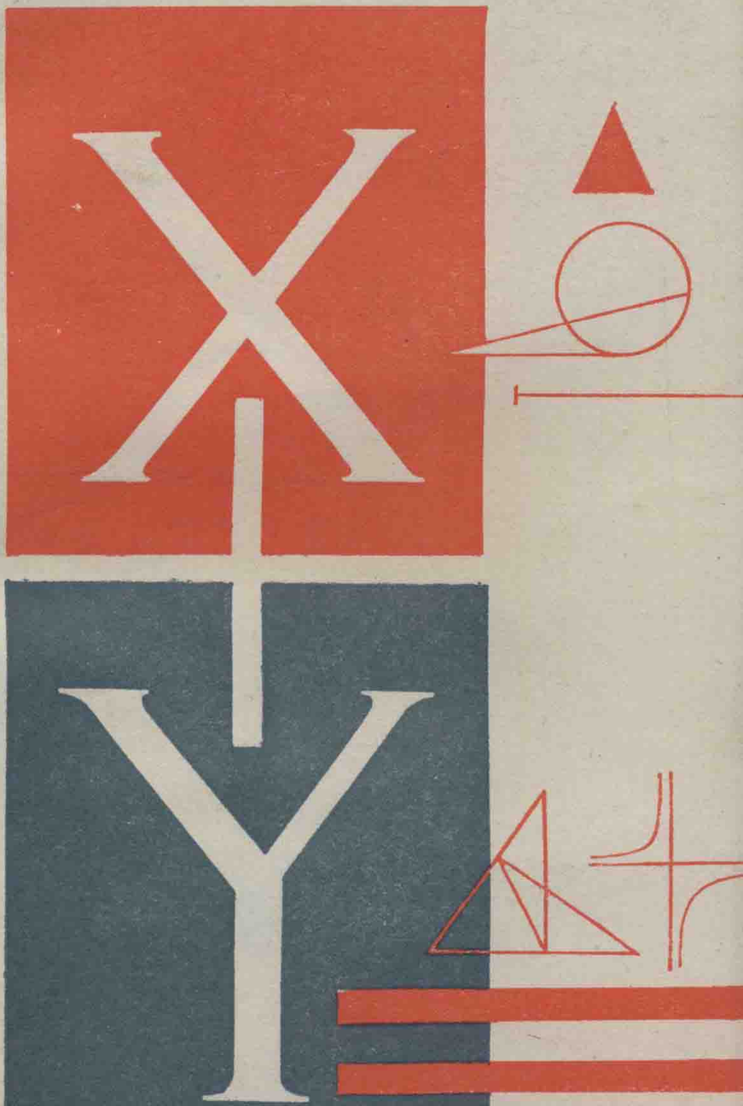
代数

第一册

高中数学题精编



浙江教育出版社

高中数学题精编

代 数

第一册

许纪传 钱孝华 江焕棣
陶敏之 谢玉兰 丁宗武

浙江教育出版社

高中数学题精编

代　数

第一册

浙江教育出版社出版
（杭州武林路125号）
浙江临平印刷厂印刷
浙江省新华书店发行

•

开本787×1092　1/32　印张5.375 字数120,000
1984年11月第一版
1984年11月第一次印刷
印数：00,001—77,500

统一书号：7346·141
定　价：0.53　元

说　明

1981年，我们曾编过《高中数学教材补充题》(共四册)，主要帮助高中学生正确理解数学概念，提高运算和逻辑思维能力，并为教师在备课时挑选例题和补充习题提供一点方便。出版以后印行四次，较受读者欢迎。这回吸取了广大读者的意见，并依据全日制六年制高中数学教材，对原书经过一番认真的筛选和修改，编为《高中数学题精编》。

在编写过程中，本着加强基础知识，训练基本技能的精神，选编习题力求新颖、灵活、多样，重视知识连贯和综合运用。与原书比较，较大区别是在每节习题前增加了〔分析与要点〕，在这部分里，我们并不求全，重在把教材内容的本质与精华提炼出来，并渗入编者自己学习的体会，以期对教与学都能稍有裨益。亦望以此与同志们共同探讨。

