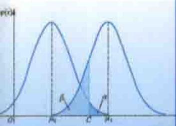
iCourse · 教材

高等农林院校基础课程系列

自主创新
方法先行

概率论与数理统计



主编　张丽娜　黄龙生

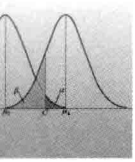
高等教育出版社

iCourse · 教材

高等农林院校基础课程系列

自主创新
方法先行

概率论与数理统计



主　编　张丽娜　黄龙生

副主编　李春兰　侯贤敏　秦丽娟　黄　敏

编　委（按姓名拼音排序）

陈俊英　黄　敏　黄龙生　侯贤敏　李春兰　李红智
雷丽娟　刘淑俊　秦丽娟　邵洪波　田　苗　王　斌
闫广州　杨习清　郑亚勤　张丽娜　张彦蕊

高等教育出版社·北京

内容简介

本书主要介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法。 内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等，每章配有习题、自测题及其参考答案。全书结构严谨，层次清晰，由浅入深，循序渐进，知识与背景相结合，理论、应用与实验相结合。

本书数字资源与纸质教材紧密结合，包括本章小结、问一问、典型例题、应用案例、习题答案等，利于学生阅读和自学。

本教材可供高等院校农林、经济类本专科学生使用，亦可供其他专业的学生、相关专业的教师和科技工作者使用和参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/张丽娜，黄龙生主编.--北京：高等教育出版社，2015.8

iCourse·教材.高等农林院校基础课程系列

ISBN 978-7-04-043060-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张…②黄… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 140137 号

项目策划 王 瑜 李光跃 陈琪琳 李艳馥 吴雪梅

策划编辑 杨 帆 **责任编辑** 张长虹 **封面设计** 张 楠 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社（天津）印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm×1168mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	16.75	版　　次	2015年 8月第 1 版
字　　数	330 千字	印　　次	2015年 8月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	29.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 43060-00

iCourse · 数字课程（基础版）

概率论与数理统计

主编　张丽娜　黄龙生

http://abook.hep.com.cn/43060

登录方法：

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/43060，单击“注册”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”界面。
2. 课程充值：登录后单击右上方“充值”图标，正确输入教材封底标签上的明码和密码，单击“确定”按钮完成课程充值。
3. 在“我的课程”列表中选择已充值的数字课程，单击“进入课程”即可开始课程学习。

账号自登录之日起一年内有效，过期作废。

使用本账号如有任何问题，请发邮件至：yangfan@hep.com.cn

iCourse · 教材
高等农林院校基础课程系列

自主创新
方法先行

数字资源　先睹为快

本章小结　　典型例题　　应用案例

出版说明

"十二五"是继续深化高等教育教学改革、走以提高质量为核心的内涵式发展道路和农林教育综合改革深入推进的关键时期。教育教学改革的核心是课程建设，课程建设水平对教学质量和人才培养质量具有重要影响。2011年10月12日教育部发布了《教育部关于国家精品开放课程建设的实施意见》（教高[2011]8号），开启了信息技术和网络技术条件下校、省、国家三级精品开放课程建设的序幕。作为国家精品开放课程展示、运行和管理平台的"爱课程（iCourse）"网站也逐渐为高校师生和社会公众认知和使用。截至目前，已启动2 911门精品资源共享课和696门精品视频公开课的立项建设，其中的1 000多门精品资源共享课和600多门精品视频公开课已经在"爱课程（iCourse）"网站上线。

高等教育出版社承担着"'十二五'本科教学工程"中国家精品开放课程建设的组织实施和平台建设运营的重要任务，在与广大高校，特别是高等农林院校的调研和协作中，我们了解到当前高校的教与学发生了深刻变化，也真切感受到课程和教材建设所面临的挑战和机遇。如何建设支撑学生自主学习和校际共建共享的课程和新形态教材成为现实课题，结合我社2009年以来在数字课程建设上的探索和实践，我们提出了"高等农林院校基础课程精品资源共享课及系列教材"建设项目，并获批列入科技部"科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践"项目（项目编号：2009IM010400）。项目建设理念得到了众多农林高校的积极响应，并于2012年12月—2013年6月，分别在北京、扬州、武汉、哈尔滨、福建等地陆续召开了项目启动会议、研讨会和编写会议。2014年，项目成果"iCourse · 教材：高等农林院校基础课程系列"陆续出版。

