

高等工业学校函授教材
(高等教育自学通用)

下册

理 论 力 学

冶金工业出版社

高等工业学校函授教材
(高等教育自学通用)

理论力学

(下 册)

臧剑秋 编著

冶金工业出版社

第三篇 动 力 学

前 言

一、动力学的任务

在运动学前言中曾提到,当物体所受的力系不满足平衡条件时,物体将失去平衡而发生运动状态的变化,因此就产生两个问题:物体按什么样的规律运动?物体为什么会产生这样或那样的运动?前一个问题在运动学中已作阐述,后一问题正是动力学需要研究和解决的问题。因此,动力学是研究物体的机械运动与物体间相互作用之间关系的科学。在动力学里将建立物体运动与作用在其上的力之间的普遍规律。

我们知道,静力学只研究了物体的平衡规律,即研究力的性质以及物体平衡时作用在其上的力必须满足的条件,因此,静力学只研究了力,而没有涉及到运动状态的变化,故静力学又称“平衡力学”。运动学只从几何的角度来描述物体的运动规律,即只研究了物体运动的一些几何特性,因此,运动学只研究了运动而没有涉及到力,故运动学又称“几何运动学”。动力学则要研究运动与力之间的关系,因此,动力学又称“运动力学”。显然,从三者的研究任务可知,静力学和运动学是研究物体机械运动的两个不同的侧面,它们是动力学的基础;而动力学研究物体机械运动的普遍规律,它是静力学与运动学的综合。

动力学知识,在实际工程和其它自然科学领域中都有广泛的应用。特别是近代科学技术的飞速发展,对动力学提出了更高的要求。如现代机器逐步向高速、精密方向发展,建筑结构也愈来愈需要研究动载荷的作用。因此,在设计机器和建筑结构时愈来愈广泛地需要进行动力学计算。又如,近代宇航和火箭技术的发展要求研究宇航的轨道、火箭的反推力以及飞行方向的控制等,这就涉及到行星运行理论、变质量力学以及运动稳定性方面的知识。这些问题在本教材中不可能一一加以研究,但是动力学所建立的

机械运动普遍规律则是研究和解决这些问题的必备的理论基础。

二、动力学两类问题

工程中的动力学问题是非常广泛的，但根据动力学的任务来概括，一般分为两大类。

1. 已知物体的运动规律，求作用在该物体上的力。如确定机器在正常运转时各构件所受的力以及作用在基础上的力；提升钢丝绳的张力；宇航员的超重等等，称为动力学第Ⅰ类问题。

2. 已知物体所受的力，求物体的运动规律。如抛射体运动方程与运行轨道的确定；宇宙速度的确定等等，称为动力学第Ⅱ类问题。

三、动力学的内容

动力学包括三个定律，三个定理，二个原理，二个专题。

动力学的全部内容以几个基本定律为基础，在这个基础上，运用数学演绎的方法，建立几个普遍定理：

动量定理（及质心运动定理）；

动量矩定理（及刚体平面运动微分方程）；

动能定理（及功率方程）。

各个定理进一步从不同的方面阐明了物体运动的某些物理量的变化与力的相应的作用量之间的关系，它们比基本定律具有更普遍的意义。

动力学还讲述两个原理，并以此提出两种方法：

达伦贝尔原理，据此提出动静法，即把动力学问题在形式上变为静力学问题来处理的方法。

虚位移原理，即从功的观点建立系统平衡的普遍原理，从而提供解决系统平衡问题的更一般的方法。

在运动学中讲过点的复合运动，讨论了点对不同坐标系运动之间的关系，与之对应，动力学中也将讨论点对不同坐标系来说，如何建立其运动与力之间的关系，这就是“质点的相对运动微分方程”。