全书按教材内容的顺序分册分段编写，教师和学生可按教学进度与课本同步使用。其中A组属于基本题，B组略有提高或带有一定的综合，C组难度较大，可供学有余力的同学练习。读者可根据实际情况灵活选用，不必强求一律。

本书在编写过程中得到王祖樾老师的热忱帮助，提出了许多宝贵意见，谨在此表示衷心的感谢。

一九八四年五月

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一　集　合

〔**分析与要点**〕

1　集合论是现代数学的基础，但在中学里，其作用仅是启蒙的.不过，它也有直接作用：有利于函数概念，特别是反函数概念的清晰形成；有利于表达的简洁和对一些数学概念的辅助说明与直观表示(画"集合圆圈"示意).

2　集合是数学的原始概念，不定义，只描述.但要注意"四性"：

(1) 确定性："相当大的数的全体"、"3个细菌繁殖的全体".均不视为集合；

(2) 互异性：$\{1,1,1\}$不可写，只能写$\{1\}$；

(3) 无序性：$\{1,2,3\}$与$\{3,2,1\}$是同一集合；

(4) 任意性：元素可代表任意具体事物，比如，不仅可代表实数、复数，还可代表多项式、直线、平面、函数等等.

3　集合的表示法有

列举法：$\{\cdots\cdots\}$，

描述法：i) $\{x|x$ 具有性质 $P\}$；

ii) $\{$具有性质 P 的事物$\}$.

4　元素与集合的关系：属于$\in$；不属于$\notin$.

$$x \neq \{x\};$$

$$x\in A \Longrightarrow \{x\}\subseteq A;$$

$$x \in A \not\Rightarrow x \subseteq A;$$

但有特例：$\phi \in \{\phi\}$ 且 $\phi \subset \{\phi\}$（ϕ表示空集）。

5 集合与集合的关系：包含于$\subseteq$；不包含于$\nsubseteq$。

$$\{x\} \subseteq A \Longrightarrow x \in A;$$

$$\{x\} \subseteq A \not\Rightarrow \{x\} \in A;$$

但有特例：$A = \{1,2,\{1,2\}\}$，

$$\{1,2\} \subset A \text{ 且 } \{1,2\} \in A.$$

6 集合的相等：

$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$；

$A = B \Longleftrightarrow$"若 $x \in A$，则 $x \in B$"且"若 $x \in B$，则 $x \in A$"。

7 集合的运算：交$\cap$（"且"），并$\cup$（"或"），补$\bar{A}$（"否定"）。注意集合运算与数运算的差异性与相似性。

8 集合题目大致分三类：

第一类是搞基本概念的，包括是非、选择、问答。这类题目利于学生智力的发展，利于优秀学生的培养。解题不需要其他各种知识，只需要清晰的集合论概念。

第二类是求出具体的集合。这类题目利于学生回忆、复习、巩固以前学过的（算术的、代数的、几何的）知识。解题的主要困难是已学知识的遗忘、缺陷或无知。

第三类是集合运算。这类题目利于逻辑训练（"且"、"或"、"非"），对学习逻辑代数与计算机是有好处的。解题的主要困难在于集合运算概念的本身，是否理解了，深刻领会了。

9 无限集在本质上异于有限集。有限集的一些属性，如可取到最大值、最小值等，不能不加思索地搬到无限集上来。

10 学习集合知识的心理障碍：学生习惯于把"数"作为"认识单元"，具体直观。如今把"元素"作为"认识单元"，抽象，无所

适从。

克服心理障碍的途径：指出用数代表事物的局限性；通过诱导、分析、练习，使学生的"认识单元"扩大；逐步建立与集合知识结构相适应的"思维结构"。

学习集合知识，有如学生首次学习平面几何知识，入门教学是至关重要的，应立足于促进学生智力的发展。

(A)

