

GAOZHONG WULI PEIYOU
JICHU JIAOCHENG

高中物理培优基础教程

◆ 朱国强 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中物理培优基础教程

朱国强 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中物理培优基础教程/朱国强编著. —杭州: 浙江大学出版社, 2010. 7(2010. 8 重印)

ISBN 978-7-308-07754-5

I. ①高… II. ①朱… III. ①物理课—高中—教学参考资料 IV. ①G634. 73

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 124106 号

高中物理培优基础教程

朱国强 编著

责任编辑 石国华

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 德清县第二印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 29.75

字 数 800 千

版 印 次 2010 年 7 月第 1 版 2010 年 8 月第 2 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-07754-5

定 价 48.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571) 88925591

前 言

从高中物理学科教学的视角来看,物理学具有实验基础、逻辑思维、数学表达、思想方法、应用价值五大特征。全国中学生物理竞赛对于激发学生学习科学的兴趣,培养学生分析和解决问题的能力,发展质疑能力和独立思考能力,具备探索精神和坚持真理的态度有许多裨益。

本教程根据新课程特点,依据新版的全国中学生物理竞赛内容提要(2006年修订)进行编写。比较系统地讲述了运动学、静力学、动量与能量、刚体的转动、振动和波、热学、电场、磁场、直流电、交流电与电磁波、几何光学、近代物理、狭义相对论、导数、简单的积分等基本知识。部分试题选自历届竞赛试题、历年竞赛模拟题、大学自主招生试题以及其他国家的竞赛试题。本教程还具有基础、新颖、实战的特点。

本教程的体例包括基础知识、典型例题、课后练习、参考答案四部分。基础知识讲述兼顾高考,对竞赛有要求而新教材要求较低的部分作了较详细讲述。典型例题的解答遵循先确定研究对象,再进行分析,建立物理模型,然后应用概念和规律解决问题的一般模式。题后小结注重总结物理解题方法,启迪物理思维。课后练习按难易程度分为A组和B组。

本教程适用于对物理有兴趣的高中学生自学使用,也可供教师上课辅导使用。同时可用作培优训练、竞赛辅导、自主招生辅导等。

Chapter 04 动量与能量	76
1. 动量定理	76
2. 动量守恒	84
3. 动能定理	90
4. 机械能守恒	96
5. 碰撞	107



目 录

CONTENTS

Chapter 10 磁场与电磁感应	
§ 1 磁场对电流的作用	83
§ 2 磁场对运动电荷的作用	83
§ 3 带电粒子在电磁场中的运动	114
§ 4 电磁感应	114
Chapter 11 交流电与电磁波	
Chapter 01 运动学	1
§ 1 质点运动学的基本概念	1
§ 2 运动的合成和分解	7
§ 3 抛体运动	11
§ 4 圆周运动	17
§ 5 相对运动	23
Chapter 02 静力学	28
§ 1 力学中的三种力	28
§ 2 共点力作用下物体的平衡条件及应用	34
§ 3 有固定转轴物体的平衡条件及应用	38
§ 4 一般物体的平衡条件及应用	42
§ 5 物体平衡的种类	48
§ 6 流体静平衡	55
Chapter 03 牛顿运动定律	59
§ 1 牛顿运动定律	59
§ 2 非惯性参照系	65
§ 3 天体运动	71
Chapter 04 动量与能量	78
§ 1 功和能 功率	78
§ 2 动能定理	84
§ 3 势能与功能原理	90
§ 4 机械能守恒定律	96
§ 5 动量定理	100
§ 6 动量守恒定律	107

§ 7 碰 撞	114
§ 8 质心与质心运动	122
Chapter 05 角动量	128
§ 1 冲量矩与角动量	128
§ 2 质点与质点组的角动量定理	131
§ 3 角动量守恒定律	135
Chapter 06 振动和波	141
§ 1 简谐运动	141
§ 2 振动的能量	147
§ 3 机械波	155
§ 4 波的干涉、多普勒效应	161
Chapter 07 热学	168
§ 1 分子动理论与内能	168
§ 2 热力学定律	173
§ 3 气体性质	181
§ 4 气体的功、热量与内能的增量	188
§ 5 固体性质	197
§ 6 液体性质	202
§ 7 物态变化	207
Chapter 08 静电场	217
§ 1 库仑定律与电荷守恒定律	217
§ 2 电场强度	222
§ 3 电势	230
§ 4 电场中的导体和绝缘体	237
§ 5 电容器和静电场能	245
Chapter 09 稳恒电流	255
§ 1 部分电路欧姆定律	255
§ 2 含源电路欧姆定律	265
§ 3 电源与电动势	269
§ 4 电表改装、惠斯通电桥与补偿电路	275
§ 5 物质的导电性与半导体	283