最后，动力学还讨论两个工程应用专题：碰撞与振动。

第十四章 动力学的基本定律

提 要

动力学基本定律，即牛顿定律，是整个动力学的理论基础。

包括

1. 惯性定律；
2. 力与加速度关系定律；
3. 作用与反作用定律。

对于阐述定律时涉及到的一些重要概念（如惯性、质量），以及各定律的实质、内容、适用范围等问题必须深刻理解。

§ 14-1 动力学基本定律

所谓定律，乃是指对客观外界进行大量的观测以及在大量实验的基础上经过概括而总结出的规律性的东西。如开普勒经过长期的观测而发现了行星运动规律；伽利略经过大量的观测和实验而提出了惯性定律、落体定律等，并建立了以观测和实验为出发点的科研方法；牛顿在继承前人成就的基础上，又经过自己的艰苦工作，把动力学的规律总结概括成几个基本定律，于1687年在他的“自然哲学的数学原理”一书中提出，并对整个动力学作了系统的叙述。因此，动力学基本定律又称牛顿定律。

一、第一定律（惯性定律）

如果物体①不受外力的作用，它将永远保持静止或作匀速直线运动。就是说，物体如不受外力作用，则其运动状态将不发生改变，物体这种保持原有运动状态不发生改变的性质，称为惯性，惯性是物体的一种基本属性，故第一定律又称惯性定律。

此定律表明，物体运动状态的千变万化不是凭空产生的，而

① 这里所说的物体均指质点而言。

是与物体之间的相互机械作用（力）密切联系在一起的。物体如不受力，其运动状态不改变；为使物体运动状态发生改变，必须有力的作用。因此，惯性定律定性地表示了物体运动状态的变化与力之间的关系。

第一定律给出了物体惯性的定义并指明物体具有这一普遍属性，而且说明了力是物体机械运动发生变化的原因。

二、第二定律（力与加速度关系定律）

物体^①运动量的变化与它所受的力成正比，而且沿着力的作用方向发生。牛顿提的“运动量”是指物体的质量与速度的乘积 $m\mathbf{V}$ ，即动量，而变化是指随时间的变化。运动量的变化也就是动量对时间的一阶导数。因此，第二定律的数学表达式为

$$\frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \mathbf{F} \quad (14-1)$$

由于工程中大部分的问题，物体的质量是不随时间而变的，且有 $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{a}$ ，所以，第二定律又可以表示为如下形式

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (14-2)$$

即：物体受力作用产生加速度，加速度方向与力的方向相同，加速度的大小与质点质量的乘积等于力的大小。这是在物理学中已熟知的牛顿第二定律的关系式，它表示了质量、力、加速度三者的关系，称为动力学基本方程，它定量地表述了物体运动与力之间的关系。

显然，式（14-2）不适用于质量随时间而变的物体。

从式（14-2）可以看出，如果作用在物体上的力保持不变，则物体的质量与它的加速度成反比，即 m 大， a 就小，物体运动状态的改变就小； m 小， a 就大，物体运动状态的改变就大。另外，如果要求产生一定的加速度，即加速度保持不变，则 m 大，所需要的力 F 也大； m 小，则需要的力 F 也小。这就表明，质量

① 这里所说的物体均指质点而言。

越大越不容易改变运动状态，如要改变，则相应地需要较大的力。所以说，**质量是物体惯性大小的度量**。所以，常常又把由此定律规定的物体的质量称为**惯性质量**。

我们知道，根据牛顿万有引力定律有

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

式中 m_1 与 m_2 分别为两质点的质量， r 为它们之间的距离， f 为万有引力常数。将此公式应用于地面的物体，用 m 表示物体的质量^①， P 表示地球对该物体的引力（即重量^②），得

$$P = f \frac{mM}{R^2}$$

式中 M 与 R 分别表示地球的质量与半径。

设有质量为 m 的质点，在重力作用下，朝地面自由降落（在真空中不计阻力），用 g 表示自由降落的加速度，则根据动力学基本方程有

$$P = mg = f \frac{mM}{R^2}$$

$$\text{即} \quad g = f \frac{M}{R^2} \quad (14-3)$$

可见，在重力场中，自由落体的加速度与落体的质量无关，这一加速度称为**重力加速度**。所以，在真空中，一切物体都以同一加速度降落，这一结论已为伽利略以试验证实。

由于地球是扁球体，地球半径将随着纬度的增加而减小，由式（14-3）看出，物体的重力加速度将随纬度的增加而增加，如

① 这里的质量应指引力质量，在真空中，一切物体都以同一加速度降落的试验事实说明，物体的惯性质量等于它的引力质量。

② 严格讲，由于地球自转的影响，物体的重量并不等于地球对它的引力，参看 § 16-2。

地 点	纬 度	重力加速度值
赤 道	0°	978.039 cm/s ²
上 海	31°12′	979.436 cm/s ²
北 京	39°56′	980.122 cm/s ²
“标 准”	45°	980.665 cm/s ²
哈 尔 滨	46°	980.77 cm/s ²
两 极	±90°	983.215 cm/s ²