例 判定下列问题：

(1) "充分接近于1的实数 x 全体"是不是集合？

(2) 可否有$\{a,a,b,b,c,c\}$这样的集合写法？

(3) $\{\pi,1,\sqrt{2}\}$与$\{1,\sqrt{2},\pi\}$是同一个集合吗？

(4) $A=\{y=kx \mid k\in R\}$是集合吗？

答：(1) 不是集合。"充分接近于1"不是一个确定的标准，数量界线不明，无法判定一个数是充分接近于1还是不充分接近于1。因此"充分接近于1的实数 x 全体"不构成集合。

(2) 不可。集合中的元素应是互异的，故只能写为$\{a,b,c\}$。

(3) 同一集合。集合作为元素的汇集，犹如一个口袋里装东西，是不论次序的。因此，$\{\pi,1,\sqrt{2}\}$与$\{1,\sqrt{2},\pi\}$是同一集合。

(4) 是集合。其中一个元素是对应于一个 $k\in R$ 的直线 $y=kx$。

〔注意〕上例是为了矫正集合基本概念的。前面我们所指出的关于集合的"四性"：确定性，互异性，无序性，任意性，可作为一种矫正基本概念的标准。

1. 下列各问题是否构成集合：

(1) 平面内的一切点； (2) 一切三角形；

(3) 某高一年级全体学生；

(4) 一切很小的数；

(5) $\{x \mid |x-\sqrt{2}|$ 为充分小的数，x 为实数$\}$；

(6) $\{x \mid x>n, n$ 为任意自然数，x 为实数$\}$.

2. 以下的集合表示是否合理：

(1) $\{a, b, c, a, b, c, a, b, c\}$；

(2) $\left\{1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \cdots, 0, \frac{1}{n}, 0, \cdots\right\}$；

(3) $\{0.999\cdots9\cdots\}$.

3. 判断下列集合的异同：

(1) $\{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}$ 与 $\{n, n-1, \cdots, 3, 2, 1\}$；

(2) $\{(1,2)\}$与$\{(2,1)\}$； (3) $\{\sqrt{2}\}$ 与 $\{1.414\}$.

4. 判断以下各题是否为集合：

(1) $\{1, 2, \pi, \sqrt{3}, i, 3+i\}$；

(2) $\{ax^2+bx+c \mid a, b, c \in R\}$；

(3) $\{a, b, \{a, b\}\}$； (4) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$；

(5) $\{\{a\}\}$； (6) $\{\phi, \{\phi\}\}$(ϕ 表示空集).

5. (1) 设 $A=\{x \mid 2x=4\}$，问 $A=2$ 对吗？

(2) 设 $A=\{x \mid (x-1)(x-2)=0\}$，问是否有 $A=1, 2$？

6. (1) 设 ϕ 表示空集，$\phi=\{\phi\}$对吗？说出 $\{\phi\}$ 的含义；

(2) $\{0\}$ 与 ϕ，0 与 ϕ，$\{0\}$与$\{\phi\}$ 是否一回事？

7. (1) $\{x \mid x^2=-1, x$ 为实数$\}$与 ϕ 是同一回事吗？

(2) $\{x \mid x^2=-1\}$与 ϕ 是同一回事吗？

8. $A=\{1, 2\}$的全部子集是$\{1\}$，$\{2\}$，对吗？

9. 设A为无限集，它的子集一定是有限集，对吗？

〔**注意**〕(1) 元素与集合是两个不同概念，因而是有区别

的，但是这种区别是针对它们的相互关系而言，如加以孤立，则就会混淆不清。因为孤立地说，由元素的任意性，集合也可作为元素，以构成新集。如 $A=\{1,2,3\}$，以 A 的一切子集为元素又构成新集：

$$B=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},A\}.$$

因此，元素是相对于由它组成的集合而言的，集合也是相对于组成它的元素而言的；

（2）空集首先是集，它不含元素，但是“空集 ϕ”作为元素的集 $\{\phi\}$ 却不是空集了，集合 $\{\phi\}$ 含有元素 ϕ。利用元素的任意性，还可生成新的集合 $\{\phi,\{\phi\}\}$；

