振动力学基础与 MATLAB应用

鲍文博 白泉 陆海燕 编

清华大学出版社

振动力学基础与MATLAB应用

鲍文博　白泉　陆海燕　编

清华大学出版社

内容简介

本书是为高等院校工科相关专业研究生振动力学基础课程编写的简明教材，全书包括绪论、单自由度系统的自由振动、单自由度系统的强迫振动、两自由度系统的振动、多自由度系统的振动、连续系统的振动和振动分析的近似计算方法等部分。本教材强调基本概念和振动理论的工程应用以及计算机程序在振动问题分析中的运用，每一部分均配备了大量的例题和应用MATLAB语言求解振动问题的算例，并给出全部程序源代码。

本书也可以作为土木工程、机械工程、航空航天工程、能源与动力工程、交通工程等专业本科生的教材和参考书，也可供从事与振动相关工作的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

振动力学基础与MATLAB应用/鲍文博，白泉，陆海燕编. --北京：清华大学出版社，2015

ISBN 978-7-302-37570-8

Ⅰ. ①振… Ⅱ. ①鲍… ②白… ③陆… Ⅲ. ①Matlab软件－应用－工程力学－振动理论－高等学校－教材 Ⅳ. ①TB123-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第174674号

责任编辑：赵益鹏 赵从棉
封面设计：陈国熙
责任校对：刘玉霞
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：19.5 **字 数**：470千字
版 次：2015年6月第1版 **印 次**：2015年6月第1次印刷
印 数：1～2000
定 价：45.00元

产品编号：058468-01

前　言

振动是客观世界最普遍的运动形式之一，在自然世界、工程领域、社会活动和日常生活中，普遍存在着物体往复运动或空间状态往复变化的振动现象。振动力学已经成为机械、航空、土木、水利、动力和交通运输等工程领域，以及力学、声学、电子学、自动控制等学科不可或缺的组成部分和重要的理论基础之一。随着振动理论的不断发展和现代工程对振动分析技术需求的日益增大，振动力学的理论体系不断完善、研究内容不断扩充，形成了内涵丰富、体系完整、结构严谨的学科理论。为了方便教学安排以及不同学科或不同领域对于振动理论的灵活选择，振动理论在内容上可以划分为基础理论和专题理论两个部分，基础部分即经典的线性振动理论，专题部分包括非线性振动、随机振动和振动实验等。本教材是针对工科院校对振动基础理论的必修需求进行规划，在原硕士研究生的“振动理论”课程讲义的基础之上，根据教与学的反复实践，经过精选、提炼和扩充后形成的一本体系完整、内容简洁、方便实用的振动力学基础理论教程，既可作为高等院校工科相关专业研究生振动力学基础课程的简明教材，也可以作为土木工程、机械工程、航空航天工程、水利工程、能源与动力工程、交通工程等专业本科生的教材和参考书，还可供从事相关领域工作的工程技术人员学习参考。

本书最显著的特色是强调振动理论的实际应用。首先，在每一个理论单元都安排了大量的问题及分析与求解实例，为读者自学和深入理解振动理论提供了极大的方便；其次，每一章节均配置了大量的应用 MATLAB 语言求解振动问题的算例，并给出全部程序源代码，为实践理论应用、巩固学习成绩、拓展分析范围和实际工程应用提供了有效的手段。

本书共分为 6 章。前 4 章为线性振动理论的基本内容，安排了单自由度系统的自由振动及强迫振动、两自由度系统的振动和多自由度系统的振动等内容，可作为 32 学时课程的教学内容。第 5 章介绍了连续系统的振动理论，第 6 章介绍了振动分析的近似计算方法，可安排 8 个学时的扩充课时或课外自学。

本书由鲍文博教授、白泉博士和陆海燕博士编写，其中第 1～4 章及第 6 章由鲍文博编写，第 5 章由白泉编写，部分例题和 MATLAB 程序的调试由陆海燕完成，全书由鲍文博主审。清华大学出版社土建事业部聘请相关学科的专家审阅了全书，在此一并致以诚挚的谢意。限于编者水平，书中欠缺和不妥之处在所难免，恳请读者不吝指正。