Chapter 10 磁场与电磁感应	292
§ 1 磁场对电流的作用	292
§ 2 磁场对运动电荷的作用	299
§ 3 法拉第电磁感应定律	305
§ 4 自感与互感	315
Chapter 11 交流电与电磁波	323
§ 1 交流电与变压器	323
§ 2 电阻、纯电感、纯电容电路	330
§ 3 整流、滤波和稳压	338
§ 4 电磁振荡和电磁波	343
Chapter 12 几何光学	348
§ 1 光的反射	348
§ 2 面镜成像	353
§ 3 光的折射	357
§ 4 薄透镜成像与光具组成像	364
§ 5 简单光学仪器	373
Chapter 13 近代物理	379
§ 1 波动光学	379
§ 2 光的本性	385
§ 3 原子结构	393
§ 4 原子核	403
Chapter 14 狭义相对论	411
§ 1 狭义相对论运动学	411
§ 2 狭义相对论动力学	419
Chapter 15 数学基础	427
§ 1 导数初步	427
§ 2 积分初步	433
参考答案	446

Chapter 01 运动学

§1 质点运动学的基本概念



基础知识

一、参照系

为了描述一个物体的运动情况,必须选择另一个运动物体或几个相互间保持静止的物体作为参考物.被选作参考的物体叫做参考系.

同一物体的运动,由于参考系的选取不同,对它的运动描述也不同.参考系原则上可以任选.一般情况下,应选择使问题的处理尽量简化的参考系.

常见的参考系有:地面参考系,适用于地面物体的运动(不考虑球自转效应);地心参考系,适用于考虑球自转效应;日心参考系,适用于太阳系问题;质心参考系,适用于质点系问题;实验室参考系.

为定量描述物体位置和运动,就必须在参考系上建立坐标系.原点定在参考系的一个固定点上.常用的坐标系有直角坐标系、自然坐标系、极坐标系等.

二、位置矢量、位移和路程

位置指运动质点在某一时刻的处所.在直角坐标系中,可用质点在坐标轴上的投影坐标 (x, y, z) 来表示.为了使位置的确定与位移的计算一致,人们还引入位置矢量(简称位矢)的概念, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.在直角坐标系中,位矢 $\boldsymbol{r}$ 定义为自坐标原点到质点位置 $P(x, y, z)$ 所引的有向线段,故有 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\boldsymbol{r}$ 的方向为自 O 点指向 P .

位移指质点在运动过程中,某一段时间 Δt 内的位置变化,即位矢的增量: $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$,它的方向为自始位置指向末位置.

路程指质点通过的实际轨迹的长度.

三、平均速度

平均速度是粗略描述运动快慢的物理量.

平均速度是指质点在一段时间内通过的位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 和发生这段位移所用时间 Δt 的比值: $\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$.

四、瞬时速度和瞬时速率

瞬时速度精确描述运动快慢的物理量.

瞬时速度是质点在某一时刻或经过某一位置时的速度,它定义为平均速度的极限,简称为速度,即 $\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$.瞬时速度是矢量,它的方向就是平均速度极限的方向.瞬时速度的大小叫瞬时速率,简称速率.

五、加速度

加速度是描述物体运动速度变化快慢的物理量,等于速度对时间的变化率,即 $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, 这样

求得的加速度实际上是物体运动的平均加速度,瞬时加速度应为 $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$. 加速度是矢量.

