ZOUJINLIKEWANGGUO

走进理科王国

★ 青少年爱读的理科课外读物 ★

数学王国探秘

SHUXUEWANGGUOTANMI

姜运仓◎主编

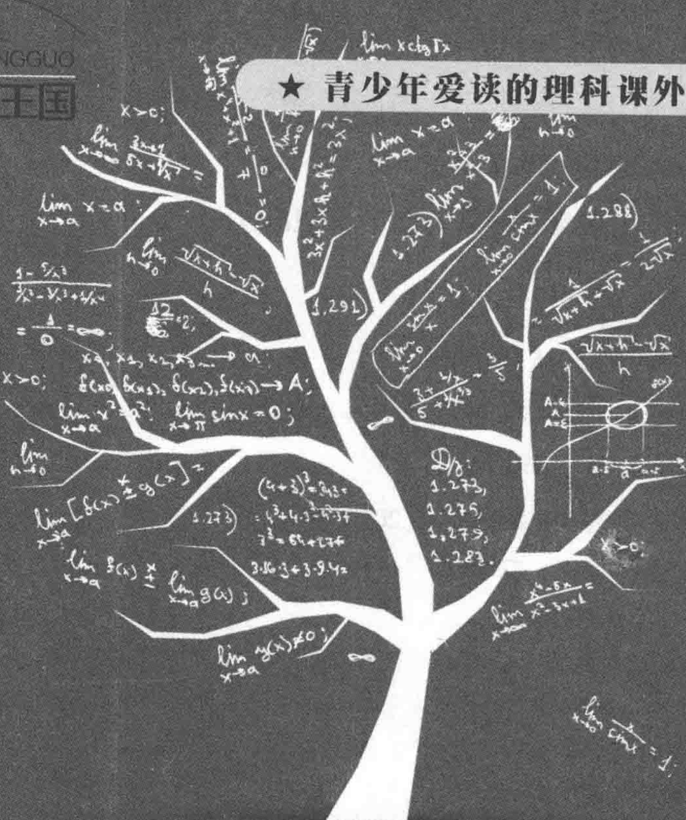
走进宏大奇奥的理科王国　感觉神秘诱人的理科魅力

领略引人入胜的理科情趣　品读鲜为人知的理科故事

知识出版社

ZOUJINLIKEWANGGUO
走进理科王国

★ 青少年爱读的理科课外读物 ★



数学王国探秘

SHUXUEWANGGUOTANMI

姜运仓◎主编

走进宏大奇奥的理科王国　感觉神秘诱人的理科魅力
领略引人入胜的理科情趣　品读鲜为人知的理科故事

知识出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学王国探秘/姜运仓主编. —北京:知识出版社,2013.3

(走进理科王国)

ISBN 978-7-5015-7297-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①姜… Ⅲ.①数学-青年读物②数学-少年读物 Ⅳ.①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第313660号

责任编辑 张 磬
责任印制 张新民
封面设计 弘图时代

知识出版社出版发行
地　　址 北京市西城区阜成门北大街17号
邮　　编 100037
电　　话 010-88390732
网　　址 http://www.ecph.com.cn
印 刷 厂 北京天正元印务有限公司
开　　本 1/16
印　　张 9.5
字　　数 160千字
印　　次 2013年3月第1版 2013年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5015-7297-7 定价:19.00元

前　言

大千世界，奥秘无穷：烂漫的春花，诱人的秋果；神秘的河图洛书，美妙的黄金数字；宏大的宇宙星空，微观的原子世界……凡此种种，无不引人遐思。“书到用时方恨少”，当你欲破解种种谜团时，却发现小小的课本已不能满足你对科学的渴求，越来越多的新知识、新科技更是让你眼花缭乱、应接不暇，一本文质兼美、深入浅出的科普图书，将成为你由衷的期待。为此我们倾力打造了这套科普丛书——《走进理科王国》。

本书以拓展学生科学视野、提高科学素质为宗旨，从新课标规定的知识体系着手，紧密结合新课改，集中介绍了数、理、化、生等方面的相关知识。本书把深奥的知识浅显化，把枯燥的知识趣味化。在这里，自然的奥秘不再神秘，科学已成为打开理科王国大门的金钥匙。它会引导你沉醉于神奇瑰丽的大千世界之中，切实感受科学技术的强大威力，从而启迪智慧、丰富想象、激发创造，培养青少年热爱科学、献身科学的决心。

