海天教育 HAITIAN EDUCATION

全新版

理工社

海天考研数学 2015

10年真题分析与演练

（数学二）

主 编：杨 超 姜晓千 刘晓艳

超越上一次，

会超越周围的人。

我是牛小天，帅得很纯粹！

赠送：价值240元学习卡[详见封三]

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国著名考研辅导机构推荐用书

海天考研数学

10年真题分析与演练

（数学二）

主编：杨　超　姜晓千　刘晓艳

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有　侵权必究

图书在版编目（CIP）数据

海天考研数学10年真题分析与演练. 数学二 / 杨超，姜晓千，刘晓艳主编. —北京：北京理工大学出版社，2014.6
ISBN 978-7-5640-9290-0

Ⅰ. ①海… Ⅱ. ①杨… ②姜… ③刘… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第130569号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
82562903（教材售后服务热线）
68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京旺鹏印刷有限公司
开　　本 / 787毫米 × 1092毫米　1/16
印　　张 / 18.5
字　　数 / 350千字
版　　次 / 2014年6月第1版　2014年6月第1次印刷
定　　价 / 32.80元

责任编辑 / 王俊洁
文案编辑 / 王俊洁
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

目　录

第一篇　2005—2014 年考研数学二试题

第二篇　考研数学二历年试题分类解析

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第一篇

2005—2014年考研数学二试题

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

2014 年全国研究生入学统一考试

(数学二)

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0^+$ 时,若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是 ( )

(A)$(2,+\infty)$ (B)$(1,2)$ (C)$\left(\frac{1}{2},1\right)$ (D)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

P7,第 12 题

2. 下列曲线有渐近线的是 ( )

(A)$y = x + \sin x$ (B)$y = x^2 + \sin x$

(C)$y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D)$y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$ **P43,第 38 题**

3. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数,$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上( )

(A) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant g(x)$ (B) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant g(x)$

(C) 当 $f''(x) \leqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant g(x)$ (D) 当 $f''(x) \leqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant g(x)$

P43,第 37 题

4. 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7, \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 处的曲率半径是 ( )

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$ (C)$10\sqrt{10}$ (D)$5\sqrt{10}$

P27,第 13 题

5. 设函数 $f(x) = \arctan x$,若 $f(x) = xf'(\xi)$,则 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$ ( ).

(A)1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$ **P5,第 8 题**

6. 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,在 D 的内部具有二阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$,$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,则 ( )

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在区域 D 的边界上取得

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在区域 D 的内部取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在区域 D 的内部取得,最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在区域 D 的内部取得,最大值在 D 的边界上取得 **P79,第 10 题**

7. 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2 - b^2c^2$ (D) $b^2c^2 - a^2d^2$

P110,第 1 题

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k, l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 ( )

(A)必要非充分条件 (B)充分非必要条件

(C)充分必要条件 (D)既非充分又非必要条件 **P119,第 4 题**

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx =$ ________. **P61,第 13 题**

10. 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x) = 2(x-1)$,$x \in [0,2]$,则 $f(7) =$ ________

P2,第 1 题

11. 设 $z = z(x,y)$ 是曲线方程 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定的函数,则 $dz|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} =$ ________.

P79,第 8 题

12. 曲线 L 的极坐标方程是 $r = \theta$,则 L 在点 $(r,\theta) = \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是 ________.

