高級中学課本

代 数

DAISHU

第二册（第一分册）

（試用本）

浙江省中小学教材編輯委員会編
浙江人民出版社

目　　錄

第八章 对数

I 对数的一般性質

§1 引言 目前我国正在进行史无前例的大規模的經济建設，各項工农业生产中，必須提高計算的工作效率，因此，在計算时，不但要求准确无誤，而且要求运算过程簡单，迅速得出結果．下面我們就将討論一种新的計算方法——对数計算．

在我們已經学习过的六种代数运算当中，乘法、除法、乘方和开方这些运算比較加法和减法要繁复得多．特别是当我們需要进行多位数的运算时，更有上面所說的这种感覺．那末怎样能将乘除运算变换为加减运算呢？我們可以借下列 n 与 2^n 的值的表来說明．

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536

例如把表中下面任意两个数相乘，如 32×128，我們只要把 32 与 128 所对上面的数 5 与 7 相加，$5+7=12$，再在表中下面找到与上面 12 相对的数 4096，这 4096 就是 32 与 128 相乘的結果．这是根据同底冪相乘的运算性質．就是

$$32\times128=2^5\times2^7=2^{5+7}=2^{12}=4096.$$

如果把表中下面任意两个数相除，如 $4096\div256$，只要把 4096 与 256 所对上面的数 12 与 8 相减，$12-8=4$，再在表中下面找到与上面 4 相对的数 16，这 16 就是 4096 与 256 相除的結果．这个

道理就是：

$$4096 \div 256 = 2^{12} \div 2^{8} = 2^{12-8} = 2^{4} = 16.$$

同样，如果把表中下面任意一个数乘方、开方，也只要把这个数所对上面的数进行乘法、除法的运算，就能求出它們的結果．这样所有这四种运算（乘、除、乘方、开方），我們都能把原来的繁杂运算，换成比較簡单的运算．对数計算也就是运用这个原理．

对数这門学問是在十七世紀初随着社会生产力发展，对新的計算技术迫切需要而兴起的．那时为了在海洋中航行，須定出船只在大海中的航程、位置、方向等，还有天文上須处理观察行星运动所得的結果等，都需要做数字位数較多的繁杂的計算．对数計算兴起后，解决了有关测量、三角、几何、物理、化学、工程等等科学技术上的繁杂的計算問題．在目前，虽然有了先进的計算工具，但对数計算还是有很高价值的．例如 1958 年全国青年积极分子林平驅，在党的領导与亲切关怀下，利用对数的計算原理，創造了“快速乘除計算图”，节約了計算时間，使工作效率提高了两三倍．

§2. 对数的定义 在§1中，我們已經知道，对数計算就是将各个数变换成同底幂后，再将指数进行計算．这样我們必須先解决这样的一个問題：自变量 x 是什么数值的时候，函数 $y=a^x$ 的值等于 $N(a>0, a\neq 1, N>0)$？例如，自变量 x 是什么数值的时候，$y=2^x$ 的值等于 5？这也就是說，x 是什么数值才能适合于等式 $2^x=5$？

在上一章指数函数中，我們可从函数 $y=2^x$ 的图象（图 7-2）里找出，当 $y=5$ 的时候，$x\approx 2.3$，这就是能够适合于方程 $2^x=5$ 的 x 的近似值．

我們可以証明*，一定有一个唯一的值 $x=b$ 能够使

* 这里省略不講．

$$2^b=5.$$

一般来說，当$a>0$，$a\neq1$，$N>0$的时候，一定有一个唯一的数b，能够滿足等式

$$a^b=N.$$

定义　如果1以外的正数a的冪等于N，那末冪指数b叫做以a为底的N的对数.

例如，如果以4为底，那末：

因为$4^2=16$，　　所以16的对数是2；

因为$4^3=64$，　　所以64的对数是3；

因为$4^1=4$，　　所以4的对数是1；

因为$4^{\frac{1}{2}}=2$，　　所以2的对数是$\frac{1}{2}$；

因为$4^{-1}=\frac{1}{4}$，　　所以$\frac{1}{4}$的对数是-1；

因为$4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，　　所以$\frac{1}{2}$的对数是$-\frac{1}{2}$.