本系列教材涵盖数学、物理、化学化工、计算机、生物学等系列基础课程，在出版形式、编写理念、内容选取和体系编排上有不少独到之处，具体体现在以下几个方面：

1. 采用"纸质教材+数字课程"的出版形式。纸质教材与丰富的数字教学资源一体化设计，纸质教材内容精炼适当，并以新颖的版式设计和内容编排，方便学生学习和使用；数字课程对纸质教材内容起到巩固、补充和拓展作用，形成以纸质教材为核心，数字教学资源配合的综合知识体系。

2. 创新教学理念，引导自主学习。通过适当的教学设计，鼓励学生拓展知识面和针对某些重要问题进行深入探讨，增强其独立获取知识的意识和能力，为满足学生自主学习和教师教学方法的创新提供支撑。

3. 强调基础课程内容与农林学科的紧密联系，始终抓住学生应用能力培养这一重要环节。教材和数字课程中精选了大量有实际应用背景的案例和习题，在概念引入和知识点讲授上也总是从实际问题出发，这不仅有助于提高学生学习基础课程的兴趣，也有助于加强他们的创新意识和创新能力。

4. 教材建设与资源共享课建设紧密结合。本系列教材是对各校精品资源共享课和教学改革成

果的集成和升华，通过参与院校共建共享课程资源，更可支持各级精品资源共享课的持续建设。

建设切实满足高等农林教育教学需求、反映教改成果和学科发展、纸质出版与资源共享课紧密结合的新形态教材和优质教学资源，实现“校际联合共建，课程协同共享”是我们的宗旨和目标。将课程建设及教材出版紧密结合，采用“纸质教材+数字课程”的出版形式，是一种行之有效的方法和创新，得到了高校师生的高度认可。尽管我们在出版本系列教材的工作中力求尽善尽美，但难免存在不足和遗憾，恳请广大专家、教师和学生提出宝贵意见与建议。

高等教育出版社
2014 年 7 月

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学分支，是普通高等院校本专科教育中一门重要的数学基础课，它的理论和方法在农林、经济、金融和工程技术等诸多领域有着广泛的应用。

在《教育部关于国家精品开放课程建设的实施意见》的指导下，为满足高等农林院校教育教学需要，反映教改成果。在高等教育出版社的策划和组织下，由河北农业大学、浙江农林大学、河南农业大学以及甘肃农业大学合作编写了《概率论与数理统计》这本新形态教材，本教材由纸质教材和数字资源两部分组成，内容分为十章，其中第1—5章为概率论，第6—10章为数理统计。

纸质教材力求编写精炼，突出概率统计的基本思想、基本概念和基本方法，融入重要概念的背景与应用，增加趣味性、思想性和实用性。方差分析和回归分析实验模块用以培养学生应用数学方法和计算机软件解决实际问题的意识、兴趣和能力。知识与背景相结合，理论、应用与实验相结合，利于学生阅读和理解。每章配有习题、自测题及参考答案，供学生自我练习和检测。

数字资源是对纸质教材内容的巩固、补充和拓展，包括本章小结、问一问、典型例题、应用案例等，便于初学者对基本概念和基本方法的理解和掌握。纸质教材和数字资源相结合不仅体现对学生独立获取知识和信息能力的培养，而且能够扩充学生的知识面，有利于学生针对某些感兴趣的问题进行深入学习和思考。