浏览此书，你会发现科学原来如此淋漓尽致地散发出无穷的魅力，自然奥秘给了人类无穷的梦想，也给了人类艰苦创业的平台，如果你拥有了探索的明眸，充满了求知的渴念，那么本书就是你步入科学宫殿的引路者。

编　者

目　录
Contents

第一章　数字溯源

第一节　考古学的发现

数字从计数与数目开始，所以若想要了解数学的起源，就必须上溯至最早使用数目的年代——这是最艰难的工作。尽管如此，这样的追溯却能帮助我们明了数学是否只是人类的次要天性，是否只是一种意外的发明，或者了解到数学确实是人类主要天性的一部分。如果数学的确是我们生而为人的一部分基础，那么我们更该相信数学能够、也应该由社会上各式各样的人来分享，而不是由“大胡子老头儿”独享。

找到计数的起源，就方便我们知道数学的本质，帮助我们认识那股创造出数学的驱动力。人类创造数目的最早动机，是要知道一堆物体有多少。换句话说，就是要知道袋子里有多少个鸭蛋可分配给家人、族人要走多少天才能到达下一个饮水井、还有多少天才会昼长夜短、需要多少个箭镞去交换一艘独木舟，等等。在上古初民的日常生活中，知晓该如何决定一堆东西的多少，诚然是一大动力。

要达到这个地步，就需要计数的行为，数学家把这一行为称作“一对一映射”。当我们用手指计数时，是把唯一的一个数字指定（即映射）到特定一根手指，因此当我们计数完了，前面十个数字都分别指定给一根不同的指头。进行这项工作时，次序是很重要的，因为最后喊出的数字必须保证是我们计数物件的总数目，也就是该集合的多少；计数一个集合，就是量度它的多少。

当我们对一组或一堆物体做实物计数时，是在执行上述同样的映射，我们一面用手指头点算，一面以适当的次序喊出适当的数字。点完时最后喊出的数字，就是我们所要的数目。从这奇妙的计数过程，我们得到了自然数：1，2，3，4，5，…，后面跟着的三个黑点（…）是省略符号，代表可以继续数下去。

发现计数的最早直接证据是两块兽骨，上面显现清晰的成组刻痕，其中一块

是大约 35000 年前一只狒狒的股骨，在非洲列朋波山脉被发现的。另一块是在捷克被发现的狼骨，年代约在 33000 年前，发现的地点是一处古人类的宿营地；这块狼骨特别有意思，上面有 55 条刻痕，每 5 条为一组，共分成 11 组。

我们知道，远在 33000 年前，尚未有耕种活动（农耕大约于 10000 年前才开始），也没有城镇，不过这些兽骨仍然是我们最近似的祖先——智人，即现代人种留下的。这两块兽骨显示出，我们远古的渔猎采集时期的祖先就已经懂得计数了。

计数有可能发生得更早吗？在现代人种出现之前，可上溯至 130000 年前的尼安德塔人。他们散布在中东、欧洲，确定不属于现代人种，不过他们的脑子比现代人的大，成年尼安德塔人的脑平均容积大约为 1500 cm^3，而我们的脑平均容积约为 1300 cm^3。他们有足够的智能去营建居室、用火、制造精巧器具、用花朵陪葬死者，甚至还举行宗教仪式。那么他们懂得计数吗？我们并不知道，只有等待考古学家的进一步研究了。

如果尼安德塔人懂得计数，那么计数的发生就要推前到 130000 年前了。有没有更早的呢？比尼安德塔人早很多的是直立人，生存于 1500000 至 300000 年前，可能是我们早期的祖先。他们没有现代人或尼安德塔人的脑力，因为他们的脑平均容积介于 900 cm^3 和 1100 cm^3 之间，大约相当于现代黑猩猩（450 cm^3）和人类的中间。可是从他们的各种行为，透露出他们相当聪明：他们已会利用火，又从非洲远徙到欧洲和亚洲；他们能制作细巧的工具，能建造居室。同样的问题：他们懂得计数吗？同样的答案：我们不知道，只得仰赖考古学家去发现更多的资料。