六、匀变速直线运动

加速度不变的直线运动叫匀变速直线运动. 描述一个匀变速直线运动,要有五个物理量,其中四个物理量构成一个方程. 共有五个公式,两个基本式,三个导出式.

$$\text{匀变速直线运动} \begin{cases} v_t = v_0 + at, & \text{无 } s; \\ s = \frac{v}{2}t = \frac{v_t + v_0}{2}t, & \text{无 } a; \\ s = v_0t + \frac{1}{2}at^2, & \text{无 } v_t; \\ v_t^2 - v_0^2 = 2as, & \text{无 } t; \\ s = v_t t - \frac{1}{2}at^2, & \text{无 } v_0. \end{cases}$$

自由落体运动和竖直上抛运动是两种常见的匀变速直线运动.



典型例题

【例题 1-1】 质点以加速度 a 从静止出发做直线运动,在某时刻 t ,加速度变为 $2a$;在 $2t$ 时刻,加速度变为 $3a$;...;在 nt 时刻,加速度变为 $(n+1)a$,求:(1) nt 时刻质点的速度;(2) nt 时间内通过的总路程.

【解】 (1) 质点在某时刻 t 的速度为 $v_t = at$,

$2t$ 末的速度为 $v_{2t} = v_t + 2at$,所以 $v_{2t} = at + 2at$,

$3t$ 末的速度为 $v_{3t} = v_{2t} + 3at = at + 2at + 3at$,

.....

则 nt 末的速度为

$$v_n = v_{(n-1)t} + nat$$

$$= at + 2at + 3at + \cdots + (n-1)at + nat = at(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= at \cdot \frac{1}{2}(n+1)n = \frac{1}{2}n(n+1)at.$$

(2) 同理可得 nt 内通过的总路程 $s = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)at^2$.

题后小结 根据归纳递推思想,从特殊到一般找出规律,然后求解.

【例题 1-2】 一质点沿 x 轴做直线运动,其中 v 随时间 t 的变化如图 1-1 所示,设 $t=0$ 时,质点位于坐标原点 O 处.试根据 $v-t$ 图尽可能准确地画出:

1. 表示质点运动的加速度 a 随时间 t 变化关系的 $a-t$ 图.
2. 表示质点运动的位移 x 随时间 t 变化关系的 $x-t$ 图.

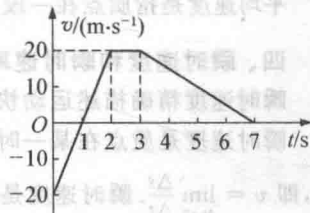


图 1-1

【解】

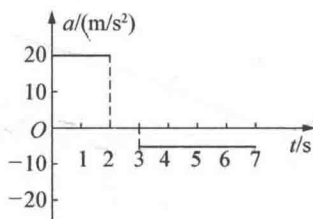


图 1-2

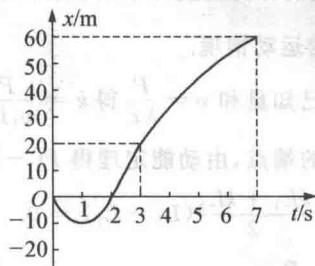


图 1-3

【题后小结】 第十四届全国中学生物理竞赛预赛试题.

【例题 1-3】 蚂蚁离开巢沿直线爬行,它的速度与到蚁巢中心的距离成反比,当蚂蚁爬到距巢中心 $L_1 = 1\text{m}$ 的 A 点处时,速度 $v_1 = 2\text{cm/s}$,试问蚂蚁继续由 A 点爬到距巢中心 $L_2 = 2\text{m}$ 的 B 点需要多长时间?

【解一】 (微元法) 以蚁巢中心为坐标原点 O,以爬行方向 OA 为 x 轴正方向建立坐标系. 蚂蚁在坐标 x 处的速度 v , $vx = L_1 v_1$, 即 $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{L_1}$.