作　者

2015 年 4 月

目 录

<<< 第0章

绪　论

0.1　振动力学发展简史

振动力学从其概念产生到发展为一门科学理论经历了漫长的时间，包括世界著名科学家在内的无数学者和工程师为此作出了卓越贡献。

人类对振动现象的了解和利用有着漫长的历史，从远古时期已经开始利用振动发声制造各种乐器。人们对于振动问题的研究可以追溯到公元前 6 世纪毕达哥拉斯(Pythagoras)的工作，他通过实验观测得到弦线振动发出的声音与弦线的长度、直径和张力的关系，证明用三条弦发出某一个乐音以及它的第五度音和第八度音时，这三条弦的长度之比为 6∶4∶3。我国古代科学家早在春秋战国时期，便根据弦线发音同长度的关系总结出“三分损益”定律，即将基音弦长分为三等份，减去或增加一份可确定相隔五度音程的各个音，成为中国古代制定音律时所用的生律法。同时期的《庄子·徐无鬼》对共振现象有明确记述：“鼓宫宫动，鼓角角动，音律同矣。”我国 11 世纪宋代科学家沈括，在《梦溪笔谈》中精心设计了一个纸游码共振实验，把一个纸人固定在一根弦上，当弹动和该弦频率成简单整数比的弦时，纸人因所在的弦发生共振而跳跃，这是有史记载最早的共振实验。现代物理科学的奠基人伽利略(Galileo Galilei)对振动问题进行了开创性的研究，17 世纪在其名著《两门新科学的对话》中明确弦线振动频率与其长度、密度和张力的关系，他发现了单摆的等时性并利用落体公式得到摆动周期正比于摆长与重力加速度比的平方根的结论，还从能量的角度讨论摆的周期，后来惠更斯(C. Huvaens)利用几何方法推得摆振动周期的正确公式。梅森(M. Mersenne)在实验基础上系统地总结了弦线振动的频率特性，推断出密度和张力相同且发出谐音的短弦频率。牛顿(I. Newton)在其划时代的著作《自然哲学的数学原理》中建立的动力学原理，使振动问题的动力学研究成为可能，胡克(R. Hooke)于 1678 年发表的弹性定律和牛顿于 1687 年发表的运动定律分别为振动力学的发展奠定了理论基础。

18—19 世纪，是线性振动理论发展和成熟的时期，逐步形成了一门相对独立的学科理论。17 世纪的科学技术发展为振动问题的研究提供了强有力的力学基础和数学工具，由于振动问题最终归结为常微分方程或偏微分方程的求解，所以线性振动理论是与微分方程同步发展的，这个时期的数学家为此作出了重要贡献。欧拉(L. Euler)于 1728 年建立并求解了单摆在有阻尼介质中运动的二阶常微分方程；1739 年，他研究了无阻尼简谐受迫振动，从理论上解释了共振现象；1747 年，他在研究空气中声传播时建立了等刚度弹簧联结等质量质点的多自由度振动系统力学模型，列出运动微分方程并求出精确解，发现系统的振动是各

