Applied Advanced Mathematics

应用高等数学

（工科类）

主编 宣明

国防工业出版社
National Defense Industry Press

应用高等数学

（工科类）

主　编　宣　明
副主编　项海飞　邱招丰
参　编　（按姓氏笔画排序）
王新成　阮　婧
林　斌

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书是高职数学(工科类)教材,是编者在多年教学改革成果的基础上、基于“与专业结合的问题驱动”教学模式编写而成的.

本书的特色是,每章都是以“问题提出—数学知识—解决问题”三个教学步骤为主线.全书共八章,主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、Mathematica 数学实训.

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学:工科类/宣明主编. —北京:国防工业出版社,2014.8

ISBN 978-7-118-09626-2

Ⅰ.①应... Ⅱ.①宣... Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 175170 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 11¾ **字数** 215 千字

2014 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 25.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

实践导向校本教材编写委员会

前言

《应用高等数学》（工科类）是温州职业技术学院多年来数学教学改革后的系列校本教材之一，是温州职业技术学院重点建设教材．该校本教材编写思路是，每章以“问题提出—数学知识—解决问题”三个教学步骤为主线，内容保留了传统的一元微积分和常微分方程基础理论知识，吸收了数学建模思想和方法以及 Mathematica 数学软件，增加了每章开头专业中的数学问题和每章的最后一节针对开头问题的解答．

该教材特色是以数学教学改革成果为突破点实现了教材体系向教学体系的转换．主要体现为“与专业结合的问题驱动”教学模式，即教学分三步骤：

第一步，教师问题提出（生活问题和专业问题）；

第二步，系统学习数学基本知识；

第三步，师生合作利用所学数学基本知识解决问题．

该教材具有以下特点：

（1）将历年的某些数学建模竞赛题进行改编，使之成为生活问题提出，体现数学建模思想和方法融入教材．

（2）每章的开头有专业中的数学问题以及每章的最后一节有针对开头问题的解答，体现数学为专业服务的理念．

（3）在各章中增加了用 Mathematica 数学软件演示例题，体现先进工具用于教学．

（4）最后一章是为学生安排的数学实训．

教学建议：

（1）教学分三步骤：第一步，教师问题提出（生活问题和专业问题）并简要分析问题；第二步，教师教学生系统学习数学基本知识；第三步，利用所学数学基本知识师生合作解决问题．

（2）课程学时数为 64 节左右，教学中注重数学概念、数学方法、数学思想的传递，繁杂数学计算可介绍先进工具 Mathematica 数学软件来实现．

本教材编写的具体分工如下：宣明撰写第一、二、八章；项海飞撰写第三章；邱招丰撰写第四章；王新成撰写第五章；阮婧撰写第六章；林斌撰写第七章．宣明负责全书质量把关和组织编写协调工作．

本教材是编者长期从事教学工作的经验体会和教学改革的标志性成果，希望对高职数学教学改革起到一定的作用．由于编者水平有限，书中难免有不足之处，恳请广大读者对教材提出宝贵的意见和建议，以便修订时加以完善．

编者

2014 年 5 月

目　录

第一章　函数

函数是刻画运动变化中变量相互依赖关系的数学模型,是微积分的主要研究对象.本章首先问题提出,之后将在中学数学已有函数知识的基础上进一步研究函数的有关概念,并了解数学软件 Mathematica 的作用,以及利用这些知识解决专业上的应用问题.

★ 问题提出

1. 生活中的函数问题

手机“套餐”问题

手机资费问题一直是人们关心的热点问题,多少年来资费方案始终没有实质性变化.但是2007 年1 月以来上海、北京、广东等地的移动和联通两大运营商都相继推出了“手机单向收费方案”——各种品牌的“套餐”,手机“套餐”的花样琳琅满目,让人眼花缭乱.人们不禁要问:手机“套餐”究竟优惠几何?

已知北京非套餐的现行资费是月租 50 元,通话资费 0.4 元/min. 北京移动公司全球通“畅听 99 套餐”方案见表 1 - 1.

表 1 - 1

月基本费/(元/月)	包含本地主叫分钟数	超出套餐部分本地主叫资费/(元/min)	本地被叫资费/(元/min)	包含数据业务	17951 国内 IP 长途资费/(元/min)
99	280	0.35	0	10MB GPRS 流量	0.1
139	560	0.25	0	10MB GPRS 流量 + 25 条彩信	0.1
199	1000	0.2	0	50MB GPRS 流量	0.1
299	2000	0.15	0	50MB GPRS 流量	0.1

假设用户只用本地通话,请给出该方案的资费计算方法,并分析说明该方案适应于什么样的用户?

2. 专业中的函数问题

(1) 电压的近似值.

电容器充电达某电压值时为时间的计算原点,此后电容器串联一电阻放电,测定各时刻的电压 u,测量结果见表 1 - 2.