图 1-4

将 AB 均分为 n 等份,设 A、每等分点、B 的瞬时速度为 v_1 、 v_1' 、 v_2' 、 $\dots$ 、 v_{n-1}' 、 v_2 , 每份长 $\Delta x = \frac{L_2 - L_1}{n}$. 当 n 很大时,每段运动可以看作是匀速运动,

$$\begin{aligned} \text{总时间 } T &= \frac{\Delta x}{v_1} + \frac{\Delta x}{v_1'} + \frac{\Delta x}{v_2'} + \dots + \frac{\Delta x}{v_{n-1}'} + \frac{\Delta x}{v_2} \\ &= \frac{L_2 - L_1}{n} \left(\frac{1}{v_1} \frac{L_1}{L_1} + \frac{1}{v_1} \frac{L_1 + \Delta x}{L_1} + \frac{1}{v_1} \frac{L_1 + 2\Delta x}{L_1} + \dots + \frac{1}{v_1} \frac{L_1 + (n-1)\Delta x}{L_1} \right) \\ &= \frac{L_2 - L_1}{n} \left(\frac{n}{v_1} + \frac{1}{v_1} \frac{n(n-1)\Delta x}{2L_1} \right) = (L_2 - L_1) \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1} \frac{(n-1)\Delta x}{2L_1} \right). \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(n-1)\Delta x = (L_2 - L_1)$, 所以 $T = \frac{L_2^2 - L_1^2}{2L_1 v_1} = 75\text{s}$.

【解二】 (图象法) 由 $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{L_1}$ 作出 $\frac{1}{v} - x$ 图, 因为 $\Delta t_i = \frac{\Delta x}{v_i}$, 所以图线所围面积就是时间,

$$T = \frac{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) (L_2 - L_1)}{2} = \frac{L_2^2 - L_1^2}{2L_1 v_1} = 75\text{s}.$$

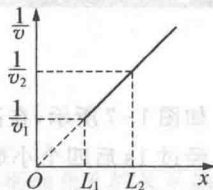


图 1-5

【解三】 (微积分法) 以蚁巢中心为坐标原点 O,以爬行方向 OA 为 x 轴正方向建立坐标系. 蚂蚁在坐标 x 处的速度 v , 根据题意有 $v = L_1 v_1 / x$, 即 $\frac{dx}{dt} = \frac{L_1 v_1}{x}$, $x dx = L_1 v_1 dt$, 积分得

$$\int_{L_1}^{L_2} x dx = \int_0^T L_1 v_1 dt, \quad \frac{L_2^2 - L_1^2}{2} = L_1 v_1 (T - 0), \quad T = \frac{L_2^2 - L_1^2}{2L_1 v_1} = 75\text{s}.$$

【解四】 (类比法) 类比到机车以恒定功率启动的情形: 速度与牵引力成反比 $v = \frac{P}{F}$. 再使牵引力随位移成正比即遵循 $F = kx$ 变化, 这样机车的启动过程中速度就与位移成反比了, 即 $v =$

$\frac{P}{kx}$. 由于弹簧的弹力与受力端的位移成正比, 于是便把“老鼠的奔跑”转换为“外力以恒定的功率拉伸弹簧”的运动情境.

由题干已知量和 $v = \frac{P}{kx}$ 得 $k = \frac{P}{v_1 L_1}$.

对弹簧的端点, 由动能定理得 $Pt - \bar{F}(L_2 - L_1) = 0$,

即 $Pt - \frac{kL_1 + kL_2}{2}(L_2 - L_1) = 0$.

把 $k = \frac{P}{v_1 L_1}$ 代入上式, 整理得 $t = \frac{L_2^2 - L_1^2}{2L_1 v_1} = 75\text{s}$.

题后小结 第一种方法是理解的基础.

【例题 1-4】 如图 1-6, 在倾角为 φ 的光滑斜面顶端有一质点 A 自静止开始自由下落, 与此同时在斜面底部有一质点 B 自静止开始以匀加速度 a 背离斜面在光滑的水平面上运动. 设 A 下滑到斜面底部能沿着光滑的小弯曲部分平稳的朝 B 追去, 试求为使 A 不能追上 B, a 的取值范围.

【解】 显然 a 越小 A 越能追上 B, a 大到某临界值时 A 恰能追上 B, 超过此值 A 便不能追上 B. 先求 a 的这一临界值.

设 A 到斜面底部的速度为 v_A , 所经时间便为 $t_1 = \frac{v_A}{g \sin \varphi}$.

而后由于 A 匀速, B 匀加速运动, 因此 A 恰好能追上 B 的条件是:

(1) 在路程方面能追上 B, 即又经 t_2 时间后, 有 $v_A t_2 = \frac{1}{2} a (t_1 + t_2)^2$.