计数的引进可能因为新的考古证据而往前推——做如此想象并不算离谱；新的发现总会不断迫使我们对人类祖先智能技艺发展的估计，朝向更早的年代修订。

许多学者把直立人描绘成躬着腰、毛茸茸、手持石块和木棒敲打大地的野蛮模样，然而在 1994 年，德国汉诺威历史保护研究所的提米，在汉诺威东方的煤坑里发现了一个地窖，里面的矛头是 400000 年前的东西，这些矛头做得很精致，可能是一个晚期的直立人磨造成的，显示出直立人不是没有智慧的野蛮人，而有可能是身怀技艺和才能的狩猎者。

现在已有解剖学的证据指出，计数应该属于十分古老的行为，神经学家已经辨明某类行为与大脑的某些特殊部位有关。一般来说，语言能力与左脑有关，这里也是掌管一些如计划、执行连续运作等功能的大本营。在脑部左后方有一个特殊区域，提供我们认知手指和从事一些简单算术的能力。

将认知手指和计算技巧联结在一起，应当不会令人惊讶，因为我们的儿童开始学习计数时，就是把手指与数目关联起来，这两种行为由大脑的同一部位负

责，显示出我们极长时间以来，一直使用手指来计数。

如果计数能远远上溯到数十万年之前，而且还经由某种方式深植于我们脑中，那么计数与数目应该是我们天性的一部分，作为人类，就能计数，同时也懂得数目。如果我们再观察到人们（甚至是一些自以为对数学毫无兴趣的人）从数目引发出多少娱乐工具，这种想法会更为强烈。

我们有许多博弈游戏使用到数目。用扑克牌赌 21 点，无论如何都是一种计数的游戏：我手上的牌加起来的点数，会比庄家更接近 21 点吗？再补一张不会爆掉吗？掷骰子也是一种计数的游戏，输赢机会的计算相当复杂，但是那些玩家对于他们下的赌注非常精于计算。你去过赛马场吗？去看看那些赌客像疯子似的计算赔率，以找出下一场马赛的赢家号码，就知道了数目在博弈中的应用。

我们也将数字配合到音乐里面；使用数字来辨别我们的房屋及电话；人们研究各种复杂的指数，来观察股市涨跌。处处都用到数字、计算，及简易的算术。如果我们形容人类为会做工具、会用火的人猿，那么还有一个更确切的形容可以用在我们身上：我们是懂得计数的人猿。

第二节　数的抽象化

约于 10000 年前（公元前 8000 年），地球上的人类发生了极重大的变化，在一个称为“肥沃月湾”的地区（包括今天的以色列、土耳其南部，及伊拉克的底格里斯—幼发拉底河谷一带），人们放下狩猎器具，开始耕种。农耕的兴起促使城市发展，因为人们能够终年定居在同一地方，已经毋须像他们的渔猎采集远亲那般，为了追逐猎物而四处迁徙。

然而他们必须做一些较为细致的工作，那是逐猎生活的前人感到陌生的：他们要计划播种多少谷子；他们必须维护田地，储藏收成，分配粮食；城市发展起来了，又要保护自己不被外人掠夺，或是偷走他们的辛劳所得。为了组织军队和建立碉堡，于是政府诞生了，维持军队和建设城堡需要经费，政府就开始抽税！

所有这些新生事物，压向我们祖先的数学能力，因为仅懂得计数已不足以应付，加减乘除四则运算，不但成为必需，更是不可或缺了。对于这段时期的算术技能，我们又拥有什么证据呢？由于一直到约公元前 3100 年才发明文字，所以这段时期的文字记载是不存在的。既然缺乏记载，我们就只能猜测，自公元前 8000 年至开始有历史记载之间的 5000 年中，究竟发生了什么事情。

多年来，人类学家在西亚的古代集居地，也是最初的农耕发祥地，找到了很有趣的陶制小偶像，那些小陶偶是做什么用的呢？有些专家认为它们可能是原始

的棋子，又或许是求旺子旺孙的偶像。但是找到的小陶偶有成千上万之多，其中许多是在普通居家地点被发现的。当时会有那么多人下棋吗？

德州大学的舒孟特贝瑟勒，于20世纪70年代发现了答案。她从伊朗、伊拉克和土耳其的113处地点，收集到超过8000个陶土制品，并分门别类，然后断定它们是计算用的“算子”。农夫和村民使用那些烤硬的小陶偶，来记录他们的财物，有时还在几个“算子”外面裹上一层软土，再放在火边烤干，变成一个硬封套的样子，把记录的数目密封起来。有些“算子”的形状是用来表示某一个特定的数目，另有一些“算子”的形状是代表被计数的特定对象，可能是羊只，也可能是酒坛。