阶简谐振动叠加的结果。1762 年，拉格朗日(J. L. Lagrange) 在对微小振动深入系统研究的基础上建立了离散振动系统的一般理论，出版了著名论著《分析力学》，标志着离散系统的振动理论已经发展成熟。对于连续振动系统，最早研究的是弦线，其振动理论在 18 世纪已经建立。1746 年，达朗贝尔(J. le R. d'Alemberi)在研究均匀弦线振动时，考虑弦线位移随时间及弦上位置的变化导出描述弦线振动的波动方程并求出行波解。1753 年，丹尼尔·伯努利(D. Bernoulli)用无穷多个模态叠加的方法得到弦线振动的驻波解；1759 年，拉格朗日从驻波解出发推导出行波解，从而在物理上充分理解了均匀弦线的振动规律；但严密的数学证明，直到 1811 年傅里叶(J. B. J. Fourier)提出函数的级数展开理论才得以完成。1762 年欧拉和 1763 年达朗贝尔分别研究了非均匀弦线和重弦线的振动，之后其他连续体的振动问题也相继提出。欧拉和丹尼尔·伯努利于 1744 年和 1751 年分别研究了梁的横向振动，导出了自由、铰支和固定 3 类边界条件下的振形函数与频率方程，当时的研究忽略了截面转动和剪切变形的影响；直到 19 世纪末和 20 世纪初才分别由瑞利(J. W. S. Rayleish)和铁摩辛柯(S. P. Timoshenko)加以补充修正。1759 年欧拉将膜视为两组互相正交的弦而解决了矩形膜的振动问题，但处理圆形膜的尝试未能成功，直到 1829 年泊松(S. D. Poisson)才完全解决了膜振动问题。1789 年，雅格布·伯努利(J. B. Noulli)将板视为两组互相正交的梁导出其运动微分方程。1787 年，克拉德尼(Chladni)对玻璃和金属板振动波节线的实验促进了板和壳振动的研究。1814 年以来，泊松对板的振动进行了系统研究并建立动力学方程，但所建立方程的边界条件尚有缺陷；直到 1850 年，基尔霍夫(G. R. Kirchhoff)引入了符合实际的板变形假说，修正了泊松的错误，并给出圆板的自由振动解，比较完整地解释了克拉尼的实验结果。1821 年，纳维(C. L. Navier)发表了论著《论弹性体的平衡与运动》，最早提出弹性体运动的一般方程；1828 年建立了板的弯曲振动理论，并研究了三维弹性体的振动。1784 年，库仑(C. A. Coulomb)对圆柱扭转振动进行了理论和实验研究，泊松于 1829 年解决了弹性体的扭转振动问题，完整的三维弹性体振动理论由泊松于 1829 年和克莱布什(R. F. A. Clebsch) 于 1862 年分别建立。与此同时，对于受外激励响应的研究也日趋成熟。自从 1807 年托马斯·杨(T. Young)提出了载荷的动力效应，在不到一个世纪里，关于振动物体的激励响应和强迫振动理论基本建立起来。1834 年，杜哈梅(J. M. C. Duhamel)将任意外激励视为一系列冲量激励的叠加，建立了计算强迫振动的普遍公式。1894 年，庞加莱(J. H. Poincaré)基本完成了一般弹性体受迫振动数学理论的建立。

19 世纪以来，随着科学技术的迅猛发展和工业化快速的推进，工程对振动力学的需求日益迫切。航空航天、航海运输和动力机械等新型工程系统规模越来越大、速度越来越高、结构形式越来越复杂，迫切需要振动力学作为设计理论和分析手段，然而经典的线性振动解析手段已经不能满足日益复杂的工程需求，于是各种近似计算方法应运而生。1873 年，瑞利基于动能和势能的分析给出了确定系统基频的近似方法，即瑞利法，这是一种关于多自由度系统基频的上限估算法；1894 年，邓克利(S. Dunkerley)在研究旋转轴的临界转速时从实验结果中导出一种近似计算多圆盘轴横向振动基频的近似方法，即邓克利法，是计算振动系统最小固有频率(即基频)下界的一个经验公式；1909 年，里兹(W. Ritz)发展了瑞利法，他基于最小势能原理建立了瑞利-里兹法，这是一种缩减系统自由度的近似方法，反复使用可以求解一个多自由度系统的多个低阶固有频率，从而把瑞利法推广为求解几个低阶固有频率的近似方法。1915 年，伽辽金(Б. Г. Галёркин)基于加权余量法，对里兹作了进一步的推

广，应用这种方法可以通过方程所对应泛函的变分原理将求解微分方程问题简化成为线性方程组的求解问题，成为求解振动微分方程边值问题的一种重要方法。1898 年，维奈尔(Vianell)在计算压杆的屈曲载荷时提出逐步近似方法；1904 年，斯托德拉(A. Stodola)将该方法推广用于计算轴杆的主频率，发展为振型迭代法。1902 年，法莫(H. Frahm)计算船主轴扭振时提出离散化的思想，相继被霍尔茨(Holzer)等科学家推广应用，形成了一种确定轴系和梁频率的有效方法；1950 年，汤姆孙(W. Thomson)将这种方法最终发展为传递矩阵法。对于现在工程普遍应用的有限单元法，最早可追溯到 20 世纪 40 年代。1943 年，柯朗特(R. Courant)在研究圣维南(St. Venant)的扭转问题时，将应用在三角形区域上定义的分片连续函数和最小能原理相结合，首次运用"单元"法则把微分方程转换成了一组代数方程；1956 年，波音公司的特纳(M. J. Turner)和克拉夫(R. W. Clough)等人分析飞机结构时，将钢架位移法推广应用于弹性力学平面问题，把结构分割成三角形和矩形单元，成功求解了平面应力问题。1960 年，克拉夫在其关于弹性力学平面问题研究的论文中，首次使用"有限元法"这个名称。1965 年，冯康(Y. K. Zheung)发表了论文"基于变分原理的差分格式"，这篇论文是国际学术界承认我国独立发展有限元方法的主要依据。20 世纪 60 年以后，随着计算机和软件的发展，有限元法迅速取代其他近似方法成为复杂工程振动问题近似计算的主要方法，至今有限元理论和分析手段已发展得非常成熟。