（3）空集是为了方便而引入的。由于空集引入并不导致矛盾，所以引进空集既方便又可行。不要去钻牛角尖：空集既然不含任何东西，那么空集究竟是什么东西呢？

10．指出下列各集合的元素：

（1）$A=\{$在 1 到 30 之间的 8 的一切整倍数$\}$；

（2）$A=\{$在 1 到 30 之间的 6 与 8 的一切公倍数$\}$；

（3）$A=\{$合数 30 的一切质因数$\}$；

（4）$A=\{$12 与 30 的最大公约数的一切质因数$\}$；

（5）$A=\{$12 与 30 的最小公倍数的一切质因数$\}$。

11．用列举法表示下列各集合：

（1）大于 2 小于 12 的自然数的集合；

（2）与 1 相差 4 的有理数集合；

（3）42 的所有约数的集合；

（4）方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的集合；

（5）不等式 $x^2-3x-4<0$ 的整数解的集合；

（6）$\{(x,y)\,|\,x\in N,y\in N,x+y=6\}$；

(7) $\left\{x \mid x=\frac{m}{n}, m\in Z, |m|<2, n\in N, n\leqslant 3\right\}$.

12. 用描述法$\{x|x$具有某种性质$\}$来表示下列集合：

(1) {奇数}； (2) {偶数}；

(3) {10 的整数次幂}；

(4) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \cdots\right\}$.

13. 下列集合哪些是有限集？无限集？单元素集？空集？

(1) 亿以内的正整数集合；

(2) 大于一万的整数集合；

(3) 5 的倍数的集合；

(4) 20 的约数的集合；

(5) 方程 $ax+b=0(a\neq 0)$ 的根的集合；

(6) 函数 $y=-(x-5)^2$ 的正数值集合.

14. 若 $A=\{x|x=2n, n\in Z\}$, $B=\{x|x=2n+1, n\in Z\}$，用符号($\in, \notin, \subset, \supset, \not\subset, =$)填空：

(1) $\{2,8\}$____A； (2) 107____A； (3) A____Z；

(4) ϕ____B； (5) 0____N； (6) $\{0\}$____B；

(7) $A\cap B$____$\{0\}$； (8) $A\cup B$____N；

(9) 0____$\{0\}$； (10) 0____ϕ.

15. 写出下列各集合的一切子集：

(1) $A=\{0,1,2\}$； (2) $\{0\}$； (3) $\{a,b,c,d\}$.

16. 下列集合中哪些是空集？哪些是相等的集合？哪些集合间有真子集关系？

$A=\{x|x=2y, y\in Z\}$, $B=\{2\}$, $C=\{x|x^2=1, x\in A\}$,
$D=\{x|x\in A$, 且 x 为质数$\}$, $E=\{x|x^2=2, x\in Q\}$.

17. 填空：

(1) $\{a, b, \_\_\_\_\} \cap \{c, d, \_\_\_\_\} = \{b, c\}$；

(2) $\{a, b, \_\_\_\_\} \cup \{b, d, c\} = \{a, b, c, d, \_\_\_\_\}$；

(3) $\{a, d, \_\_\_\_, \_\_\_\_\} \cap \{d, c, e, \_\_\_\_, \_\_\_\_\} = \{a, b, e, \_\_\_\_\}$。

18. 用符号（$\in$，$\notin$，$=$，$\supset$，$\subset$等）及连词（且，或）填空：

(1) {菱形}____{正方形}；(2) {矩形}____{长方形}；

(3) $\{\pi\}$____{无理数}；

(4) $\{x \mid 0 < x < +\infty, x \in R\}$____$\{x \mid 0 \leqslant x < +\infty, x \in R\}$；