(2) A 追上 B 时, B 的速度恰好已达到 v_A , 即有 $v_A = a(t_1 + t_2)$.

两式相除, 得 $t_2 = t_1$, 于是, $v_A = a(t_1 + t_2) = 2at_1$.

将 $t_1 = \frac{v_A}{g \sin \varphi}$ 代入后, 即得 a 的临界值为 $a = \frac{1}{2} g \sin \varphi$.

综合前面所述, 可知为使 A 不能追上 B, a 的取值范围为 $a > \frac{1}{2} g \sin \varphi$.

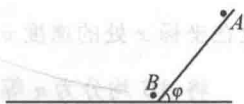


图 1-6



课后练习

● A 组练习 ●

1. 如图 1-7 所示, 在高空中有四个小球, 在同一位置同时以速率 v 向上、向下、向左、向右被射出, 经过 1s 后四个小球在空中的位置构成的正确图形是 ()



A.



B.



C.



D.

图 1-7

2. 小球从高 $h_0 = 180\text{m}$ 处自由下落, 着地后跳起又下落, 每与地面相碰一次, 速度减小为 $\frac{1}{n}$ ($n = 2$), 求小球从下落到停止经过的总时间和通过的总路程. (g 取 10m/s^2)

3. 一个质点自倾角为 α 的斜面上方定点 A, 沿光滑斜槽从静止开始滑下, 为了使质点在最短时间到达斜面, 求斜槽与竖直方向的夹角 β 应等于多少?

4. 一质点自原点出发沿 x 轴做一维运动, 其速度 v 与时间 t 之关系如图 1-8 所示, 其中连续两次速度为 0 之间的关系曲线均为折线. 折线与 t 轴间形成三角形, 三角形之底及高均成规则性递减, 依次减半. 设最大三角形的底为 d , 高为 h , 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 此质点离开原点的距离为多少?

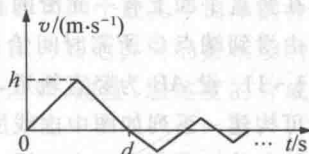


图 1-8

5. 电车的起点站到终点站的距离是 6.0 公里, 从起点站每隔 5 分钟发一辆车, 车的平均速率为 18 公里/小时, 车到终点站停 5 分钟立即从终点站发车驶回起点站. 问返程车中的司机在到达起点站之前能遇见迎面开来的电车共有多少辆?(停在起点站和终点站上的电车不考虑)

● B 组练习 ●

1. 某物体以一定初速度 v_0 沿斜面向上运动, 它所能达到的最大位移 x 与斜面倾角 θ 的关系如图 1-9 所示, 试求 θ 为多少时, x 的值最小?(g 取 10m/s^2)

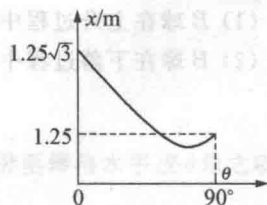


图 1-9

2. 水平直轨道上有一辆小车, 轨道 O 点正上方高 h 处有一绞车. 绞车运动, 牵引绳缠绕在绞车上, 拉着小车在轨道上水平移动. 已知绞车收绳速度为 v , 求当小车距 O 点之水平距离 x 时, 车移动的速度与加速度各是多少?

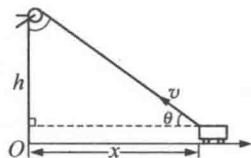


图 1-10

3. 在竖直平面上有一光滑的直角三角形细管轨道, 光滑小球从顶点 A 沿斜边轨道自静止出发自由滑到端点 C 所需时间恰好等于小球从 A 由静止出发自由地经 B 滑到 C 所需时间, 如图 1-11. 设 AB 为竖直轨道, 转弯处速度大小不变, 转弯时间忽略不计. 在此直角三角形范围内可构建一系列如图中虚线所示的光滑轨道, 每一轨道由若干竖直和水平的部分连接而成, 各转弯处性质都和 B 点相同. 各轨道均从 A 点出发到 C 点终止, 且不越出 $\triangle ABC$ 的边界. 试求小球在各条轨道中, 从静止出发自由地由 A 到 C 所需时间的上限与下限之比值.