19 世纪后期，庞加莱和李雅普诺夫(A. M. Ляпунов)等人开创了非线性振动理论，这是与线性振动力学研究方向不同的新领域，使人们对振动的机制有了新的认识。人类对非线性振动现象的观察可以追溯到 1673 年惠更斯关于单摆的研究，发现了单摆大幅摆动时对等时性的偏离以及两只频率接近时钟的同步化等两类非线性现象。1881—1886 年，庞加莱研究了二阶系统奇点的分类，引入了极限环概念并建立了极限环的存在判据，定义了奇点和极限环的指数，1885 年他还研究了分岔问题。1892 年，李雅普诺夫给出了稳定性的严格定义，并提出了处理稳定性问题的两种方法，这是振动系统定性理论的一个重要方面，为非线性振动定性分析提供了基础。在定量求解非线性振动的近似解析方法方面，1830 年泊松研究单摆振动时提出摄动法的基本思想，但长期项的存在会使该方法失效。1883 年，林滋泰德(A. Lindstedt)把振动频率也按小参数展开，解决了摄动法的久期项问题。1918 年，达芬(G. Duffing)在研究硬弹簧受迫振动时采用谐波平衡和逐次迭代的方法研究了硬弹簧受迫振动。1920 年，范德波尔(van der Pol)在研究电子管非线性振荡时提出了慢变系数法的基本思想，1934 年克雷洛夫(H. M. Крылов)和包戈留包夫(H. H. Боголюбов)将其发展为适用于弱非线性系统的平均法，1947 年又发展为可求任意阶近似的渐近解。1955 年，由米特罗波尔斯基(Ю. A. Митропольский)总结整理，将这种方法推广应用到非定常系统，最终形成 KBM 法。1957 年斯特罗克(P. A. Sturrock)在研究电等离子体非线性效应时，用多个不同尺度描述系统的解从而建立了多尺度法。非线性振动系统除自由振动和受迫振动以外，还广泛存在另一类振动，即自激振动。1945 年卡特莱特(M. L. Cartwright)和李特伍德(J. F. Littlewood)对受迫范德波尔振子的研究，以及莱文森(N. Levison)对一类更简化的模型分析表明，两个不同稳态运动可能具有任意长时间的相同暂态过程，这表明运动具有不可预测性。为解释卡特莱特和李特伍德、莱文森的结论，斯梅尔(S. Smale)提出了马蹄映射的概念，构造了形状类似于马蹄的结构稳定的离散动力系统，对高维结构稳定系统的特征提供了一个具体模型，并说明高维结构稳定系统具有复杂的拓扑结构和动力行为，马蹄映射是具有

无穷多个周期点的结构稳定(或 Ω 稳定)的混沌动力学研究中第一个经典例子。在 20 世纪 60 年代研究的基础上,混沌学的研究开始进入高潮。1963 年,洛伦兹(E. N. Lorenz)在研究地球大气运动中发现了混沌现象"对初始条件的极端敏感性",提出了著名的"蝴蝶效应"。1971 年,科学家在耗散系统中正式地引入了埃依(M. Henon)、洛伦兹等奇异吸引子的概念;1973 年,上田和林千博在研究达芬方程时得到一种混乱、貌似随机且对初始条件极度敏感的数值解,提出了混沌的科学概念。从此,揭开了 20 世纪最重大的发现——混沌运动。