又如，如果以10为底，那末：

因为$10^1=10$，　　所以10的对数是1；

因为$10^2=100$，　　所以100的对数是2；

因为$10^3=1000$，　　所以1000的对数是3；

因为$10^0=1$，　　所以1的对数是0；

因为$10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1$，　　所以0.1的对数是-1；

因为$10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0.01$，　　所以0.01的对数是$-2$.

我們常常用符号“log”表示对数*. 例如，“以4为底16的对数是2”就可以写成下面的形式：

---

*log是拉丁字logarithm的縮写.

$$\log_4 16=2.$$

一般說来，我們可以把“以 a 为底 N 的对数是 b”写成下面的形式：

$$\log_a N=b.$$

log右下角的数a叫做底，N叫做眞数，b 叫做以 a 为底 N的对数.

例如：(1) $5^3=125$，写成：(2) $\log_5 125=3$；

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8, \qquad \log_{\frac{1}{2}} 8=-3.$$

(1) 与(2)两組等式是具有同样关系的，第一組等式能引出第二組等式．反过来第二組等式也能引出第一組等式．第一組叫做指数等式的形式，第二組叫做对数等式的形式．

我們根据对数的定义，可得恆等式．

$$a^{\log_a N}=N.$$

例如　　$2^{\log_2 32}=32$；　$10^{\log_{10} 100}=100$.

我們来看下列問題：

(1) $a^x=N$；　(2) $x^b=N$；　(3) $a^b=x$.

其中都是要从所給的两个数来求第三个数．

例 1　底是 9 的时候，27的对数是什么？

解　設所求的对数是 x，就得

$$\log_9 27=x.$$

根据对数的定义，可以写成：

$$9^x=27.$$

就是

$$(3^2)^x=3^3,$$

$$3^{2x}=3^3.$$

要使相同底数 3 的两个幂相等，必須并且只須它們的指数相

等，因此

$$2x=3,$$

$$\therefore \quad x=\frac{3}{2}.$$

答：底是 9 的时候，27 的对数是 $\frac{3}{2}$。

例 2 底是什么数的时候，64 的对数等于 3？

解 設所求的底是 x，就得

$$\log_x 64=3.$$

根据对数的定义，可以写成：

$$x^3=64,$$

$$\therefore \quad x=\sqrt[3]{64}=4.$$

答：底是 4 的时候，64 的对数等于 3。

例 3 底是 64 的时候，一个数的对数等于 $-\frac{2}{3}$，求这个数。

解 設所求的眞数是 x，就得

$$\log_{64} x=-\frac{2}{3}.$$

根据对数的定义，可以写成：

$$64^{-\frac{2}{3}}=x,$$

$$\therefore \quad x=64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{16}.$$

答：这个数是 $\frac{1}{16}$。

§3. 对数函数 在等式 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ y>0)$ 里，对于 x 的每一个确定的值，y 都有一个确定的值和它对应，并且反过来，对于 y 的每一个确定的值，x 都有一个确定的值和它对应。如果把 x 当作自变量，那末 y 就成为 x 的函数，这个函数就是在上一章

里所讲的指数函数。如果把 y 当作自变量，那末 x 就成为 y 的函数，由 §2 可以知道，这个函数就是

$$x=\log_a y.$$

函数 $x=\log_a y$ 叫做对数函数，这里 $a>0$, $a\neq 1$, 自变量 $y>0$

很明显，指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $x=\log_a y$ 所表示的 x 和 y 这两个变量間的关系是一样的，所不同的只是：在指数函数 $y=a^x$ 里，x 当作自变量，y 是 x 的函数；在对数函数 $x=\log_a y$ 里，y 当作自变量，x 是 y 的函数。象这样的两个函数叫做**互为反函数**。就是説，对数函数 $x=\log_a y$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，指数函数 $y=a^x$ 是对数函数 $x=\log_a y$ 的反函数。

习惯上，自变量用 x 来表示，函数用 y 来表示，因此，对数函数通常写成：

$$y=\log_a x.$$

§4. 对数函数的图象 我們現在研究下面两个互为反函数的函数：

(1) $y=2^x$; (2) $y=\log_2 x$.