(5) $\{x \mid |x| - 1 = 0\}$____$\{x \mid x - 1 = 0\}$；

(6) 若 $x \in A \cap B$，则 x____A____x____B；

(7) 若 $x \notin A \cup B$，则 x____A____x____B；

(8) 若 $A \subseteq B$，则 $A \cup B$____B，$A \cap B$____A；

(9) 若 $x \in A \cup B$，则 x____A____x____B；

(10) 若 $x \notin A \cap B$，则 x____A____x____B，或 x____A____x____B，或 x____A____x____B。

19. 若记 A = {三角形}，B = {等腰三角形}，C = {等边三角形}，D = {直角三角形}。则 A____D；C____A；$D \cap A =$____；$C \cup B =$____；$C \cap D =$____；$A \cup D$____；$D \cap B =$____。

20. 化简下列各题：

(1) $\{x \mid x < 5, x \in N\} \cap \{x \mid x > 2, x \in N\}$；

(2) $\{x \mid x < 4, x \in N\} \cap \{x \mid 2 < x < 5, x \in N\} \cap \{x \mid x > 3, x \in N\}$；

(3) $\{x \mid x > 6, x \in N\} \cup \{x \mid x > 5, x \in N\} \cup \{x \mid x < 7, x \in N\}$。

〔注意〕课本中没有讲交集与并集的结合律。交与并的结合律是成立的。

21. 求下列各题中的 $A\cap B$ 和 $A\cup B$：

(1) $A=\{x|-5<x<3\}$，$B=\{x|-1<x<4\}$；

(2) $A=\{x|x<5\}$，$B=\{x|x>2\}$；

(3) $A=\{6$ 的质因数$\}$，$B=\{x|x<3\}$；

(4) $A=\{(x,y)|2x+y=4\}$，$B=\{(x,y)|3x-2y=-1\}$。

22. 已知 $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{4,5,6,7,8\}$，$C=\{1,3,5,7,9\}$，$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$。求：

(1) $A\cap B$； (2) $A\cap C$； (3) $B\cap C$； (4) $A\cup B$；

(5) $B\cup C$； (6) $\overline{A}$； (7) $\overline{A\cup C}$； (8) $\overline{A}\cap\overline{C}$；

(9) $\overline{A}\cup\overline{C}$； (10) $\overline{A\cap C}$； (11) $\overline{\phi}$。

23. 如果 $I=\{a,b,c,d,e,f\}$，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,e,f\}$，那么 $\overline{A}=$____；$\overline{B}=$____；$A\cap\overline{A}=$____；$\overline{A}\cup\overline{B}=$____；$A\cap B=$____；$\overline{A\cup B}$；____；$A\cup B=$____；$\overline{A}\cap\overline{B}=$____；$A\cup\overline{A}=$____；$\overline{A\cap B}=$____。

24. 解下列各题：

(1) 已知全集 $I=R$，$A=\{x|0<x+1\leqslant 9\}$，求 $\overline{A}$；

(2) 已知全集 $I=R$，$A=\{x|x^2-4x-32\leqslant 0\}$，
$B=\{x|x^2-4x-5>0\}$，求 $A\cap B$，$\overline{A\cap B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$；

(3) 已知全集 $I=R$，$A=\{x||x|\geqslant 4\}$，$B=\{x|x>2\}$，
求：$A\cup B$，$\overline{A\cup B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$。

25. 解下列各题：

(1) 已知全集 $I=\{$所有的实数对$(x,y)\}$，

$A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-4}{x-2}=3, x,y\in R\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|$
$y=3x-2, x,y\in R\}$，求：$\overline{A}\cap B$；

(2) 设全集 $I=\{$青蛙，猫，猫头鹰，鸭子，乌龟，公鸡$\}$及它的三个子集：$A=\{$两只脚的动物$\}$，$B=\{$四只脚的动物$\}$，$C=\{$会游泳的动物$\}$。

①用列举法表示 A,B,C；

②求 $A\cap C, B\cap C, A\cap B$。

26. 记边长为 a 的正方形为全集 I，在它里面有集合 A,B,C 它们都是以半径为 r 的圆，如果 $A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap C$ 的面积都是 s，$A\cap B\cap C$ 的面积是 t，用 a,r,s,t 与数 π 表示：(1) $A\cap\overline{B}$ 的面积；(2) $A\cup C$ 的面积；(3) $\overline{A}\cap(B\cap C)$ 的面积；(4) $A\cap\overline{A}$ 的面积。