这些“算子”安全地密封在内，外面的硬壳可作为一批货品中各种物品的正式标识。可是有时候，需要不必打开封壳就知道其中有几个“算子”，这种情况在货品从一个运货者转手给另一个运货者时更觉必要，于是作业者就培养出一种习惯，将壳里“算子”的形状先压印在壳子外表，然后才把它烤硬。做好之后，作业者根据封壳上的压印，能够“读”出里面是哪些“算子”，而且在必要时，还可以打开密封，计算实际的“算子”来证实数目。

几千年之后，一些聪明人觉得，为了传送简单的数目这样大费周折，实在没有必要，何不就使用小片的软陶土，在表面印上“算子”的形状，之后再烤干呢？由此就产生出源自古代苏美尔最古老的泥板。

苏美尔是一个王国，范围包括现在伊拉克的南半部地区，其中有乌尔、拉尔萨、乌鲁克、埃利都等古城，西亚的文字就诞生于此。这一片涵盖底格里斯河与幼发拉底河的富裕农田平原，统治权不断在那几个古城间移转，而有记载的历史就是在这个平原上出现的。我们现在知道，文字最早出现在西亚，用于登记财产与买卖记账等事务上。

从苏美尔各城找到的最古老泥板上（年代在公元前3100年之前），我们可以看到“算子”的压印代表各种数目，另外还有一些货品的图画或象形符号，譬如牲口和一斗斗的五谷等，这些是最早的文字原型。文字诞生与数目的记载及数字的使用，竟如此紧密相连，这对往后的发展有重大影响。不久，代名词的符号（用以辨识货品的主人）也出现了，接着又发明了动词来表示行为。到了公元前3100年前后，苏美尔人已经能够用完整的文字去记载历史，他们用楔形文字把历史写在大块的泥画板上，而随着文字的发展，数学也成长起来了。

现有的证据指出，数字在最早使用时，是当做形容词来形容不同的集合。在许多原始语言中，各种代表数目的字伴随着不同的物件对象，我们如今仍然可以从英语中看到这种制度的残迹：譬如说“a brace of oxen”（一对牛）、“a pair of gloves”（一双手套）。在原始社会里，代表数目的字也常常用在不同的对象上，例如斐济岛的原住民用“bola”这个字表示10艘船，而用“koro”表示10颗椰

子。数的本身不被当做是一样东西，只是用来附在一堆具体的物件上。所以，没有一堆需要计数的实物，数就不可能存在。

舒孟特贝瑟勒把计数的发展分成三个时期：首先是一对一的计数，在这阶段我们是数手指来计数；再者是实物计数，这时我们对特定一堆物件赋予唯一的数字；最后是抽象计数，是我们让数自行存在，成为独立的、存在于意识中的物件。然后她继续说明：

……在近东，抽象计数之前可能先有一种古代的实物计数体系，也就是在计数不同的项目时用不同的计数法。公元前 3000 年的楔形文字，使人毫不怀疑苏美尔人已经设计出一种最艰深的六十进位计数制度，那么他们的算术无疑是以抽象计数为基础的。

当我们进步到抽象计数时，就变成仅用一组数字或符号，而且可以应用到任何对象，或是用来表示符号（数码）之间的关系。舒孟特贝瑟勒甚至把公元前 3100 年前后发生的从实物数字演变到抽象数字的这种进步，归功于一个城市：乌鲁克，它位于伊拉克南部底格里斯河与幼发拉底河交汇处的西北方。