对于第一个函数，我們給 x 以下列的数值：

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

对于第二个函数，我們給 x 以下列的数值：

$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8.$$

分別計算 y 的对应值，列成下面的两个表：

(1) $y=2^x$

x	…………	-3	-2	-1	0	1	2	3	…………
y	…………	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…………

$$(2)\quad y=\log_2 x$$

x	…………	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…………
y	…………	-3	-2	-1	0	1	2	3	…………

用每一个表里的各对相对应的x与y值，对于同一坐标平面作出对应的点，并且分别用一条光滑的曲綫把它們依次連結起来，得出下面的两个图象(图8–1)。

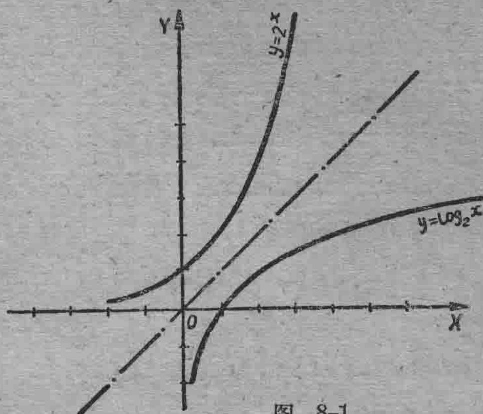

图 8–1

在正函数图象中，点$\left(-3,\frac{1}{8}\right)$，$\left(-2,\frac{1}{4}\right)$，$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$，$(0,1)$，……与反函数图象中的点$\left(\frac{1}{8},-3\right)$，$\left(\frac{1}{4},-2\right)$，$\left(\frac{1}{2},-1\right)$，$(1,0)$，……都分别对称于第一象限与第三象限角的平分綫，也就是說，正函数$y=2^x$与反函数$y=\log_2 x$的图象对称于直綫$y=x$。

利用对数函数的图象，我們就可以找出一个数的对数的近似值。例如，在对数函数$y=\log_2 x$的图象里，我們可以找出$\log_2 6$的近似值是2.6。找的方法是过x軸上横坐标是6的一点作一条垂直于x軸的直綫，和函数$y=\log_2 x$的图象相交，这个交点的縱坐标2.6就是$\log_2 6$的近似值。

§5. 对数函数的性质　从上一节图象中可以看出，指数函数

的每一个性质都对应着对数函数的一定性质。現在将这些性质列成下列对照表。

指数函数	对数函数
1. $a>0$,无論自变量是任何实数,指数函数值都是正的。	1. 負数与0沒有对数。
2. 当 $x=0$ 时,指数函数值等于1.	2. 1的对数是0.
3. $a>1$, 指数 $x>0$, 指数函数值大于1; 指数$x<0$,指数函数值小于1.	3. $a>1$,大于1的眞数,其对数为正;小于1的眞数,其对数为負.
4. $a>1$, 指数函数值随着 x 的增大而增大.	4. $a>1$, 对数随着眞数的增大而增大.
5. 指数 $x=1$ 时,指数函数值等于底.	5. 眞数等于底数时, 其对数是1.

例 1 在式子 $\log_{\frac{7}{4}}0.6=m$ 中,定出 m 的符号.

解 $\because$ $a=\frac{7}{4}>1$, $x=0.6<1$. 根据对数性质 $\therefore$ m 为負数.

例 2 求函数 $\log_a(-x)$ 中 x 的允許值.

解 因为負数与0是沒有对数的, 所以 x 的允許值是小于0的任何实数.

例 3 設 $\log_{(x+4)}(x^2+4x)=1$, 求 x.

解 因为只有眞数等于底数时,它的对数是1, 所以得

$$x+4=x^2+4x.$$

解这个二次方程,得

$$x_1=-4;\quad x_2=1.$$

当 $x_1=-4$ 时，使这个底数等于零，根据对数定义，所以所求的 x 值只是 1。

习 题 一

1．把下列等式写成对数等式的形式：

(1) $2^3=8$;　　(2) $6^2=36$;

(3) $2^4=16$;　　(4) $3^4=81$;

(5) $4^3=64$;　　(6) $2^5=32$;

(7) $2^{-1}=\frac{1}{2}$;　　(8) $3^{-2}=\frac{1}{9}$;

(9) $4^{\frac{1}{2}}=2$;　　(10) $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

2．把下列等式写成指数等式的形式来进行检验：

(1) $\log_3 9=2$;　　(2) $\log_4 16=2$;

(3) $\log_5 125=3$;　　(4) $\log_7 49=2$;

(5) $\log_2 \frac{1}{4}=-2$;　　(6) $\log_2 \frac{1}{8}=-3$;

(7) $\log_3 \frac{1}{81}=-4$;　　(8) $\log_5 \frac{1}{125}=-3$;

(9) $\log_8 2=\frac{1}{3}$;　　(10) $\log_{81}\frac{1}{27}=-\frac{3}{4}$.