最后，我们衷心感谢审稿专家对本书初稿提出的宝贵意见与建议，感谢高等教育出版社编辑的辛勤劳动，也感谢本书参考文献的所有著作者。

由于水平所限，不当和疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2015年3月

目　录

第四章 随机变量的数字特征 … 071

第五章 大数定律与中心极限定理 ……………………… 097

第六章 数理统计的基本概念 … 107

第一章
随机事件及其概率

在生产生活和科学实验中,人们观察到的现象大致有两类.一类是在一定条件下必然发生的现象,称为**确定性现象**.例如,太阳每天从东方升起;同性电荷必然互斥;水稻的生长从播种到收割,总是经过发芽、育秧、长叶、吐穗、扬花、结实这几个阶段等.另一类是事前不能预言其结果的现象,称为**随机现象**.例如,掷一枚骰子出现的点数;种子的发芽情况;某支股票的价格变化趋势;某品牌电脑的寿命;某超市的月利润等,以上这些现象呈现出很大的不确定性和偶然性,但在大量重复的观察中其结果又呈现出固有的规律性.人们把这种规律性称为随机现象的**统计规律性**.概率论与数理统计正是研究随机现象统计规律性的一门数学学科,它的应用几乎遍及科学技术、工农业生产和国民经济等各个领域中,如产品的检验、寿险分析、博彩分析、股市分析、疾病诊断等.

第一节 随机事件及其运算

一、随机试验与随机事件

为了获得随机现象的统计规律性,往往需要在相同条件下对随机现象进行大量的试验或观察.概率论中,对随机现象进行一次试验或观察统称为**随机试验**.一般说来,随机试验应具有如下特点:

(1) 在相同的条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的结果事前无法预知;

(3) 所有可能的试验结果事前可以明确知道.

随机试验简称为**试验**,通常用大写英文字母 E 表示,为了区分不同的试验可用符号 $E_1,E_2,E_3,\cdots$来表示.下面举一些试验的例子.

E_1:抛一枚质地均匀的硬币,观察正面、反面出现的情况(规定:数字向上的一面为正面);

E_2:掷一颗质地均匀的骰子,观察出现的点数;

E_3:取 5 粒种子做发芽试验,观察其发芽情况;

E_4:考察某地区 9 月份的平均气温;

E_5:观察某种股票的价格变动(与前一交易日相比).

随机试验总是有各种不同的试验结果.例如,掷一颗质地均匀的骰子,可能有六种基本结果:"恰好出现 i 点",$i=1,2,\cdots,6$,至于骰子落在什么位置,向哪一方向滚动,均不在考虑范围之列.取 5 粒种子做发芽试验,可能有 5,4,3,2,1 粒发芽或全都不发芽.某日某种股票的价格与前一交易日相比可能上涨、下跌或者不变.

在随机试验中,将每一种可能出现的结果称为**随机事件**,简称为**事件**,通常用字母 $A,B,C,\cdots$表示.如果涉及多个事件,也可用 $A_1,A_2,A_3,\cdots$或 $B_1,B_2,B_3,\cdots$表示.

我们把不可能再分的最基本的事件称为**基本事件**或**样本点**,记作 ω 或 $\omega_1,\omega_2,\cdots$;由若干个基本事件组合而成的事件称为**复合事件**,由全体基本事件构成的集合称为**样本空间**,用 Ω 表示.

例 1　掷一颗均匀的骰子,可能有六种不同的基本结果:$\omega_1=\{$掷出 1 点$\}$,$\omega_2=\{$掷出 2 点$\}$,$\cdots$,$\omega_6=\{$掷出 6 点$\}$,此时 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6$ 为基本事件或样本点,样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.除此之外,还有其他可能结果:$A=\{$掷出的点数为奇数$\}$,$B=\{$掷出的点数为偶数$\}$,$C=\{$掷出的点数大于 4$\}$,$D=\{$掷出的点数为 3 的倍数$\}$等.

上述每一种可能结果均为随机事件.易知 $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$,$B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$,$C=\{\omega_5,\omega_6\}$,$D=\{\omega_3,\omega_6\}$均为复合事件.

例 2　连续抛一枚五角和一枚一元的硬币,若用“正”表示数字一面向上,“反”表示数字一面向下,则该试验可能出现四种不同的基本结果:

$$\omega_{00}=\{\text{正},\text{正}\},\omega_{01}=\{\text{正},\text{反}\},\omega_{10}=\{\text{反},\text{正}\},\omega_{11}=\{\text{反},\text{反}\},$$

其全体构成该试验的样本空间 Ω,即 $\Omega=\{\omega_{00},\omega_{01},\omega_{10},\omega_{11}\}$.如果用 A 表示“五角硬币正面朝上”,则 $A=\{\omega_{00},\omega_{01}\}$ 为复合事件.