P25,第 8 题

13. 一根长度为 1 的细棒位于 x 轴的区间$[0,1]$上,若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$,则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ ________. **P64,第 20 题**

14. 设 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围为 ________. **P145,第 1 题**

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 10 分)求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) - t\right] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$. **P5,第 9 题**

16.(本题满分 10 分)已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$,,且 $y(2) = 0$,求 $y(x)$ 的极大值与极小值. **P42,第 34 题**

17.（本题满分 10 分）设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，计算

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

P89，第 3 题

18.（本题满分 10 分）设函数 $f(u)$ 具有 2 阶段连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}.$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

P75，第 3 题

19.（本题满分 10 分）设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明：

（Ⅰ）$0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a, x\in[a,b]$；

（Ⅱ）$\int_a^{a+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

P38，第 30 题

20.（本题满分 11 分）设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}, x\in[0,1]$ 定义函数列：

$$f_1(x)=f(x), f_2(x)=f(f_1(x)), \cdots, f_n(x)=f(f_{n-1}(x)), \cdots$$

记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$

P64，第 21 题

21.（本题满分 11 分）已经函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

P64，第 22 题

22.（本题满分 11 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

（Ⅰ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

（Ⅱ）求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

P124，第 3 题

23.（本题满分 11 分）证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & n\end{pmatrix}$ 相似.

P136，第 3 题

2013 年全国研究生入学统一考试

（数学二）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 设 $\cos x - 1 = x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)| < \dfrac{\pi}{2}$，当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是　　（　　）

(A) 比 x 高阶的无穷小　　(B) 比 x 低阶的无穷小

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小　　(D) 与 x 等价的无穷小　　P7，第 13 题

2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right) - 1\right] =$　　（　　）

(A) 2　　(B) 1　　(C) -1　　(D) -2　　P2，第 2 题

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ 2, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$，则　　（　　）

(A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点

(B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导

(D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导　　P21，第 1 题

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e, \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1} x}, & x \geqslant e, \end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则　　（　　）．

(A) $\alpha < -2$　　(B) $\alpha > 2$　　(C) $-2 < \alpha < 0$　　(D) $0 < \alpha < 2$

P62，第 14 题

5. 设 $z = \dfrac{y}{x} f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} =$　　（　　）

(A) $2yf'(xy)$　　(B) $-2yf'(xy)$　　(C) $\dfrac{2}{x}f(xy)$　　(D) $-\dfrac{2}{x}f(xy)$

P76，第 4 题

6. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分，记 $I_k = \iint\limits_{D_k}(y - x)\,dxdy\,(k = 1,2,3,4)$，则　　（　　）

(A) $I_1 > 0$　　(B) $I_2 > 0$　　(C) $I_3 > 0$　　(D) $I_4 > 0$

P89，第 4 题

7. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则　　（　　）

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价　　P116，第 1 题

8. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充要条件是　　（　　）

(A) $a = 0, b = 2$　　(B) $a = 0$，b 为任意常数

(C) $a = 2, b = 0$　　(D) $a = 2$，b 为任意常数　　P148，第 5 题

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left[2 - \dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} =$ ________．　　P5，第 10 题

10. 设函数 $f(x) = \int_{-1}^{x}\sqrt{1 - e^t}\,dt$，则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y = 0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=0} =$ ________．　　P21，第 2 题

11. 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围平面图形的面积是 ________．

P68，第 1 题

12. 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 点处的法线方程为 ________．　　P25，第 9 题

13. 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$，$y_2 = e^x - xe^{2x}$，$y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程满足条件 $y|_{x=0} = 0$，$y'|_{x=0} = 1$ 的解为 $y =$ ________．　　P99，第 5 题

14. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij} + A_{ij} = 0\,(i, j = 1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}| =$ ________．　　P113，第 4 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本题满分 10 分）当 $x \to 0$ 时，$1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值．　　P8，第 14 题

16.（本题满分 10 分）设 D 是曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x = a\,(a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴、y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y = 10V_x$，求 a 的值．

P65，第 23 题

17.（本题满分 10 分）设平面区域 D 由直线 $x=3y, y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成，求 $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

P90，第 7 题

18.（本题满分 10 分）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

（Ⅱ）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

P31，第 20 题

19.（本题满分 10 分）求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

P79，第 11 题

20.（本题满分 11 分）设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求此极限.

P2，第 3 题

21.（本题满分 11 分）设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$，

（Ⅰ）求 L 的弧长；

（Ⅱ）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1, x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标.