根据我国南北各地实测的结果取平均值可取为

$$g = 980 \text{ cm/s}^2$$

或
$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

因为重力加速度 g 的大小随所在地的纬度而改变，所以重量也随物体在地面上的位置不同而改变。

在工程中，由于物体的重量易于测定，所以常用重量来计算质量。

因为
$$P = mg$$

所以
$$m = \frac{P}{g} \quad (14-4)$$

要注意，物体的重量和质量大小有确定的关系，但决不应该把这两个量混淆起来。重量是地球对物体的吸引力，即作用在物体上的重力的大小，它只有在重力场中才有意义，而且它是随地域不同而变的量；而质量则是物体惯性的度量，是物体本身所固有的，在经典力学中是视为与物体运动速度无关的不变的恒量。

三、第三定律（作用与反作用关系定律）

物体之间的作用力与反作用力总是大小相等、方向相反、作用在同一直线上，分别作用在两个互相作用的物体上。这个定律在静力学中已讲过，它说明物体之间的作用力与反作用力总是相互地，成对地出现，它们必然是等值、反向、共线。这一结论不仅在物体平衡时适用，而且也适用于作任何形式运动的物体。这一定律是研究解决系统动力学的依据。

以上就是牛顿三定律，表述了质点在一个力作用下的运动规

律。如质点受多个力作用，其运动规律如何呢？可以按前面静力学讲过的汇交力系合成的办法，求出作用于质点的诸力的合力（ $R = \Sigma F$ ），然后，就可应用牛顿第二定律。因此，以后在提到牛顿第二定律时，作用于质点的力应理解为作用于质点诸力的合力，即

$$ma = R = \Sigma F \quad (14-5)$$

对于第一定律，完全不受外力的质点事实上是不存在的，所谓“不受外力”，应理解为作用于质点的诸力的合力等于零，即诸力相互平衡。

§ 14-2 动力学基本定律的适用范围·惯性坐标系

牛顿定律是十七世纪创立的，由于那时科技水平的限制，人们能观测到的物体运动是有一定局限性的，所以由此而得的定律也有一定的适用范围。

1. 牛顿定律只适用于宏观物体的运动。对于微观粒子运动的规律，牛顿定律是不适用的，而应该用量子力学的理论。

2. 牛顿定律只适用于物体速度远小于光速的情形。当物体速度接近光速时，就必须应用相对论力学的理论。在相对论力学中，空间与时间再也不是孤立的不变的量，而是与物体的速度相关的量。另外，物体质量也不是恒量，而是随着速度而变的。设 m_0 为物体静止时的质量， C 是真空中光的传播速度，则物体以速度 V 运动时的质量是

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

以牛顿定律为基础的力学体系称为经典力学。由于工程中所研究的对象大多是宏观物体，而且物体的速度比起光速来要小得多， $\frac{V^2}{C^2}$ 可以忽略不计，因此，可将空间、时间以及质量看成与物体运动速度无关的量，这表明经典力学足够精确地反映了一般

物体运动的规律，是工程技术的重要理论基础。

3. 牛顿定律只适用于惯性坐标系。根据运动描述的相对性，同一质点的运动对不同的坐标系，其运动特征是不同的，即质点的“静止”、“匀速直线运动”、“速度”、“加速度”等都是随坐标系的选择不同而异的，而力则认为是与坐标系选择无关的，因此，表示力与运动关系的牛顿定律只适用于某种坐标系，我们把牛顿定律能够适用的参考系称为基础坐标系。