若事件 A 中的任一个样本点出现了,则称事件 A 发生了.在例 1 中,若掷骰子的结果恰为 4 点,则说明 ω_4 发生,同时事件 B 发生.又如,事件 $D=\{\omega_3,\omega_6\}$ 发生,是指掷出的结果恰好出现 3 点或恰好出现 6 点.

在随机试验规定的条件下,必然发生的事件叫**必然事件**,用 Ω 表示;而必然不发生的事件叫**不可能事件**,用 $\varnothing$ 表示.必然事件与不可能事件已不具有随机性,是随机事件的两个极端情况.为了方便,仍把它们视为随机事件.比如,在随机试验 E_2 中,“掷出的点数小于 7”是必然事件,而“掷出的点数大于 6”则是不可能事件.

二、事件间的关系及运算

在同一个随机试验中,诸随机事件间往往是互相联系的.由于随机事件是样本空间的子集,所以随机事件间的关系就是集合之间的关系,随机事件间的运算就是集合之间的运算,只是用关于事件的语言来描述而已.下面讨论事件间的几种主要关系与运算.

设随机试验 E 的样本空间为 Ω;$A,B,A_i(i=1,2,\cdots)$为 E 的随机事件.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B,或称事件 A 是事件 B 的子事件,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,如图 1-1 所示.

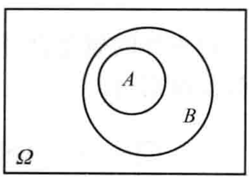


图 1-1

比如,在掷骰子的试验中,设 $A=\{$掷出的点数为 6$\}$,$B=\{$掷出的点数为偶数$\}$,显然有 $A\subset B$.

又比如,考察某大学生每月的电话费用,用 A 表示"至少使用 50 元话费",用 B 表示"至少使用 20 元话费",则有 $A\subset B$.

规定,对任何事件 A,恒有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

事件间的包含关系具有传递性,即如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$,则 $A\subset C$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$. 比如,掷两颗骰子用 A 表示"两颗骰子掷出的点数之和为奇数",B 表示"两颗骰子掷出的点数为一奇一偶",显然有 $A=B$.

2. 事件的和（或并）

称事件 A 与 B 至少有一个发生的事件为 A 与 B 的和（或并）事件,记作 $A\cup B$, 如图 1-2 所示.

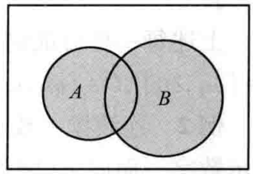


图 1-2

在掷骰子的试验中,若 $A=\{$掷出的点数为奇数$\}$,$C=\{$掷出的点数大于 4$\}$,则 $A\cup C=\{$掷出的点数为奇数或大于 4$\}$,即"掷出的点数为 1,3,5,6 之一".

由事件和的定义可得:对任一事件 A,有

$$A\cup\varnothing=A,\quad A\cup\Omega=\Omega.$$

和事件的概念可以推广到有限多个或可列无穷多个事件的情形,即

$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生的事件;

$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生的事件.

例如,盒子里有大小形状完全相同的 10 个球,其中 9 个白球,1 个黑球.某人采取有放回的方式抽取,直到取出黑球时试验结束.若 A 表示试验完成,A_i 表示第 i 次取到黑球,显然有 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 事件的积（或交）

称事件 A 与 B 同时发生的事件为 A 与 B 的积（或交）事件,记作 AB 或 $A\cap B$, 如图 1-3 所示.

在掷骰子的试验中,$A=\{$掷出的点数为奇数$\}$,$C=\{$掷出的点数大于 4$\}$,则 $A\cap C=\{$掷出的点数为 5$\}$.

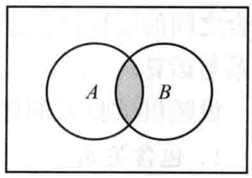


图 1-3

与和事件概念类似:对任一事件 A,有

$$A\cap\varnothing=\varnothing,\quad A\cap\Omega=A.$$

积事件的概念也可以推广到有限个或可列无穷多个事件的情形,即

$A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件;

$A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生的事件.