表 1 - 2

时间 t/s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
电压 u/V	100	75	55	40	30	20	15	10	10	5	5

若 u 与 t 的关系为 $u=u_0\mathrm{e}^{-ct}$,其中 u_0, c 未知,求此函数关系,作出该函数的图像,并

预测 $t=8.5\mathrm{s}$ 时，电压的近似值.

(2) 正切机构和正弦机构的位移.

最简单的平面连杆机构由四个构件组成，称为平面四杆机构. 含有两个移动副的四杆机构常称为双滑块机构，两个移动副不相邻的情况如图 1－1 所示.

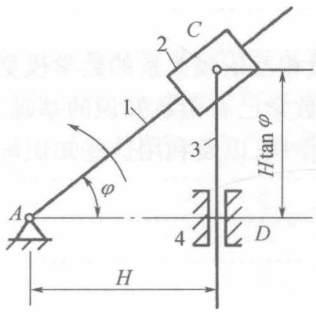

图 1－1

图 1－1 中，从动件 3 的垂直位移与原动件 1 转角 φ 的正切值成正比，故又称为正切机构，位移表达式已标注在图上.

双滑块机构中的两个移动副也可以相邻，其中一个移动副与机架相关联的情况如图 1－2 所示.

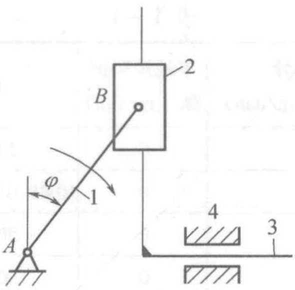

图 1－2

请运用初等函数中的三角函数知识，分析从动件 3 的水平位移与原动件 1 转角 φ 的关系并写出函数表达式.

(3) 钟表问题.

钟表分针 1h 走一圈，时针 1h 走一个整点. 因此，任意两个整点之间的时针与分针都会重合，则时针与分针在 0～12 时内能重合 12 次. 问这 12 次重合的时间各是什么时刻?

(4) 平均综合费用与建楼层次的关系.

某公司以 100 万元购得一块土地，该地可以建造每层 $1000\mathrm{m}^2$ 的楼. 其每平方米平均建筑费用与建筑高度有关，楼房每升高一层，整座楼房每平方米的建筑费用平均提高 25 元. 已知建 5 层时，每平方米的建筑费用为 400 元，试建立每平方米的平均综合费用与建楼层次的函数模型.

★ 数学知识

第一节　函数的概念

一、引例

例1　半径为 r 的圆的面积为

$$S = \pi r^2.$$

随着上式中的半径 r 取定一个值,面积 S 也就取定一个确定的值,而圆周率 π 是定值,因此,在该问题中,r 和 S 都是变量. 当 r 取定某一数值时,则 S 也随之有一个确定的数值与之对应,如 $r=1\text{cm}$ 时,$S\approx 3.14\text{cm}^2$.

例2　气象站要获得一天中气温与时间的关系,可以每间隔一段时间测量一些数据,见表1-3.

表1-3

时刻 t	10:00	10:20	10:40	11:00	11:20	11:40	12:00
气温 T/℃	18	18	18.5	19	20	21	23

当时间 t 在一天范围变化时,气温 T 也随之有一个确定的数值与之对应.

综合上述引例,就其所包含的具体含义而言,有几何的、气象的,不考虑各自的具体含义,可抽象出函数的一般概念.

二、函数定义

定义　设在某一变化过程中存在两个变量 x 和 y,若当变量 x 在某一实数范围 D 内任意取定一个数值时,按照一定的对应法则 f,变量 y 都有唯一确定的值与之对应,则称变量 y 是定义在集合 D 上的变量 x 函数,记作

$$y = f(x),\ x \in D.$$

其中变量 x 称为自变量,变量 y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

对于确定的 $x_0 \in D$,通过对应法则 f,变量 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应,称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作

$$y_0 = y\big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

函数值的集合,称为函数的值域,记号 M.

三、函数的两个要素

函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素.

1. 对应法则

例3　设函数 $f(x)=\sin x^2+\sin^2 x+3x-1$,求 $f(1)$.

解 对应法则f为

$$f(\quad)=\sin(\quad)^2+[\sin(\quad)]^2+3\times(\quad)-1,$$

所以 $$f(1)=\sin(1)^2+[\sin(1)]^2+3\times(1)-1=\sin1+(\sin1)^2+2.$$

计算函数值可采用工具 Mathematica 数学软件.

输入:

```
f[x_]:=Sin[x^2]+Sin[x]^2+3*x-1
f[1]
```

输出:

```
2+Sin[1]+Sin[1]^2
```

2. 定义域

例 4 求函数$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{x}{x+1}$的定义域.

解 要使函数y有意义,必须使$\begin{cases}4-x^2\geqslant0\\x+1\neq0\end{cases}$成立,即

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant2\\x\neq-1\end{cases}$$

这两个不等式的公共解为$-2\leqslant x\leqslant2$且$x\neq-1$,所以函数定义域为$[-2,-1)\cup(-1,2]$.