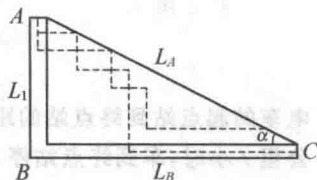


图 1-11

4. 一只蜗牛从地面上开始沿竖直电线杆上爬, 它上爬的速度 v 与它离地面的高度之间的关系是

$$v = \frac{lv_0}{l+h}, \text{ 其中 } l = 20\text{cm}, v_0 = 2\text{cm/s. 求它上爬 } 20\text{cm} \text{ 所用的时间.}$$

5. 有 A 、 B 两球, A 距地面高度为 h 处自由下落, 同时将 B 球从地面以初速度 v_0 竖直上抛, 两球沿同一条竖直线运动, 试分析:

- (1) B 球在上升过程中与 A 球相遇, B 球初速度的取值范围;
- (2) B 球在下落过程中与 A 球相遇, B 球初速度的取值范围.

§ 2 运动的合成和分解



基础知识

一、矢量与标量

物理量分为两大类：只需数值就能决定的物理量叫做标量；既有大小，又需要方向才能决定的物理量叫做矢量。标量和矢量在进行运算时遵守不同的法则：标量的运算遵守代数法则；矢量的运算遵守平行四边形法则（或三角形法则）。

二、运动的合成与分解

在研究物体运动时，将碰到一些较复杂的运动，我们常把它分解为两个或几个简单的分运动来研究。任何一个方向上的分运动，都按其本身的规律进行，不会因为其他方向的分运动的存在而受到影响，这叫做运动的独立性原理。运动的合成和分解包括位移、速度、加速度的合成和分解，他们都遵守平行四边形法则。

三、物体系相关速度

物体系相关速度一般可以用微元法求解。另外还可以用约束的特点求解。

1. 刚性杆、不可伸长的绳约束下的物体系相关速度

杆、绳上任意两点的速度沿其自身方向上的投影值必相等。这是杆、绳在运动中的一个重要特征，其原因是由于杆、绳的长度不变，即由所考察的两点间的距离不变而得。如图 1-12 所示，以 v_A 、 v_B 分别表示杆（或绳）上 A、B 两点的速度， v_{A1} 、 v_{B1} 分别表示 v_A 和 v_B 沿杆（或绳）方向的投影。显然，若 $v_{A1} > v_{B1}$ ，则杆将被压缩；若 $v_{A1} < v_{B1}$ ，则杆将被折断。所以 v_{A1} 必等于 v_{B1} 。

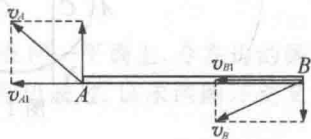


图 1-12

2. 接触面约束下的物体系相关速度

物体系中各物体垂直接触面的分速度必相等，切向分速度在无相对滑动时也相同。

3. 线状交叉物系交叉点的速度

线状交叉物系交叉点的速度是相交物系双方沿对方切向运动分速度的矢量和。此结论易用微元法证明。

四、物体系相关加速度

速度的变化量与时间比值就是物体的平均加速度。可以采用微元法求出瞬时加速度。

刚性杆、不可伸长的绳约束下的物体系，接触面约束下的物体系各部分的加速度的大小关系可以用匀变速直线运动位移公式确定。假设各物体从静止开始匀加速运动时间 t ，根据 $s = \frac{1}{2}at^2$ ，确定了物体系在同一时间内的位移关系，就确定了两者的加速度关系。



典型例题

【例题 1-5】木棒一端靠在竖直墙壁，一端在水平地面，自由下滑至棒与水平成 θ 角之瞬时，如图 1-13 所示，求 A、B 两端速率之比 $v_A : v_B$ 。

【解一】沿棒方向速率相同， $v_A \sin \theta = v_B \cos \theta$ ，故 $v_A : v_B = \cot \theta$ 。

【解二】如图 1-14， $\Delta s_A \sin \theta = \Delta s_B \cos \theta$ ， $\Delta s_A \sin \theta / \Delta t = \Delta s_B \cos \theta / \Delta t$ ，所以 $v_A : v_B = (\Delta s_A / \Delta t) : (\Delta s_B / \Delta t) = \cot \theta$ 。

: $(\Delta s_B / \Delta t \cot \theta)$.