进入 20 世纪以来,航空和航天工程的发展对振动力学提出了更高要求,诸如大气湍流引起的飞机颤振、喷气噪声导致飞行器表面结构的声疲劳、火箭运载工具有效负载的可靠性等工程问题包含了大量的随机因素,前述确定性的力学模型已经无法满足这些工程的精确分析和设计要求。工程发展的需要促使人们用概率与统计方法研究承受随机载荷作用的机械与结构系统的稳定性、响应、识别及可靠性,从而形成了随机振动学科。1944 年,莱斯(Rice)首先在通信领域使用随机过程来处理信号中的噪声,促使人们很快地认识到随机过程理论将会在航天和导弹系统以及其他结构、机械、电子系统中有广泛应用,大批科技人员开始研究在随机振动环境下如何保证结构或机电系统具有最大的可靠性。1959 年和 1963 年,美国就随机振动的数学理论、结构在随机载荷下的响应、随机振动模拟试验、随机振动可靠性等方面的研究进展,两次在麻省理工学院举行国际性随机振动报告会,掀起了随机振动研究的热潮。但由于数据的庞大和处理上的烦琐,并受到当时计算手段的限制,这个时期及其之前大量的随机振动研究还停留在理论和概念上。20 世纪 60 年代中后期,随着计算技术与大规模集成电路的迅速发展,信号与信息的处理技术进入到了一个新的阶段,使得宇航、海运、车辆、建筑、结构、机构等领域大量的随机振动问题得到迅速有效的分析,随机振动学科成长为现代应用力学的一个重要分支。

0.2 振动力学的基本概念

0.2.1 振动的基本物理量

在物理学中,我们把一个物体相对于另一个物体位置的变化称为机械运动。**振动**(vibration)也是一种机械运动,它是指物体围绕某一平衡位置所作的往复运动,是机械运动的一种特殊形式,所以也称为**机械振动**(mechanical vibration)。

与其他机械运动形式一样,振动也用位移、速度、加速度等物理量来描述振动物体随时间的变化规律。显然,振动物体的运动规律可以用时间函数来描述,如振动物体的位移运动可以表示为

$$x = x(t) \qquad (0.2.1)$$

式中 t 为时间、x 为随时间变化的位移。如果以 t 为横坐标、x 为纵坐标作图,则可以得到振动物体的位移随时间变化的曲线,

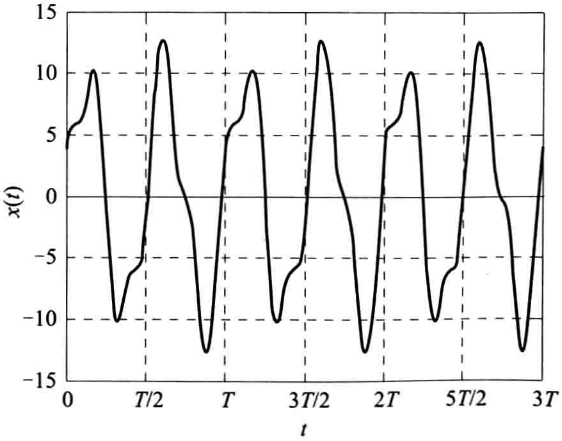

图 0.2.1 位移时程

称为**位移时程曲线**(time history curve of displacement),如图 0.2.1 所示。

如果振动物体在相等的时间间隔内作往复运动,称为**周期运动**(periodic motion),往复一次运动所需的时间间隔即物体完成一次振动所占用的时间长度 T 称为**周期**(periodic),单位一般以秒(s)计。周期振动每经过一个周期后,又重复前一周期中的全部过程,周而复始形成整个振动过程。周期振动可用时间的周期性函数表达为

$$x=x(t)=x(t+nT),\quad n=1,2,3,\cdots \tag{0.2.2}$$

物体在单位时间内周期振动的次数称为**频率**(frequency),显然它是周期的倒数。频率通常以 f 表示,单位以每秒次(1/s)或赫兹(Hz)计

$$f=1/T \tag{0.2.3}$$

最简单的周期振动是**简谐振动**(simple harmonic vibration),任何周期振动都可以分解为不同阶次简谐振动的叠加运动,所以简谐振动在振动理论中具有重要意义。简谐振动可以用正弦或余弦函数表示为

$$x(t)=X\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{0.2.4}$$

式中 X 为振动物体离开静平衡位置的最大距离,称为**振幅**(amplitude);ω 为描述振动周期变化快慢的物理量,称为振动频率。由于简谐振动可以用旋转矢量来模拟(0.2.2 节),所以其振动频率及其周期可以圆周旋转的概念来描述。设想当物体以角速度 ω 绕圆周旋转时,每旋转一周即完成一个周期运动,其所占用的时间即为周期 T。显然有关系式