3．用对数的形式来表示下列各式里的 x：

(1) $10^x=25$;　　(2) $2^x=12$;

(3) $5^x=6$;　　(4) $4^x=\frac{1}{6}$.

4．求下列各式的值：

(1) $2^{\log_2 8}$;　　(2) $3^{\log_3 9}$;

(3) $2^{\log_2 5}$;　　(4) $3^{\log_3 7}$.

5．(1) 求以 10 为底的 100 的对数；(2) 求以 5 为底的 125 的对数。

6．求：

(1) $\log_6 36$;　　(2) $\log_2 \frac{1}{8}$;

(3) $\log_{10} 0.01$;　　(4) $\log_4 8$;

(5) $\log_{27}\frac{1}{81}$;　　(6) $\log_{\frac{1}{2}}4$;

(7) $\log_{10}(10^{2.4})$;　　(8) $\log_a(a^n)$.

7. 填写下面的表:

x	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
$\log_{10}x$									

8. (1) 底是什么数的时候，16 的对数是 4?

(2) 底是什么数的时候，1000 的对数是 3?

9. 如果:

(1) $\log_x 216=3$;　　(2) $\log_x\frac{1}{81}=4$;

(3) $\log_x\frac{1}{64}=-3$;　　(4) $\log_x\sqrt{8}=\frac{1}{2}$; 求底 x。

10. (1) 底是 7 的时候，什么数的对数是 2?

(2) 底是 4 的时候，什么数的对数是 3?

11. 如果:

(1) $\log_2 x=5$;　　(2) $\log_{10}x=-1$;

(3) $\log_{\frac{1}{2}}x=-3$;　　(4) $\log_{\sqrt{2}}x=4$; 求 x。

12. 求下列各式里的 x:

(1) $\log_x\frac{1}{27}=-2$;　　(2) $\log_8 x=1$;

(3) $\log_{49}\frac{1}{7}=x$;　　(4) $\log_5 x=0$;

(5) $\log_x 0.125=-3$;　　(6) $\log_2\sqrt{2}=x$;

(7) $\log_x\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$;　　(8) $\log_{0.1}x=-1$.

13. 下面的图是函数 $y=\log_2 x$ 的图象，試由 x 的下列各值，确定函数 y 的值(精确到 0.1):

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 5, 6, 7.$$

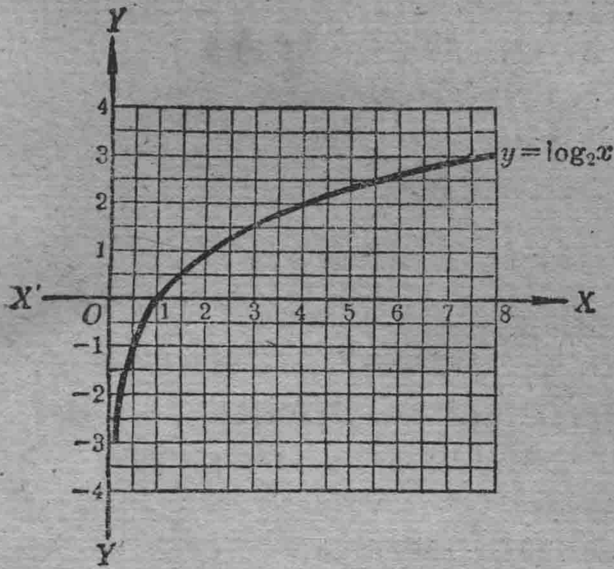

图 8-2

14. 利用上題的图象求下列各式的値(精确到 0.1)：

(1) $\log_2 1$;　　(2) $\log_2 2$;

(3) $\log_2 3$;　　(4) $\log_2 4$;

(5) $\log_2 5\frac{1}{2}$;　　(6) $\log_2 7.5$;

(7) $\log_2 0.5$;　　(8) $\log_2 \frac{1}{4}$.