例 5 设某物体在时刻$t=0$时从高度为h_0处自由落下,自由落体运动关系式为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

求函数s的定义域和值域.

解 对于此类问题,定义域要从实际出发,显然物体从0到h_0满足自由落体运动关系式,所需时间从$t=0$开始到$t=\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$为止,于是定义域$D=\left[0,\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}\right]$,值域$M=[0,h_0]$.

如果两个函数的对应法则和定义域分别相同,则这两个函数视为相同函数.

例 6 判别下列各对函数是否视为相同.

(1) $y_1=\sin^2x+\cos^2x$与$y_2=1$;

(2) $y_1=x$与$y_2=\dfrac{x^2}{x}$.

解 (1)因为对于任意$x\in R$,都有$y_1=\sin^2x+\cos^2x=1$,所以这两个函数的对应法则和定义域相同,即视为相同函数.

(2) 因为y_1的定义域为R,y_2的定义域为$x\neq0$,所以这两个函数不能视为相同函数.

四、函数的表示法

通常函数可用三种不同的形式来表示:公式法、表格法和图像法.

(1) 像引例1一样,利用公式表示函数的方法称为公式法(也称解析法);根据函数解析式的形式不同,函数可分为显函数、隐函数和分段函数三种:

① 显函数：函数 y 由 x 的解析式直接表示. 比如，$y=x^2+1$.

② 隐函数：函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x, y)=0$ 来确定. 比如，$\ln y=\sin(x+y)$.

③ 分段函数：函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析式. 比如，绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=[0,+\infty)$.

采用工具 Mathematica 软件作图.

输入：

```
y=Abs[x];
Plot[y,{x,-3,3}]
```

输出：如图 1－3 所示.

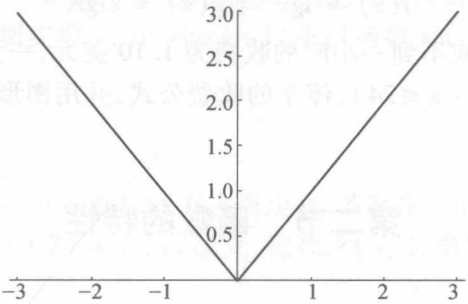

图 1－3

(2) 像引例 2 一样，利用表格表示函数的方法称为表格法.

(3) 利用图像表示函数的方法称为图像法. 比如：

某物资汽车运费规定标准如下：不足 80kg，核定运费 5 元，超过 80kg 的部分每 kg 加收 0.4 元. 用 Mathematica 软件作图，如图 1－4 所示反映函数关系.

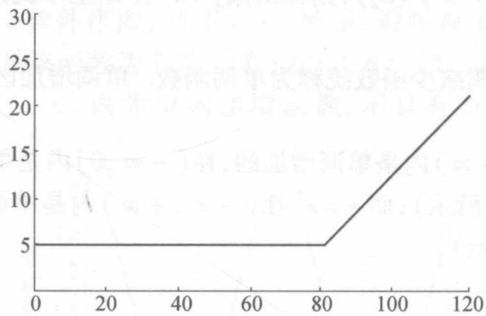

图 1－4

函数的三种表示方法各有优缺点：公式法的优点是简明、全面地揭示了变量之间的关系，不但可以通过函数的解析式求出定义域内任意自变量对应的函数值以及解析式运算等，而且还可以利用解析式研究函数的性态，公式法的缺点是抽象；表格法的优点是便于查找函数值，缺点是能查到的函数值有限；图像法的优点是形象、直观、容易记忆，能直接

形象地表示出函数的变化情况，缺点是粗略，利用函数图形由自变量计算函数值不够准确.

习题1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{x}{x^2-4}+\sqrt{1-3x}$；　(2) $y=\ln(x^2-1)$；　(3) $y=\arcsin(1-x)$；

(4) $y=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ \frac{1}{2}x, 1\leqslant x<3\end{cases}$.

2. 下列函数是否相同？为什么？

$$f(x)=\lg x^2 \text{ 与 } g(x)=2\lg x.$$

3. 某停车场每小时或不到一小时的收费为1.10美元，一天最高的收费为7.25美元，试写出对于 x 小时 $(0<x\leqslant 24)$，停车的收费公式，并用图形表示停车时间与收费的关系.

第二节　函数的特性

一、单调性

定义1　设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 内有定义，对于区间 D 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有：

(1) 如果总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加，D 称为函数 $f(x)$ 的单调增加区间；

(2) 如果总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少，D 称为函数 $f(x)$ 的单调减少区间.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数. 单调增加区间和单调减少区间统称为单调区间.

例如，$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的（用 Mathematica 软件作图，如图1－5所示）；而 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的（用 Mathematica 软件作图，如图1－6所示）.

二、奇偶性

定义2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意 $x\in D$ 时，

(1) 若有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；

(2) 若有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 称为偶函数.

在直角坐标系里，偶函数的图像关于 y 轴对称，例如图1－3，奇函数的图像关于原点对称，例如图1－4.