$$T=2\pi/\omega \tag{0.2.5}$$

由于上述周期从绕圆周旋转的概念引出,故又称之为**圆周期**(circular periodic)T,单位仍为秒(s)。圆周期 T 对应的频率 ω 称为**圆频率**(circular frequency),可见有如下关系:

$$\omega=2\pi/T \tag{0.2.6}$$

显然圆频率等于角速度,单位为每秒弧度(rad/s)。

在式(0.2.4)中的 ωt($\omega t=\theta$)表示的是绕圆周旋转矢量 t 时刻的角度,称为**相位角**(phase angle);而 φ_0 为 $t=0$ 时刻的初始相位角,简称为**初相位角**(initial phase angle),二者单位均为弧度(rad)。

我们在分析振动现象时涉及到的机械部件、工程结构等研究对象称为**振动系统**(vibration systems)。构成系统的基本要素是惯性元件(质量)和弹性元件(弹簧),实际工程系统中还有阻尼元件。一个系统所以产生振动,除了自身具备一定的条件外,还必须受到外界的作用。我们把外界的这种作用称为**激励**(excitation),系统在外界作用下引起的振动称为振动系统对激励的**响应**(response)。激励可以是力,也可以是位移、速度或加速度等,激励通常是随时间变化的函数,如初始扰动、过程激励等外界对于系统的作用。响应是系统在激励作用下产生的运动及其状态,可以用位移、速度和加速度等运动参数描述,也可以用内力或能量表示,但在振动力学中不加说明时通常是用前者来表述振动系统对激励的响应。此外,任何振动系统的振幅和初始相位,均由该系统的初始状态确定。我们把振动系统在运动初始时刻(一般为 $t=0$ 时刻)的位移、速度或加速度等统称为**初始条件**(initial conditions)。

0.2.2 简谐振动及其表示法

1. 简谐振动的运动参量及特征

简谐振动是指系统的运动参量(位移、速度、加速度等)按时间的正弦或余弦函数规律变化的振动,是最简单而又最重要的一种周期振动。如使用余弦函数表达,则简谐振动的位移数学表达式为

$$x(t)=X\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{0.2.7a}$$

式中的振幅和初相位均由初始条件确定。对位移关于时间求一阶导数和二阶导数,分别得到简谐振动的速度和加速度表达式

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-X\omega\sin(\omega t+\varphi_0)=X\omega\cos\left[(\omega t+\varphi_0)+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-X\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)=X\omega^2\cos[(\omega t+\varphi_0)+\pi] \tag{0.2.7b}$$

比较以上三式,不难看出简谐振动有以下运动学特征:

(1) 简谐振动的速度、加速度也是简谐函数,且与位移函数(简谐函数)具有相同的频率;

(2) 速度的相位较位移的相位超前 $\pi/2$,加速度相位较位移相位超前 π;

(3) 加速度与位移恒成正比而方向相反,比例系数为圆频率的平方。

简谐振动的位移、速度和加速度时程曲线如图 0.2.2 所示。

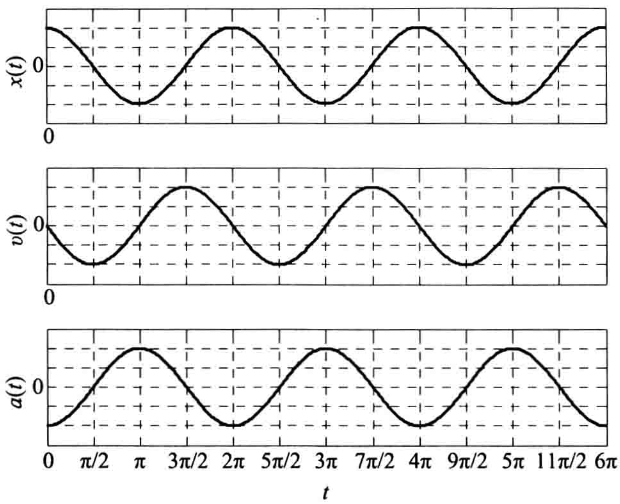

图 0.2.2 简谐振动的位移、速度和加速度时程曲线

2. 简谐振动的矢量表示法

简谐振动可以用旋转的矢量在坐标上的投影来表示。如图 0.2.3 所示,矢量$\overrightarrow{OP}$以等角速度逆时针旋转,其模为 A;矢量起始位置与水平轴夹角为 φ_0,任意时刻与水平轴夹角为 $\omega t+\varphi_0$。此时,旋转矢量在坐标上的投影为简谐函数,如在纵坐标上的投影为