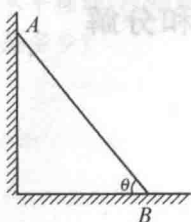


图 1-13

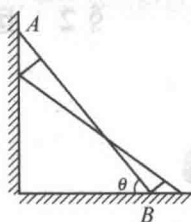


图 1-14

【解三】 $\sqrt{x^2 + y^2} = L, v_B = \frac{dx}{dt}, v_A = \frac{dy}{dt}, v_A = \frac{dy}{dt} = \frac{d(\sqrt{L^2 - x^2})}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{L^2 - x^2}}(-2x)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}} \frac{dx}{dt} = \cot \theta v_B, \text{ 故 } v_A : v_B = \cot \theta.$$

题后小结 解法一是速度分解法, 解法二是微元法. 解法三是求导法.

【例题 1-6】 如图 1-15, 足够长的直杆 MN 固定, 一圆环与直杆在同一平面内, 且以垂直于 MN 的恒定速度 v 向右运动, AB 为圆环的一直径, 且 AB 垂直于 MN, 当 AB 的四等分点 C 经过直杆瞬间, 圆环与直杆的交点的运动速度大小是多少?

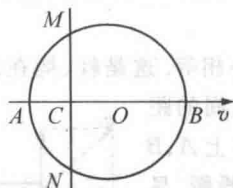


图 1-15

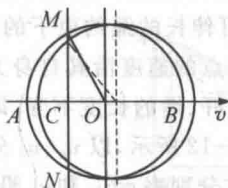


图 1-16

【解】 如图 1-16, $x_0^2 + y_0^2 = R^2, \Delta x = ut, (y_0 - \Delta y)^2 + (\frac{R}{2} + \Delta x)^2 = R^2$, 三式联立得 $-2\Delta y y_0 + \Delta y^2 + R\Delta x + \Delta x^2 = 0$, 由 $x_0 = R/2$ 得 $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, 消去高阶小量, 又 $\Delta y = Vt$, 所以 $V = \frac{\sqrt{3}}{3}v$.

题后小结 上海市浦东新区第三届高中物理邀请赛试题.

【例题 1-7】 如图 1-17 所示, 顶杆 AB 可在竖直滑槽 K 内滑动, 其下端由凹轮 M 推动, 凸轮绕 O 轴以匀角速度 ω 转动. 在图示的瞬时, $OA = r$, 凸轮轮缘与 A 接触法线 n 与 OA 之间的夹角为 α , 试求此瞬时顶杆 AB 的速度.

【解】 对杆 AB, 速度 v_A 可以分解为法向速度 v_n 和切向速度 v_t ;

对凸轮轮缘与 A 接触点, 速度 ωr 的法向速度也应为 v_n ; 所以根据矢量图图 1-18 可知, $\omega r \sin \alpha = v_A \cos \alpha$, 故 $v_A = \omega r \tan \alpha$.

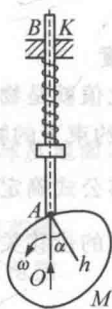


图 1-17

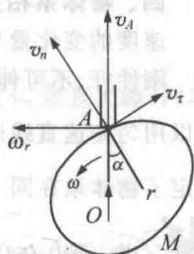


图 1-18

题后小结 此题应用了接触面约束下的物体系相关速度的特点, 接触面法向速度相等.

【例题 1-8】 如图 1-19, 拖车 A 在水平的码头上, 通过定滑轮拖动河中的船 B. 当拖车 A 的速度达 v_A 时, 它的加速度为 a_A , 此时 OB 绳与水平方向的夹角为 θ , B 到 O 的距离为 L . 求此刻船 B 的速度 v_B 和它的加速度 a_B .

【解】 因为绳子不可以伸长,故 A、B 位移满足 $s_A = s_B \cos \theta$, $v_A \Delta t = v_B \Delta t \cos \theta$, 则 $v_B = v_A / \cos \theta$.