〔注意〕对上题这类题目，可通过画文恩($Venn$)图(即教材中第15页第11题这样的图)，再结合题目的特殊性，加以解决。

27. 化简下列解集：

(1) $\{x\mid x^2-9x+14<0\}$；(2) $\{x\mid x^2-3x+2=0\}$；

(3) $\{a\mid |2a+3|>1\}$； (4) $\left\{t\ \middle|\ \left|\frac{t}{4}-1\right|<\frac{1}{2}\right\}$；

(5) $\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}2x+y=2,\\ x-y=1.\end{cases}\right\}$；(6) $\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}3x^2+2y=1,\\ 2x-y=-1.\end{cases}\right\}$.

〔注意〕由方程组 $\begin{cases}x+y=4,\\ y+z=5,\\ z+x=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=1,\\ z=4,\end{cases}$ 此时解集 $A=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ \begin{cases}x+y=4,\\ y+z=5,\\ z+x=7,\end{cases}\right\}$ 应等于$\{(3,1,4)\}$。不应写成$\{3,1,4\}$或$\{x=3,y=1,z=4\}$，因为 A 的元素是三个实数组成的有序数组(x,y,z)，而$\{3,1,4\}$的元素是分别由一个实数组成的。

(B)

例 说明集合$\{x|x\neq x\}$是空集ϕ。

解 $\{x|x\neq x\}$表示$x\neq x$的这种x的全体，但是对任何事物x，总有$x=x$，不能有$x\neq x$。因此满足关系$x\neq x$的x是没有的、不存在的，从而$\{x|x\neq x\}$表示空集ϕ。

〔**注意**〕有些书把空集ϕ定义为$\{x|x\neq x\}$。

28．判定下列各题是否为集合：

(1) $\{x|x^2=9,2x=4\}$；(2) $\{x|x^2=-1\}$；

(3) $\{x||x|=-1\}$；　　(4) $\{x|x\in\phi,\phi$ 为空集$\}$；

(5) $\{1,2,\{1\},\{1,2\},\{\{1\},\{1,2\}\}\}$；

(6) 所有的集合之全体。

29．空集ϕ的子集是什么？

30．讨论下列三个集合之间的各种关系：$\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}$。

31．设集$A=\{1,2\}$，集$B=\{1,2,3,A\}$，A与B有何关系？

32．空集ϕ的一切子集所成的集合是什么？

33．$\phi\subset A$，对吗？

34．判断下列各题中给定的元素是否属于集合A,B,C,D：

(1) 元素：1, 3, 4, 12。

集合：$A=\{$被 2 整除的全体自然数$\}$，

$B=\{$被 4 整除的全体自然数$\}$，

$C=\{$被 3 整除的全体自然数$\}$，

$D=\{$小于 12 的质数$\}$；

(2) 元素：$\frac{1}{2},1,2,0,-4,\sqrt{2}$。

集合：$A=\{x|x=2n,n\in N\}$，$B=\{x|x=2n,n\in Z\}$，

$$C=\left\{x \middle| x=\frac{2n-1}{n+1}, n\in N\right\},$$

(3) 元素：x^2+2x+3。

集合：$A=\{$单项式$\}$，$B=\{$多项式$\}$，$C=\{$代数式$\}$；

(4) 元素：平面上的点 $P_1(1,2)$，$P_2(0,3)$。

集合：$A=\{(x,y)\,|\,2x^2-y=0\}$，

$B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=5\}$，

$C=\{(x,y)\,|\,x^3+y^2=9\}$。

35. (1) 若 $I=\left\{x \middle| x=\frac{1}{2^n}, n\in N\right\}$，$A=\left\{x \middle| x=\frac{1}{2^{2n}}, n\in N\right\}$，求 $\overline{A}$；