对于大部分工程问题，地球本身运动的影响可以忽略不计，而把与地球固联的坐标系视为基础坐标系；对某些必须考虑地球自转影响的工程问题（如洲际导弹的运动规律、宇宙体发射等）可选地球中心为原点、三个坐标轴分别指向三个恒星的坐标系为基础坐标系，叫地心系；对于宇航及天体运动的问题，必须考虑地球公转的影响，这时可选太阳中心为原点、三个坐标轴分别指向三个恒星的坐标系为基础坐标系，叫日心系。

十六章将讲到，牛顿定律在相对于上述基础坐标系作匀速直线运动（即惯性运动）的坐标系中也成立，我们把基础坐标系和相对于它作匀速直线运动的坐标系系统称为惯性坐标系，因此牛顿定律适用于惯性坐标系。

在以后的叙述中，如不特别指明，我们总是采用固联于地球的坐标系作为基础坐标系。

小 结

1. 本章内容在物理中多已学过，容易轻视，但本章所阐明的基本规律及有关概念是整个动力学的基础，因此，必须重视。

2. 了解动力学与静力学、运动学三部分之间的关系，从而对理论力学有个统一完整的概念。了解动力学的任务是研究物体机械运动与作用力之间的关系，从而明确动力学的两类问题：已知运动求力；已知力求运动。

3. 对于基本定律，必须了解其实质、内容、对象及适用范围。

- (1) 实质——表明质点运动的最基本的规律；
 (2) 内容——见课文；
 (3) 对象——适用于质点或平动刚体，不能用于刚体的一般运动；
 (4) 适用范围——惯性坐标系。

复习思考题

1. 动力学的任务是什么？它与静力学及运动学有何区别和联系？
2. 用自己的语言叙述动力学基本定律的内容。
3. 质量的物理意义是什么？它与重量有何区别与联系？在国际单位制中它们的单位是什么？
4. “质点要运动就必须有力的作用”，“不受力的作用质点必然没有运动——即静止”，这两种说法对吗？
5. 人在车中，当突然刹车时，人向前倾倒，根据牛顿定律，是由于人受了一个向前的推力，对吗？
6. 放在完全光滑的水平面上的质点，在力 F 作用下作曲线运动，当力 F 撤除后，质点将如何运动？加速？减速？匀速？直线？曲线？停止？
7. 在图14-1所示装置中物体 A 、 B 分别重 P_1 、 P_2 。设 B 物与固定面

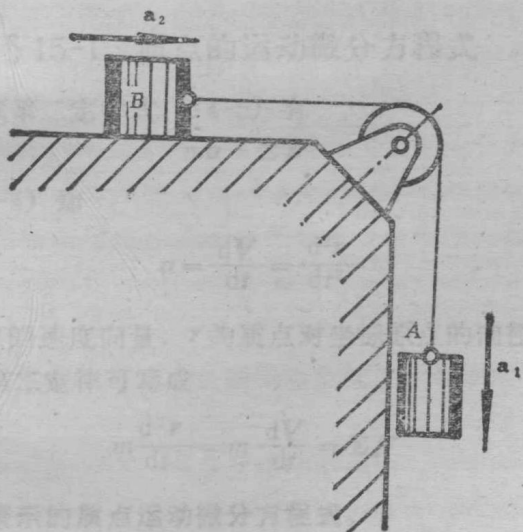


图 14-1

之间是光滑的。整个系统由于重量 P_1 的关系产生加速度。因而，以 B 为研究对象，应用牛顿第二定律，有

$$\frac{P_2}{g} a_2 = P_1$$

对吗？

8. 比较图14-2所示三种不同的载荷情况下重物的加速度。图中重 $P_1 = 200\text{N}$ ，重 $P_2 = 100\text{N}$ ，拉力 $T_1 = 200\text{N}$ ，拉力 $T_2 = 100\text{N}$ 。滑轮质量不计。