P91，第 1 题

22.（本题满分 11 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

P129，第 7 题

23.（本题满分 11 分）设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2,$$

记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$.

（Ⅰ）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

P146，第 2 题

2012 年全国研究生入学统一考试

（数学二）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 （　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3　　**P43，第 39 题**

2. 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$ （　）

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$　　(D) $(-1)^n\cdot n!$　　**P22，第 3 题**

3. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 （　）

(A) 充分必要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 既非充分条件也非必要条件

P14，第 1 题

4. 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx(k=1,2,3)$，则有 （　）

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$　　(C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_2<I_1<I_3$

P54，第 1 题

5. 设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y，都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，使得 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是 （　）

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$　　(B) $x_1>x_2,y_1>y_2$

(C) $x_1<x_2,y_1<y_2$　　(D) $x_1<x_2,y_1>y_2$　　**P84，第 1 题**

6. 设区域 D 由曲线 $y=\sin x$，$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$，$y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D(xy^5-1)dxdy=$ （　）

(A) π　　(B) 2　　(C) -2　　(D) $-\pi$

P92，第 2 题

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是 （　）

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

P119，第 5 题

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$ （　）

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

P113，第 6 题

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．

9. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ______．

P44，第 1 题

10. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{2^2}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^2+n^2}\right)=$ ______．　　**P3，第 4 题**

11. 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$，其中函数 $f(x)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______．　　**P84，第 2 题**

12. 微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$ ______．

P105，第 1 题

13. 曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是 ______．　　**P45，第 2 题**

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{BA}^*|=$ ______．　　**P110，第 2 题**

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. （本题满分 10 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$．

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若当 $x\to0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小量，求常数 k 的值．　　**P14，第 2 题**

16. （本题满分 10 分）求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值．　　**P84，第 3 题**

17. （本题满分 12 分）过点 $(0,1)$ 作曲线 L：$y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积．

P68，第 2 题

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

18.（本题满分 10 分）计算二重积分$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\delta$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成. **P92，第 3 题**

19.（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程

$$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0 \text{ 及 } f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x.$$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的表达式；

（Ⅱ）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点. **P60，第 10 题**

20.（本题满分 10 分）证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$. **P39，第 31 题**

21.（本题满分 10 分）（Ⅰ）证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（n 为大于 1 的整数）在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（Ⅱ）记（Ⅰ）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限. **P15，第 3 题**

22.（本题满分 11 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，

（Ⅰ）计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

（Ⅱ）当实数 a 取何值时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解. **P130，第 8 题**

23.（本题满分 11 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2，

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 f 化为标准形. **P146，第 3 题**

2011 年全国研究生入学统一考试

（数学二）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　）

(A) $k=1,c=4$　(B) $k=1,c=-4$

(C) $k=3,c=4$　(D) $k=3,c=-4$　**P8，第 15 题**

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　）

(A) $-2f'(0)$　(B) $-f'(0)$　(C) $f'(0)$　(D) 0　**P22，第 4 题**

3. 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为（　）

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3　**P31，第 21 题**

4. 微分方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为（　）

(A) $a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$　(B) $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$

(C) $x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$　(D) $x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$　**P105，第 3 题**

5. 设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0,g(0)<0$，且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（　）

(A) $f''(0)<0,g''(0)>0$　(B) $f''(0)<0,g''(0)<0$

(C) $f''(0)>0,g''(0)>0$　(D) $f''(0)>0,g''(0)<0$　**P84，第 4 题**

6. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)dx,J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)dx,K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)dx$，则 I,J,K 的大小关系为（　）

(A) $I<J<K$　(B) $I<K<J$　(C) $J<I<K$　(D) $K<J<I$

P69，第 3 题

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得到单位矩阵，记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$（　）

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

P114，第 7 题

8. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为（　）

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

P125，第 4 题

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________．　**P18，第 5 题**

10. 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________．　**P105，第 2 题**