苏美尔人计数系统的崛起，从使用泥制“算子”开始，到先进的文字体系及抽象数字为止，表现出我们在“楔子”所谈的三种数学驱动力中的两种。

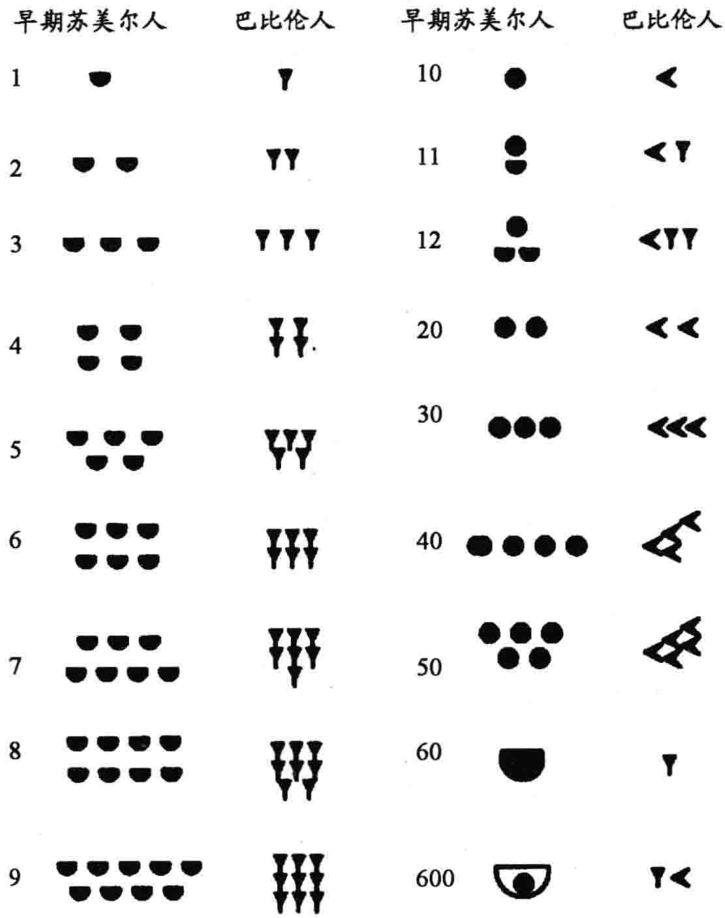
第一种影响数学的伟大驱动力是数的推广或抽象化。比如说，数不再单单归属于描述特定的实物，而开始独立存在。只需要单独一个数“二”，就可以代表任何包含两个物件的集合，对于同样含有两个元素的不同集合，我们不再需要不同的名称。如果在 3 颗椰子上加 2 颗椰子，我们得到 5 颗椰子，那么如果以香蕉来做同样的事，我们会得到 5 支香蕉吗？我们知道当然会，因为我们知道对于任何离散的集合，$2+3=5$。

第二种影响数学的伟大驱动力，是符号体系的发展。这个驱动力使我们得以记载及处理数字。符号法则的产生也始于苏美尔，由于苏美尔人先将“算子”的形状压印在软的泥板上面，然后再烤干，从此数字就以书写符号来表示。最早的时候，这是一个具体的、一对一的符号使用过程，但是终于演进出代表概念化物件集合的符号。

下页图是苏美尔人及后来的古巴比伦人（征服苏美尔人的民族）演进出来的书写数字系统。请注意，图中分别列出的苏美尔人系统和古巴比伦人系统，自 1 到 9 的计数符号是基于一对一的，也就是每次在数目上多一，他们就多加一个符号。当这样做太麻烦时，一对一的方法就暂时放弃，改用另一个符号来表示数目 10，然后又回复一对一的方式增加，一直到 60 为止，再另创一个新符号表示数目 60。

值得注意的是，这两个系统不仅用到数码，还使用了不再代表特定物件的数字，也就是那些能够代表任何离散物件集合的数字。这就是说，这些符号之间的

关系，无论是对苹果、香蕉，还是对房屋、马匹等，一概适用。



早期苏美尔人和古巴比伦人的数字

第三节　古埃及人的数学

在古代世界里，没有任何一个帝国比古埃及更伟大的了。以国祚长短而言，它超过所有其他古老王国。数千年来，古埃及人在非洲北部沿尼罗河居住，到了铜器时代（公元前 4000 年），他们开始建立永久性的农耕村落，那些村落逐渐繁荣，并向上埃及和下埃及扩展。公元前 3100 年，上埃及的法老明尼斯统一了两个王国，展开了各王朝法老的伟大家系。在公元前 2900 年，他们已经开始建造金字塔，而著名的胡夫金字塔，在公元前 2560 年就开始建造了。

古埃及人的王朝几乎未遇干扰地延续下去，直至公元前 525 年，波斯王甘比西斯二世（居鲁士大帝的儿子）击溃末代埃及法老，就此结束了人类有历史记载以来存续了 2600 年之久的强大帝国。