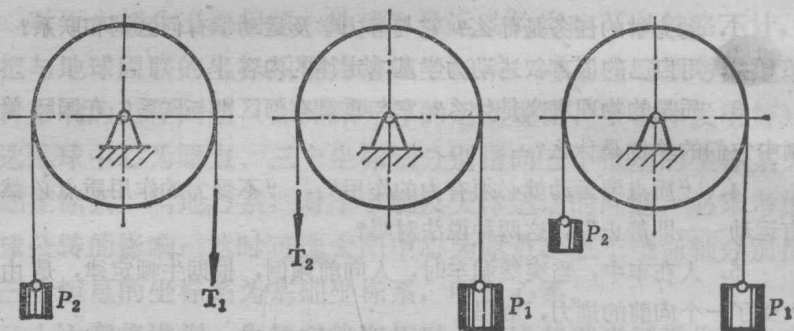


图 14-2

第十五章 质点运动微分方程

提 要

牛顿第二定律建立了质点的加速度与作用在质点上的力之间的关系,在运动学中已建立了加速度与运动方程之间的关系,这样,就可以通过加速度建立运动方程与力之间的关系,从而将牛顿定律表示为微分方程的形式——质点运动微分方程,应用这种方程来解决质点动力学的两类基本问题。

由于描述点的运动的方法有向径法、直角坐标法与自然坐标法,所以质点运动微分方程也有三种形式。

第Ⅰ类问题——已知运动求力的问题的解决将归结为数学上的函数求导过程,一般比较简单。

第Ⅱ类问题——已知力求运动的问题的解决将归结为数学上的函数求积过程,一般比较复杂。要注意当力是各种参量的函数时求积过程的特点。

§ 15-1 质点的运动微分方程式

根据牛顿第二定律式(14-5)有

$$m\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F}$$

又根据式(9-4)知

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

其中 $\mathbf{V}$ 为质点的速度向量, $\mathbf{r}$ 为质点对坐标原点的向径(图15-1)。因此,牛顿第二定律可写成

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \Sigma \mathbf{F} \quad (15-1)$$

此即以向径表示的质点运动微分方程式。

具体解析计算时,可将式(15-1)向任一坐标诸轴上投影。

最常用的有直角坐标和自然坐标形式。

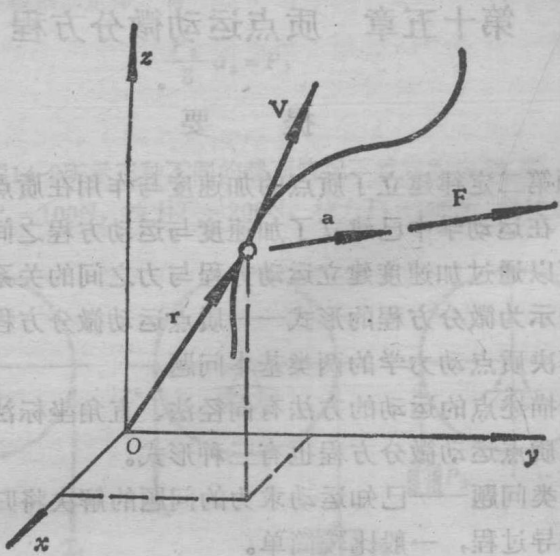


图 15-1

将式 (15-1) 向直角坐标轴上投影，得

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dV_x}{dt} = \Sigma F_x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \frac{dV_y}{dt} = \Sigma F_y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = m \frac{dV_z}{dt} = \Sigma F_z \end{cases} \quad (15-2)$$

此即以直角坐标表示的质点运动微分方程式。式中 x 、 y 、 z 为质点的三个坐标。

对于自然坐标，由运动学第九章知，点的加速度必在密切面内，故副法线方向的加速度为零 ($a_b = 0$)。将式 (15-1) 向自然坐标轴上投影，得

$$\begin{cases} m \frac{d^2 S}{dt^2} = m \frac{dV}{dt} = \Sigma F_r \\ m \frac{V^2}{\rho} = \Sigma F_n \\ \Sigma F_b = 0 \end{cases} \quad (15-3)$$

此即以自然坐标表示的质点运动微分方程式。其中第三式说明作用在质点上的力在副法线方向一定是平衡的。或者说作用在质点上的力系的合力一定在密切面内。

在动点轨迹已知时，特别是圆轨迹，应用自然坐标表示的质点运动微分方程式显然比较方便。

值得注意的是各种形式的运动微分方程式中的力应包括作用在质点上的全部力，其中也包括约束反力。在解题时，对于受约束的质点，可用与静力学相同的方法解除约束，代之相应的约束反力，然后由运动微分方程式求解之。