15. 設 x 取下列各值：

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
$\log_3 x$						
$\log_{\frac{1}{3}} x$						

試对于同一坐标軸作函数 $y=\log_3 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象，并且写出这两

个函数的共同的性質和不同的性質。

16. 求下列函数中自变量 x 的允許值：

(1) $y=\log_a(1-x)$；　　(2) $y=\log_a(1+x)$；

(3) $y=\log_a(1+x^2)$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\log_a x}$。

17. 求下列 x 的数値范圍：

(1) $\log_x a>\log_x(a-1)$；　　(2) $\log_{(2x-1)}(3x-2)$。

18. 比較下列每一組里两个对数的大小：

(1) $\log_{10}6$ 和 $\log_{10}8$；　　(2) $\log_7\dfrac{1}{9}$ 和 $\log_7\dfrac{1}{10}$；

(3) $\log_3 0.083$ 和 $\log_3\dfrac{1}{12}$；　　(4) $\log_2\sqrt{5}$ 和 $\log_2\sqrt{7}$。

19. 指出下列对数各在哪两个連續整数中間：

(1) $\log_2 7$；　　(2) $\log_{10}27$；

(3) $\log_{10}0.46$；　　(4) $\log_2\dfrac{1}{5}$。

20. 比較下列每一組里两个对数的大小：

(1) $\log_8 9$ 和 $\log_9 8$；　　(2) $\log_4 1$ 和 $\log_5 1$；

(3) $\log_2\dfrac{2}{3}$ 和 $\log_4\dfrac{4}{3}$；　　(4) $\log_5 5$ 和 $\log_6 6$。

21. 計算：

(1) $2\log_5 25+3\log_2 64-8\log_{10}1$；

(2) $\log_2(\log_2 16)$；　　(3) $5\times 3^{\log_3 2}$；

(4) $5^{\log_5 8+1}$；　　(5) $3^{1-\log_3 7}$。

22. 用对数的形式来表示下列各式中的 x：

(1) $1-3\times 10^x=0$；　　(2) $\dfrac{2^x-7}{5}=\dfrac{14-2\times 2^x}{3}$。

23. 求下列各式中的 x：

(1) $2\log_3 x=3\log_3 x-3$；　　(2) $6\log_2 x-\log_7 49=2\log_8 x$；

(3) $(\log_{10}x)^2-3\log_{10}x+2=0$；

(4) $(\log_2 x)^2-\log_2 x=0$。

§6. 积、商、幂、方根的对数

(1) 正因数的积的对数等于各个因数的对数的和。

設 $N_1>0$, $N_2>0$, 那末

$$N_1=a^{\log_a N_1},\quad N_2=a^{\log_a N_2}.$$

$$\therefore\quad N_1\cdot N_2=a^{\log_a N_1}\cdot a^{\log_a N_2}$$

$$=a^{\log_a N_1+\log_a N_2}.$$

根据对数的定义,可以得出:

$$\log_a(N_1\cdot N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2.$$

因为同底数的冪相乘,不論有多少个因数,都是把指数相加,所以上面的証明可以推广到若干个正因数的积.就是說,

$$\log_a(N_1\cdot N_2\cdot\cdots\cdots\cdot N_k)=\log_a N_1+\log_a N_2+\cdots\cdots+\log_a N_k.$$

(2) **两个正数的商的对数等于被除数的对数减去除数的对数.**

設 $N_1>0$, $N_2>0$, 那末

$$N_1=a^{\log_a N_1},\quad N_2=a^{\log_a N_2}.$$

$$\therefore\quad \frac{N_1}{N_2}=\frac{a^{\log_a N_1}}{a^{\log_a N_2}}=a^{\log_a N_1-\log_a N_2}.$$

根据对数的定义,可以得出:

$$\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right)=\log_a N_1-\log_a N_2.$$