例如,从装有 9 个白球和 1 个黑球的盒子中有放回取球,记 $A_i=\{$第 i 次取到黑球$\}$,$i=1,2,\cdots$,$A=\{$前 n 次取球均未取到白球$\}$,则 $A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 若 $B=\{$始终未取到白球$\}$,则 $B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. 事件的互斥与互逆

若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 为互斥(或互不相容)事件,如图 1-4 所示.

在例 1 掷骰子试验中,$B=\{$掷出的点数为偶数$\}$与 $F=\{$掷出的点数为大于 3 的奇数$\}$是互斥事件.

若一个事件组中任意两个事件均互斥,则称该事件组**两两互斥**.易知,在同一随机试验中任意两个基本事件均互斥.

若事件 A 与 B 的和事件为必然事件,且积事件为不可能事件,即 $A\cup B=\Omega$,$A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与 B 为互逆(或互相对立)事件,如图 1-5 所示.通常把与 A 互逆的事件记作 $\overline{A}$,称为 A 的逆事件.

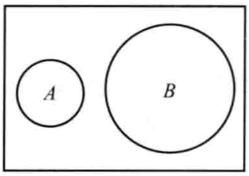


图 1-4

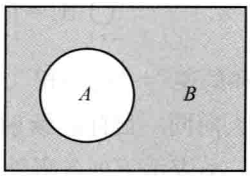


图 1-5

比如在例 1 掷骰子试验中,$A=\{$掷出的点数为奇数$\}$与 $B=\{$掷出的点数为偶数$\}$互为逆事件,即 $\overline{A}=B$,$\overline{B}=A$.

值得注意的是:

(1) 互逆事件一定互斥,反之未必.比如在例 1 中,$B=\{$掷出的点数为偶数$\}$与 $F=\{$掷出的点数为大于 3 的奇数$\}$是互斥事件但不是互逆事件.

(2) 若 $A\subset B$,则 $\overline{B}\subset\overline{A}$.

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为 A 对 B 的差事件,记作 $A-B$,如图 1-6 所示.

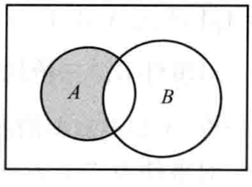


图 1-6

显然,

$$A-B=A\cap\overline{B}=A-A\cap B,\quad \overline{A}=\Omega-A.$$

在掷骰子试验中,若记 $A=\{$掷出的点数为奇数$\}$与

$G=\{$掷出的点数小于 3$\}$,则 $A-G=\{$掷出的点数为 3 或 5$\}$.

6. 事件间的运算规律

与集合之间的运算相同,事件间的运算满足以下运算规律.

(1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A.$$

(2) 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

(3) 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(4) 对偶公式(也称为德摩根定律)

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

对偶公式用“和的逆”=“逆的积”,“积的逆”=“逆的和”方便记忆.

例 3　某人向同一目标连续射击三次,以 A_i 表示“第 i 枪击中目标”($i=1,2,3$),试用 A_1,A_2,A_3 表示下列各事件:

$A=\{$只击中第一枪$\}$;

$B=\{$只击中一枪$\}$;

$C=\{$三枪均未击中$\}$;

$D=\{$至多击中一枪$\}$.

解　对事件 A,“只击中第一枪”说明第一枪击中,第二、三枪均未击中,即 A_1,$\overline{A}_2$,$\overline{A}_3$ 同时发生,所以 A 是 $A_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 的积事件,即 $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

对事件 B,“只击中一枪”没有指明是第几枪击中,可能是第一枪击中,也可能是第二枪或第三枪击中,所以该事件是 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,$\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$,$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 的和事件,于是,$B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

对事件 C,“三枪均未击中”是 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 的积事件 $C=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,或是“至少击中一枪”$A_1\cup A_2\cup A_3$ 的逆事件:$C=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$.

对事件 D,“至多击中一枪”表示“只击中一枪”或“三枪均未击中”,所以该事件可表示为:$D=B\cup C=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.