11. 曲线 $y=\int_0^x\tan t\,dt\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$______．　**P65，第 24 题**

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}(\lambda>0)$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=$________．

P62，第 15 题

13. 设平面区域 D 由直线 $y=x$，圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所组成，则二重积分 $\iint\limits_D xy\,d\delta=$________．　**P92，第 4 题**

14. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为________．　**P150，第 1 题**

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本题满分 10 分）已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$，试求 α 的取值范围．　**P45，第 3 题**

16.（本题满分 11 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 确定，求函数 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点．　**P46，第 4 题**

17.（本题满分 9 分）设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$．　**P76，第 5 题**

18.（本题满分 10 分）设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点，记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾斜角，若 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，求 $y(x)$ 的表达式.

P100，第 8 题

19.（本题满分 10 分）（Ⅰ）证明：对任意的正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立；

（Ⅱ）设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

P16，第 4 题

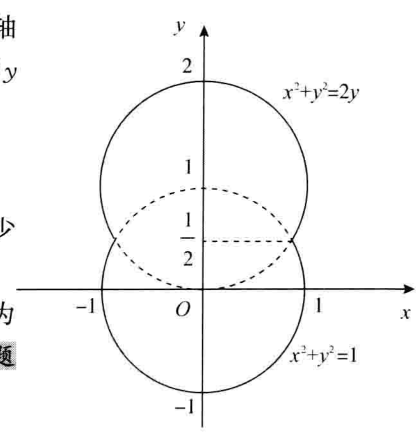
20.（本题满分 11 分）一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲面由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 连接而成.

（Ⅰ）求容器的容积；

（Ⅱ）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位为 m，重力加速度为 $g\,\mathrm{m/s^2}$，水的密度为 $10^3\,\mathrm{kg/m^3}$）

P69，第 4 题



21.（本题满分 11 分）已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

P87，第 1 题

22.（本题满分 11 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$，不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

P117，第 2 题

23.（本题满分 11 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

P140，第 8 题

2010 年全国研究生入学统一考试

(数学二)

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为 ( )

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 **P12,第 20 题**

2. 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则 ( )

(A)$\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$ (B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$ (D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$ **P97,第 1 题**

3. 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切,则 $a=$ ( )

(A) 4e (B)3e (C)2e (D) e **P26,第 10 题**

4. 设 m,n 均是正整数,则反常积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性 ( )

(A) 仅与 m 的取值有关 (B) 仅与 n 的取值有关

(C) 与 m,n 的取值都有关 (D) 与 m,n 的取值都无关 **P62,第 16 题**

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

(A)x (B)z (C)$-x$ (D)$-z$

P85,第 5 题

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ ( )

(A)$\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$ (B)$\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C)$\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$ (D)$\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$ **P93,第 5 题**

7. 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,下列命题正确的是 ( )

(A)若向量组Ⅰ线性无关,则 $r\leqslant s$ (B)若向量组Ⅰ线性相关,则 $r>s$

(C)若向量组Ⅱ线性无关,则 $r\leqslant s$ (D)若向量组Ⅱ线性相关,则 $r>s$

P120,第 6 题

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 ( )

(A)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$ **P137,第 4 题**

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$________. **P105,第 4 题**

10. 曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为________. **P47,第 6 题**

11. 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________. **P29,第 18 题**

12. 当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时,对数螺线 $r=e^{\theta}$ 的弧长为______. **P66,第 25 题**

13. 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加,宽 w 以 3 cm/s 的速率增加,则当 $l=12$ cm,$w=5$ cm 时,它的对角线增加的速率为________. **P47,第 7 题**

14. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=3$,$|\boldsymbol{B}|=2$,$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$________. **P110,第 3 题**

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 10 分)求函数 $f(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值. **P46,第 5 题**