(3) **正数的冪的对数等于冪的底数的对数乘以冪的指数.**

設 $N>O$, 那末

$$N=a^{\log_a N},$$

$$\therefore\quad N^n=(a^{\log_a N})^n=a^{n\cdot\log_a N}.$$

根据对数的定义,可以得出:

$$\log_a(N^n)=n\cdot\log_a N.$$

(4) **正数的算术根的对数等于被开方数的对数除以根指数.**

因为 $N>0$ 和 $\sqrt[n]{N}=N^{\frac{1}{n}}$, 所以由(3)可以得出:

$$\log_a \sqrt[n]{N} = \log_a N^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a N.$$

$$\therefore \quad \log_a \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_a N.$$

§7. **取式子的对数** 根据上节所講的四个性質，就可以把任何单項式的对数，用組成它的那些数的对数表示出来，这叫做取式子的对数。目的是为了进行比較簡单的运算。

例 1 設 $x=\frac{2.5\times 7^3}{0.28}$，求 $\log_a x$。*

解 $\log_a x = \log_a \frac{2.5\times 7^3}{0.28}$

$$= \log_a (2.5\times 7^3) - \log_a 0.28$$

$$= \log_a 2.5 + \log_a 7^3 - \log_a 0.28$$

$$= \log_a 2.5 + 3\log_a 7 - \log_a 0.28.$$

例 2 設 $x=\frac{a\sqrt[3]{b}}{c^2\sqrt[3]{d^2}}$，求 $\log_n x$。

解 $\log_n x = \log_n \frac{a\sqrt[3]{b}}{c^2\sqrt[3]{d^2}}$

$$= \log_n (a\sqrt[3]{b}) - \log_n (c^2\sqrt[3]{d^2})$$

$$= \log_n a + \log_n \sqrt[3]{b} - \log_n c^2 - \log_n \sqrt[3]{d^2}$$

$$= \log_n a + \frac{1}{3}\log_n b - 2\log_n c - \frac{2}{3}\log_n d.$$

例 3 設 $y=\frac{(a-b)^3\cdot\sqrt{c}}{\sqrt[5]{(a+b)^2\cdot d^3}}$，求 $\log_x y$。

解 $\log_x y = \log_x \frac{(a-b)^3\cdot\sqrt{c}}{\sqrt[5]{(a+b)^2\cdot d^3}}$

$$= \log_x [(a-b)^3\cdot\sqrt{c}] - \log_x \sqrt[5]{(a+b)^2\cdot d^3}$$

---

* 在这里对数的底是不等于1的任意正数。

$$=\log_x(a-b)^3+\log_x\sqrt{c}-\frac{1}{5}\log_x[(a+b)^2\cdot d^3]$$

$$=3\log_x(a-b)+\frac{1}{2}\log_x c-\frac{2}{5}\log_x(a+b)-\frac{3}{5}\log_x d.$$

§8. 从式子的对数求原式 在解某些問題的时候，必須进行与取式子的对数相反的变换，就是从一个式子的对数求出这个原式来，这叫做从式子的对数求原式。它是根据 §6 中四个性质反过来应用，就是：

(1) $\log_a N_1+\log_a N_2+\cdots+\log_a N_k=\log_a(N_1N_2\cdots\cdots N_k)$；

(2) $\log_a N_1-\log_a N_2=\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right)$；

(3) $n\cdot\log_a N=\log_a(N^n)$；

(4) $\frac{1}{n}\log_a N=\log_a\sqrt[n]{N}$.（$n$ 是大于 1 的整数）

以上 $N_1, N_2, \cdots\cdots, N$ 都为正数.

例 1 已知 $\log_{10}x=\log_{10}a+\log_{10}b-3\log_{10}c$，求 x.

解 $\log_{10}x=\log_{10}a+\log_{10}b-3\log_{10}c$

$$=\log_{10}a+\log_{10}b-\log_{10}c^3$$

$$=\log_{10}\frac{ab}{c^3}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{ab}{c^3}.$$

例 2 已知 $\log_a x=\frac{1}{2}\log_a(m-n)-\frac{1}{3}\log_a(m+n)$，求証：

$$x=\frac{\sqrt{m-n}}{\sqrt[3]{m+n}}.$$

証 $\log_a x=\frac{1}{2}\log_a(m-n)-\frac{1}{3}\log_a(m+n)$

$$=\log_a\sqrt{m-n}-\log_a\sqrt[3]{m+n}$$

$$=\log_a\frac{\sqrt{m-n}}{\sqrt[3]{m+n}}.$$