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0) \tag{0.2.8a}$$

而在水平坐标上的投影为

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{0.2.8b}$$

与简谐振动方程(0.2.7a)比较可见，旋转矢量的模 A 正是简谐振动的振幅 X，旋转矢量的角速度是简谐振动的圆频率 ω，旋转矢量与水平轮的夹角是简谐振动的相位角 $\omega t+\varphi_0$；$t=0$ 时旋转矢量与水平轴的夹角为简谐振动的初相位角 φ_0。可见，二者具有一一对应的关系，所以旋转矢量可用来表述简谐振动。

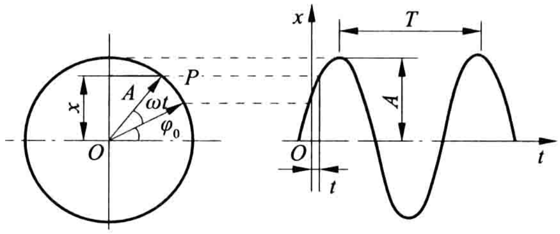

图 0.2.3　简谐振动的矢量表示法

3. 简谐振动的复数表示法

简谐振动也可以用复数表示，如图 0.2.4 所示。

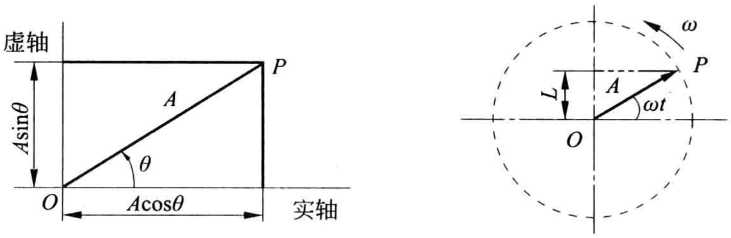

图 0.2.4　简谐振动的复数表示法

图 0.2.4(a)所示为一复矢量 $\overrightarrow{OP}$，其模为 A，与水平实轴夹角即辐角为 θ。矢量 $\overrightarrow{OP}$ 在实轴与虚轴上的投影分别为 $A\cos\theta$ 与 $A\sin\theta$，则复矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的复数表达式为

$$Z=A(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{0.2.9a}$$

可见，复矢量的虚部和实部均为简谐函数，即

$$x=\begin{cases}\mathrm{Re}(Z)=A\cos\theta\\ \mathrm{Im}(Z)=A\sin\theta\end{cases} \tag{0.2.9b}$$

因此，一个复矢量的虚部或实部可以用来描述简谐振动。复矢量 A 的模代表了简谐振动的振幅 X，辐角 θ 与简谐振动的相位角($\omega t+\varphi_0$)相对应，复矢量在复平面的实轴或者虚轴上的投影分别代表余弦或正弦简谐振动。

如果假想复矢量 $\overrightarrow{OP}$ 以等角速度 ω 逆时针旋转，矢量起始位置与实轴夹角为 φ_0，任意时刻与水平轴夹角为 $\theta=\omega t+\varphi_0$，如图 0.2.4(b)所示，此时，复矢量仍由式(0.2.9a)表达，而辐角为

$$\theta=\omega t+\varphi_0 \tag{0.2.9c}$$

根据欧拉公式

$$Z=A(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{0.2.10}$$

简谐振动可用复数表示为

$$x=\begin{cases}\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=A\cos\theta\\ \mathrm{Im}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=A\sin\theta\end{cases} \tag{0.2.11}$$

$$\theta=\omega t+\varphi_0$$

为方便起见，在振动分析中通常将式(0.2.10)中的虚部或实部符号省略，这样简谐振动的复数表达式可写成

$$x=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{0.2.12a}$$

将辐角表达式代入，变为

$$x=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_0)}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=\overline{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{0.2.12b}$$