经一小段时间 Δt 后, A、B 速度为 v_A' 、 v_B' , 则同理可得 $v_B' = v_A' / \cos(\theta + \Delta \theta)$,

$$B \text{ 的加速度 } a_B = \frac{v_B' - v_B}{\Delta t} = \frac{v_A' / \cos(\theta + \Delta \theta) - v_A / \cos \theta}{\Delta t},$$

图 1-19

$$a_B = \frac{\frac{v_A + a_A \Delta t}{\cos \theta \cos \Delta \theta} - \frac{v_A}{\cos \theta}}{\Delta t}, \text{ 其中, } \sin \Delta \theta = \frac{v_B \Delta t \sin \theta}{L} = \frac{v_A \Delta t \tan \theta}{L},$$

$$\text{又 } \Delta t \rightarrow 0, \Delta \theta \rightarrow 0, \cos \Delta \theta = 1, a_B = \frac{a_A}{\cos \theta} + \frac{v_A^2 \tan^2 \theta}{L \cos \theta}.$$



课后练习

● A 组练习 ●

1. 模型飞机以相对空气 $v = 39 \text{ km/h}$ 的速度绕一个边长 2 km 的等边三角形飞行, 设风速 $u = 21 \text{ km/h}$, 方向与三角形的一边平行并与飞机起飞方向相同, 试求飞机绕三角形一周需多少时间.

2. 如图 1-20 所示, 两个半径均为 R 的圆环(圆心分别为 O_1 和 O_2) 在同一平面上. 令左边的圆环静止, 右边圆环以速度 v (方向沿 $O_1 O_2$ 的连线方向) 从左边圆环旁边通过. 试求两圆环交叉点 A 的速度 v_A 与两环圆心间距 d 的关系.

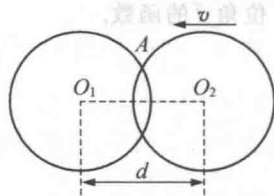


图 1-20

3. 两只小环 O 和 O' 分别套在静止不动的竖直杆 AB 和 A'B' 上, 一根不可伸长的绳子一端系在 A' 点上, 并穿过环 O', 另一端系在环 O 上, 如图 1-21 所示. 若环 O' 以恒定速度 v' 向下运动, 求当 $\angle AOO' = \alpha$ 时, 环 O 的速度 v 等于多少?

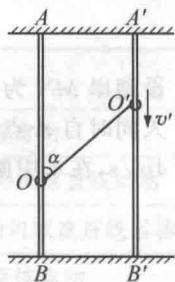


图 1-21

4. 如图 1-22 所示, 直线 AB 以速度 v_1 沿垂直于 AB 方向移动, 而直线 CD 以速度 v_2 沿垂直于 CD 的方向移动, 两线之间的夹角为 θ , 求两线交点 M 的速度大小.

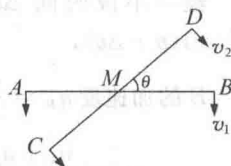


图 1-22

5. 二相同的正方形细铁框对角线在同一直线上, 如图 1-23 所示, 若沿对角线分别以 v 、 $2v$ 的速度反向分离, 则两铁框交接点的速度大小为多少?

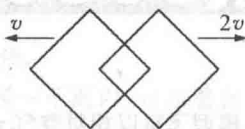


图 1-23

● B 组练习 ●

1. 如图 1-24, 细杆 AB 长 L , 两端分别约束在 x 、 y 轴上运动, (1) 试求杆上与 A 点相距 aL ($0 < a < 1$) 的 P 点运动轨迹; (2) 如果 v_A 为已知, 试求 P 点的 x 、 y 方向分速度 v_{Px} 和 v_{Py} 对杆方位角 θ 的函数.

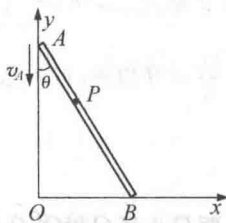


图 1-24

2. 设湖岸 MN 为一直线, 有一小船向岸边的 A 点沿与湖岸成角 $\alpha = 15^\circ$ 匀速向湖中行驶, 另有一人同时自 A 点出发, 他先沿湖岸走一段后再入水中游泳去追船, 已知人在岸上走的速度 $v_1 = 4\text{m/s}$, 在水中游泳的速度 $v_2 = 2\text{m/s}$, 问船速最大为多少此人才能追上船?