(2) 若 $A=\{x\,|\,x=2n, n\in N\}$，$B\{x\,|\,x=3n, n\in N\}$，求 $A\cap B$；

(3) 若 $A=\{x\,|\,x<12, x\in N\}$，$B=\{x\,|\,x>6, x\in N\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A\cap B}$，$\overline{A\cup B}$；

(4) 若 $I=\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 20, x\in Z\}$，$A=\{4$ 的倍数$\}$，$B=\{3$ 的倍数$\}$，$C=\{$质数$\}$，$D=\{$偶数$\}$。求 $\overline{D}$，$A\cup B$，$B\cap C$，$C\cap\overline{D}$，$\overline{D\cap C}$。

36. 用阴影表示下列各集合：

(1) ①$A\cap B\cap C$，②$A\cup(B\cap C)$，③$\overline{A}\cup B\cup C$，④$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$，(图 1)；(2) $A\cup(B\cap C)$，(图 2)。

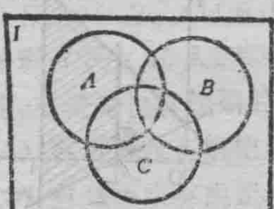


图 1

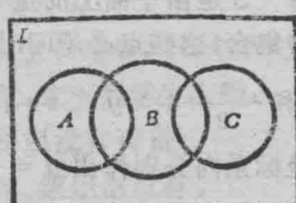


图 2

37. 用集合表示下列各图中阴影部分：

(1)

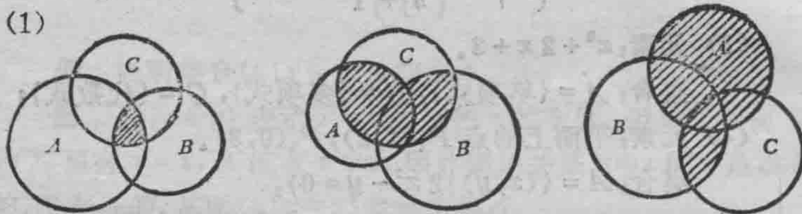


图 3

(2)

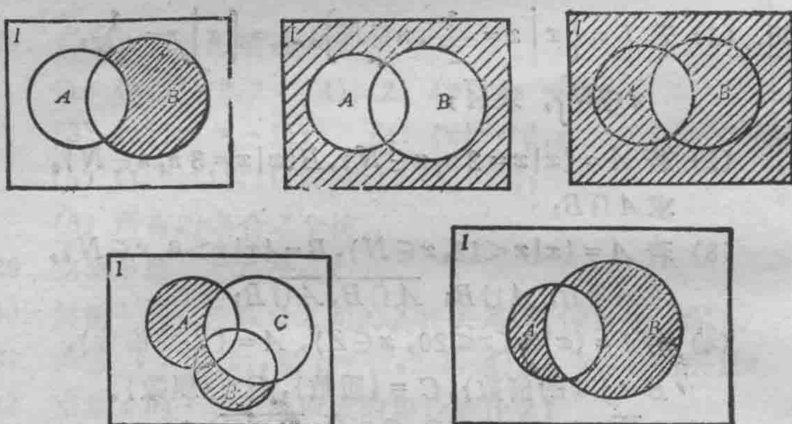


图 4

例 用图形表示点集 $S=\left\{(x,y)\,\middle|\,2<x<4,\ -\dfrac{x}{2}+1<y<x+1\right\}$.

解 S是由平面上的点(x,y)所组成的集合，这些点必须同时满足$2<x<4$和$-\dfrac{x}{2}+1<y<x+1$. 在平面直角坐标系内分别作出$y=-\dfrac{x}{2}+1$，$y=x+1$（图5）. 再由直线$x=2$、$x=4$

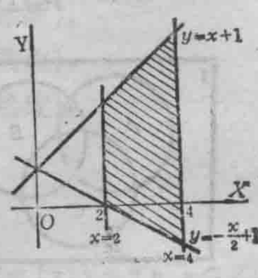


图 5