式中$\overline{A}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$称为复振幅。

复变函数以指数形式运算，通常比较简便。假设已知两个复变函数为

$$Z_1=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\qquad Z_2=A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \tag{0.2.13}$$

则这两个复变函数的乘积、商和乘方法则如下：

$$\begin{cases}Z_1Z_2=A_1A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}\\ \dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{A_1}{A_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\\ (Z)^n=A^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\end{cases} \tag{0.2.14}$$

简谐振动若采用复数指数的表达形式，通常会给分析运算带来极大的方便。因此，在振动力学的理论分析中，经常采用复数表示法。

0.2.3 振动的分类

振动的形式多种多样，可以从不同角度或研究的侧重点入手加以分类。以下从6个方面对振动类型进行归类。

1. 按激励特性分类

(1) 确定性振动

如果一个系统的物理特性是确定性的，受到的激励也是确定性的，则该系统的响应也一定是确定性的，相应的振动称为**确定性振动**(deterministic vibration)。所谓确定性激励是指其大小及变化规律可以用时间的确定性函数进行表述，常见的有周期激励和冲击激励。

(2) 随机振动

如果一个系统所受激励是随机的，则该系统的响应也一定是随机的，相应的振动称为**随机振动**(random vibration)。所谓随机激励是指其大小及变化无一定规律，不能用时间的确定性函数进行描述，其激励作用事先无法预测，如阵风、地震、波浪等。但随机激励及其响应具有统计规律，可以使用概率统计理论来分析。

2. 按振动系统的物理特性分类

(1) 线性振动

振动系统的质量恒定，阻尼力和弹性恢复力分别与速度和位移呈线性关系，该系统的运

动能够用常系数线性微分方程来描述，这样的系统称为**线性系统**(linear system)，线性系统在确定性激励下产生的振动称为**线性振动**(linear vibration)。

(2) 非线性振动

振动系统的质量、阻尼力或弹性恢复力等物理量具有非线性性质，该系统的运动只能用非线性微分方程来表述，这样的振动称为**非线性振动**(nonlinear vibration)。

3. 按振动的周期特性分

(1) 周期振动

振动系统的位移、速度、加速度等运动参量，在相等的时间间隔内作周期变化，其运动规律可以表述为周期函数 $x(t)=x(t+T)$(T 为周期)，这样的振动称为**周期振动**(periodic vibration)。可以用简单正弦函数或余弦函数来描述的**简谐振动**(simple harmonic vibration)，就属于典型的周期性振动。

(2) 非周期振动

振动系统的物理量不随时间作周期性的变化，即其运动没有周期性，这样的振动称为**非周期振动**(nonperiodic vibration)。大多数振动都是非周期的，其中瞬态振动为典型的非周期振动。

4. 按激励类型分类

(1) 自由振动

系统受到初始激励后不再受激励作用，仅靠其本身的弹性恢复力自主振动，这种在给定的初始位移或初始速度激励下产生的振动称为**自由振动**(free vibration)，自由振动的特性仅取决于系统本身的质量、刚度和阻尼等固有的物理特性。

(2) 受迫振动

系统在外界持续的激振作用下激发的振动，称为**受迫振动**(forced vibration)或称为**强迫振动**，其振动状态除取决于系统本身的物理特性外，还与激振扰力特性有关。

(3) 自激振动

有的非线性系统具有非振荡性能源和反馈特性，所受激励受到振动系统本身的控制，在适当的反馈作用下将自动地激起稳定的振动，这样的振动称为**自激振动**(self-excited vibration)。但是，一旦系统的振动被抑制，激励也将随之消失。

5. 按振动系统的自由度数目分类

(1) 单自由度系统的振动

系统在振动过程中任意瞬时的几何位置只需要一个独立坐标来描述，这样的振动系统称为**单自由度系统**(systems with one degree of freedom)，其振动即称为单自由度系统的振动。

(2) 多自由度系统的振动

系统在振动过程中任意瞬时的几何位置需用多个独立坐标才能确定，这样的振动系统称为**多自由度系统**(systems with multiple degrees of freedom)，其振动即称为多自由度系统的振动。

(3) 无限多自由度

系统在振动过程中任何瞬时的几何位置均需要无限多个独立坐标来确定，这样的振动系统称为**无限多自由度系统**(systems with infinite degrees of freedom)或**连续体系统**(continuous system)，其振动即称为无限多自由度系统的振动。