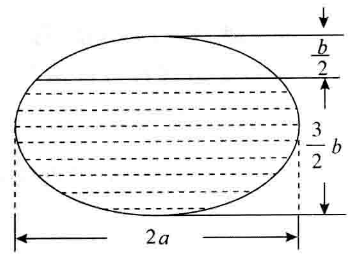
16.(本题满分 10 分)(Ⅰ)比较 $\displaystyle\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\displaystyle\int_0^1 t^n\cdot|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由;

(Ⅱ)记 $u_n=\displaystyle\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt,(n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$. **P63,第 19 题**

17.（本题满分 11 分）设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数，且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$，已知 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求函数 $\psi(t)$.　**P105，第 5 题**

18.（本题满分 10 分）一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆，现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时（如图），计算油的质量.（长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常量 ρ，单位为 $\mathrm{kg/m^3}$）

P70，第 5 题



19.（本题满分 11 分）设函数 $\mu=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式

$$4\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}=0,$$

确定 a,b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay$，$\eta=x+by$ 下简化为 $\dfrac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}=0$.　**P77，第 6 题**

20.（本题满分 10 分）计算二重积分

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$.　**P88，第 2 题**

21.（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$. 证明：存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.　**P47，第 8 题**

22.（本题满分 11 分）设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}.$$

已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解，

（Ⅰ）求 λ,a；

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.　**P131，第 9 题**

23.（本题满分 11 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，求 $a,\boldsymbol{Q}$.　**P141，第 9 题**

2009 年全国研究生入学统一考试

(数学二)

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 (　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)无穷多个

P13,第 23 题

2. 当 $x\to 0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则 (　　)

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

P9,第 16 题

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$,则点 $(0,0)$ (　　)

(A)不是 $f(x,y)$ 的连续点　　(B)不是 $f(x,y)$ 的极值点

(C)是 $f(x,y)$ 的极大值点　　(D)是 $f(x,y)$ 的极小值点

4. 设函数 $f(x,y)$ 连续,则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$ (　　)

(A) $\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$　　(B) $\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$

(C) $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$　　(D) $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

P93,第 6 题

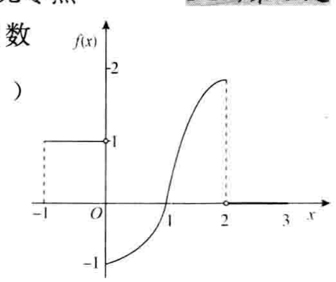
5. 若 $f''(x)$ 不变号,且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$,则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内 (　　)

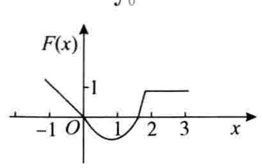
(A) 有极值点,无零点　　(B) 无极值点,有零点

(C) 有极值点,有零点　　(D) 无极值点,无零点

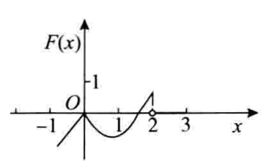
P47,第 9 题

6. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示,则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为 (　　)

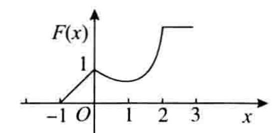




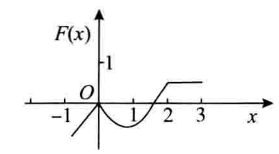
(A)



(B)



(C)



(D)

P70,第 6 题

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,若 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 (　　)

(A) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

P113,第 5 题

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}^T$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵,且 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为 (　　)

(A) $\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

P114,第 8 题

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. 曲线 $\begin{cases}x=\int_0^{1-t}e^{-u^2}du,\\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

P26,第 11 题

10. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=1$,则 $k=$ ________.

P63,第 17 题

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx\,dx=$ ________

P59,第 7 题

12. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数,则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________.

P27,第 14 题

13. 函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为________.

P42,第 35 题

14. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量,$\boldsymbol{\beta}^T$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$ 相似于 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=$ ________.

P138,第 5 题

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com