§ 15-2 质点动力学第 I 类问题——已知运动求力

首先研究质点动力学中的第 I 类问题，已知质点的运动规律求作用在该质点上的力。最一般的情况就是已知质点的运动方程，求作用在质点上的力。显然，这时只要将运动方程对时间连续求两次导数就得到质点的加速度，再根据式(15-2)或式(15-3)求出力在坐标系诸轴上的投影，最后合成之，即得力的大小和方向。因此，质点动力学第 I 类问题的解决将归结为数学上的函数求导过程。通常求导过程是不会碰到多少困难的。如果已知的是质点的速度或加速度，则问题将更简单。

〔例15-1〕 电梯以匀加速度 α 上升。求放在底板上的重为 P 的物体对底板的压力（图15-2）。又设电梯自重为 Q ，求钢绳的拉力。

〔解〕

第一个问题，取重物为研究对象。作用在其上的力有重力 P 及底板的约束反力 N 。设 x 轴正向朝上，将加速度 α 和诸力均向

x 轴投影, 写出其运动微分方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = ma = N - P$$

由于

$$m = \frac{P}{g}$$

故解得

$$N = P \left(1 + \frac{a}{g} \right)$$

重物对底板的压力与 N 等值、反向。

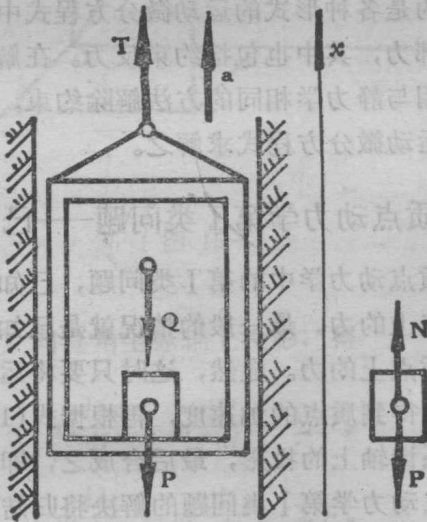


图 15-2

由结果可以看出, 此压力由两部分组成, 第一部分等于物体的重量 P , 这是当电梯静止或作匀速直线运动 (即 $a=0$) 时的压力, 称为静压力; 第二部分为 $\frac{P}{g} \times a$, 它只在物体作加速运动时才产生, 称为附加压力; 而总压力称为动压力。本例中动压力大于静压力, 这种现象称为超重。由于超重, 不仅使底板所受压力

增大,而且也使物体内部的压力增大。此时站在电梯内的人将会感到沉重,超重过大,人将感到很难受,这是在宇航中须解决的一个问题。

如果电梯匀加速度下降,这时加速度 a 朝下(在 x 轴上投影为 $-a$),动压力将变为

$$N = P \left(1 - \frac{a}{g} \right)$$

它小于静压力。当 $a = g$ 时, $N = 0$, 这时重物对底板没有压力,物体各部分间因重力而引起的压力将消失,这时站在电梯内的人,就象悬浮在空中一样,这种现象称为失重。在宇航中也会遇到。

第二个问题,应以电梯及重物为对象。它受重力 P 、 Q 及钢丝绳拉力 T 作用。将加速度和诸力向 x 轴投影,列出运动微分方程

$$\frac{P+Q}{g} \times a = T - P - Q$$

解得 $T = (P+Q) \left(1 + \frac{a}{g} \right)$

显然,钢丝绳拉力大于物体重 $(P+Q)$,设计钢丝绳时必须考虑这一因素。

〔例15-2〕 汽车重 10kN , 以 $V = 7\text{m/s}$ 驶过拱桥顶(图15-3), 桥顶的曲率半径 $\rho = 50\text{m}$ 。求汽车对桥面的压力。

〔解〕

把汽车看成运动质点,在其上作用有重力 P 和桥面对它的反力 N 。由于运动轨迹的特性 ρ 已知,故取自然坐标轴如图。由式(15-3)有

$$m \frac{V^2}{\rho} = P - N$$

将 $m = \frac{P}{g}$ 代入后解得