古埃及文字与苏美尔文字几乎在同一年代出现，可是有些权威人士认为古埃及文字比较晚，而且有可能受到苏美尔文字的影响。古埃及人为他们的数字演变出两组符号（见下图），一组是官方的象形文字，用于纪念碑和建筑物上，另一组是僧侣书写体，用于日常事务。请留意看象形文字中从 1 到 9 的几个数字，这些数字显示一对一的计数特性。然后是一个新符号，代表 10，接着又添上许多新的符号代表更大的数，一直到包括 1000000 这个数。

古埃及象形文字与僧侣体数码

从他们的建筑成就，包括金字塔和神庙等，我们可以判定古埃及人在公元前第三个千禧年的前半叶，就已经发展出他们的数学。然而我们从来没有看到早于第二个千禧年初期的数学文献，最早的数学文献的出现已是几百年之后的事了。

最早的数学文献是《莫斯科纸草书》，年代推溯到约公元前 1890 年。第二件著名的纸草书，写于大概公元前 1650 年，可能是一件较早文献的抄本，原文献的年代可追溯至公元前 2000 到 1800 年。可是，我们可以肯定地说，古埃及人在那之前几百年，就已经能从事繁杂的算术运算了，因为胡夫金字塔各边长的精确度达到 16.93 毫米（占总长度的 1/14000）以内，而它的四个角的角度误差最多也不过 12′（90°的 1/27000）。

我们知道古埃及人使用分数，可是他们只用单位分数，也就是分子为 1、分母可以是任何正整数的分数。举例而言，要表示分数 3/7，古埃及人会把它写成几个单位分数之和，即 1/3 + 1/11 + 1/231。我们立刻就看出，这种体系别扭得不得了，因为那得做一堆非常恼人的计算，只为了加加减减一些简单的分数。因

此，为了简化这样的工作，古埃及人大量使用单位分数的计算表，来协助他们完成分数的计算。

由于符号体系不足，古埃及人未能演进出更有效的计数系统。他们的单位分数计法，是在分母上方画一个小椭圆或黑点，这方法让他们易于写单位分数，但若要写分子大于 1 的非单位分数，就行不通了，除非发明一种特别的符号来表示。因此，古埃及人的符号体系妨碍他们扩展出更有效的计数法。

除了把基本的加减乘除运算，做到高度精确之外，古埃及人还能解初等代数问题，计算一些如三角形、梯形等规则图形的面积，以及计算圆柱体与金字塔的体积。

第四节　苏美尔人和古巴比伦人的数学

在公元前第三个千禧年时，古埃及人正在构建他们的数学，营建他们的金字塔和神庙，而苏美尔人也在发展他们的数学。苏美尔人的计数系统是用 10 与 60 两种符号组合成的体系，称为六十进位制。到了公元前 2400 年，他们已经开始使用分数，六十进位制让他们能够写出很大与很小的数。

对于分数，古埃及人用的是单位分数，而苏美尔人用的是形式为 $n/60$ 或 $n/60^2$ 的分数，所以他们只需标示 n 是什么数就可以了。至于这个数是 n 还是 $n/60$ 呢，读数字的人就要根据其他资料来自行决定了；例如：表示 30 的写法是 < < <，这儿每一个“<”符号代表 10，可是表示 1/2 的写法也是 < < <，代表 30/60，也就是1/2。

苏美尔人的计数体系具有容易书写和操作的优点，但是读数字的人必须从前后文去了解此数是整数还是分数，这当然是缺点。

古埃及人和苏美尔人引进分数之举，是很重要的一步，因为这代表计数体系的第一次大扩张——从使用正整数（用来计数的自然数）扩大到整数，加上分数。用符号的术语来说，分数是指写成 p/q 这类形式的数，而 p 与 q 都是正整数；分数的体系事实上包含所有的正整数，因为每一个正整数 n 都可以写成 $n/1$——从这里我们可看到前面所讲的推广的力量。

将数的概念推广到涵盖正整数与正分数之后，这些古代民族就大幅增强了数学模拟自然界的能力。计数一个集合中的元素时，我们所需要的只是正整数，但是当我们要将一件东西分成几部分时，就要用到分数；在建筑上，分数对于度量长度十分有用。在使用符号方面，苏美尔人超越了古埃及人，因为古埃及人受限于单位分数，而苏美尔人能够用他们的六十进位制，取得任何分数的近似值。