

高等学校教学用书

初等代数专门教程

C. II. 諾洼塞洛夫著

人民教育出版社

高等学校教学用书



初等代数专门教程

G. И. 諾窪塞洛夫著
趙慈庚等譯

人民教育出版社

本書系根据苏联“苏维埃科学”出版社（Советская Наука）出版的諾窪塞洛夫（С. И. Новоселов）著“初等代数專門教程”（Специальный курс элементарной алгебры,）1954年第三版譯出的。原書經苏联文化部高等教育署审定为师范学院教科書。

本書由北京师范大学数学系赵慈庚、董延闈、蔣鐸、严士健、郝炳新、孙永生、袁兆鼎譯为中文。此書可以作为我国师范学院数学系初等代数复習及研究的課本或参考書，对于中学数学教师也是很好的参考書。

本书原由高等教育出版社出版。自1960年4月1日起，高等教育出版社奉命与人民教育出版社合并，統称“人民教育出版社”。因此本书今后用人民教育出版社名义繼續印行。

初 等 代 数 专 門 教 程

С. И. 諾窪塞洛夫著

赵慈庚等譯

人民教育出版社出版 高等学校数学用書編輯部
北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版业營業許可証出字第2号）

京华印书局印装 新华书店发行

統一書号 13010·855 开本 850×1168 1/32 印张 18⁵/16 字数 525,000 印数 00001—15,000
1956年10月上册第1版（53000册）—1957年6月下册第1版（33500册）
1960年6月合訂本第1版 1960年6月北京第1次印刷 定价（6）¥1.70

序

這本書打算作為师范学院物理数学系初等数学專門教程中“代数”一科的教科書。書中包括該科教学大綱所規定的一切題材。

师范学院學生在初等数学（作為專門科目之一）上應下的工夫，並不限於學習教学大綱所規定的“專門教程”。数学教学法與教育實習的融匯貫通以及專題討論的課業，若非深入地研究初等数学便無意義。這是顯而易見的，因為未來的教師必須完好地了解在师范学院畢業後他所教的那些科目。

所說的這些情況，決定了本書的結構，除了數論已由教学大綱列入“算術”一科，而應該在這一科的教科書中講授外，凡是中學代数各章節的一切概念都要在這裡作一系統的講述。

师范学院設置初等数学一科的時候，可能發生兩種同樣是不許可的極端。

第一種極端在於使初等数学脫離中學的需要。如此勢必在“初等”数学里（按簡略的方式）講述一些要在“高等”数学里學習的東西，例如把“高等”数学里因為某種緣故未曾列入相應課程的許多問題拿來歸初等数学負擔，或是將初等数学改為毫無系統的文集，只搜集某些精緻“数学短文”與“精巧”的問題。

第二種極端在於重述中學数学課程，而科学思想水准比中學高得有限。

著者在本書里竭力避免上述的兩種極端。

於是我們認為以下各點對於师范專業初等代数教程是必要的。

1. 初等代数里有許多重要的理論問題，在中学課程里不能作相当完备而且严格的解釋，在高等数学里又認為它們是已知的；对于这样的問題，本教程必須給出科学的論証。

例如方程及方程組(或不等式)的等价性的一般理論，便屬这种問題之列。

2. 对于初等数学里广泛运用的許多方法，必須加以論証。

例如，高等代数里講了綫性方程組的一般研究方法，并且对于它們的解建立了一般的公式(所有這些，未来的教师当然應該知道)，但是在實踐当中(也不只在中学)，具体的綫性方程組的解与討論，常常能用中学里所用的“初等”方法很簡單地作出。显然這些方法的科学根据是教师應該知道的。

3. 初等代数必須訓練学生能够直接根据所論对象的定义和它的已知性質用“直接方法”(在这里無疑是适当的)完成数学論証的本領。

我們十分怀疑，沒有这种本領而能够順利地运用近代的科学方法。例如微分法的定理与公式，对于“不懂得”函数 x^2 的最小值，或是对于建立簡單不等式的必要也無知的人未必有用。

尤其在培养直接討論函数的技能上，初等数学有着很大的用处。

4. 初等代数專門教程應該养成做恒等變換的切实技能。

以为恒等变形是“缺少理論性的”这一种輕視的态度應該受到严格的批判。养成切实的数学技能是中学数学教学任务之一。关于获得应有技能的必要性，在联共(布)中央关于中学的历史性的決議中已經說过。事实上，認為一个人只要“了解概念”而实际技能是無关紧要的这种說法，至少也是輕率的。由此看来，中学教师显然必須在做恒等變換上掌握一定的技巧。

5. 师范專業初等代数教程也不應該規避中学實踐中的个别

重要（按教学观点或其他理由来说）問題。我們指的是这样的問題，例如文字問題解法，方程各种特殊解法的討論，問題的合理解法等等。

所說的这一切情形，只有通过初等代数各基本章节的系統講解才能令人滿意。但是本書材料的排列系統与中学的不同。这个教本也要照顧到学过中学数学課程的人。师范学院的学生已經学过許多重要的数学科目，并且已經有了足够的数学水平，一定可以用更高的观点来处理初等数学的問題。所說的這些情况，可以使我們在專門教程里，用系統的敘述，面面周到地处理每項題材，并且可以不用中学代数課本因学生年齡特征而不能避免的圓周式教学法。我們必須竭力使初等数学“專門教程”的科学內容与教学大綱对“高等”数学所要求的高等水准相協調，而对于高等数学的要求在訓練教师工作中的作用也是不可忽視的。

在指导这本教科書的現行中学教学大綱里，关于在中学里灌輸近代科学概念这一方面蘊含着很大的可能性。为了进一步提高数学教育的科学水平，需要把教程中在近代科学观点下起着指导作用的主要章节提到首要地位。半世紀以前提出的根本修改中学教学大綱的要求，例如沒有足够的基础而插入微积分，或是后来又以“函数过多”为理由提議“取消”三角的独立設科等等，由近代观点来看是不自然的并且已經成为腐調了。極端可慮的是所有这些謬陋的外来思想現在还可以进一步地引誘那些已經擺脫前世紀末叶的观点影响的、有思想性的数学教育者。初等数学“專門教程”的學習定能帮助教师在他日常工作中按照沒有偏差的自然途徑提高数学教育的科学思想水平。

在本教程里自始至終引入大量的經過解答的例題与問題。問題，列題与解法在書里都用小字印刷，以便与理論教材相区别。

当学习初等数学的时候，不能只限于學習理論，而获得解决例

題與問題的切實技能也是完全必要的。所以用小字印刷的例題絲毫不能看作不必要的材料。從未來教師的需要着想，著者竭力在這本書里介紹初等代數的各種基本練習題，例外的只有以下這樣的問題。例如“組合”的問題，不算有名的“二項式定理”與級數的問題。過分夸大這類問題的意義，已經屢次受到來自進步教學思想方面的批判。同時著者也不陷入相反的極端，例如：不亞於荒謬的提議：要從中學教學大綱中根本刪去組合與牛頓二項公式。

莫斯科省師範學院代數教研組所完成的大部分工作，例如對本書原稿詳細的審查和認真的評論等，我認為是有必要提出的。

我怀着深深感謝的心情追憶我的已故業師Н. Н. 魯金院士，他熱情地參加了本書大綱的擬定，並且他的意見也給了我無法估計的幫助。

趁此機會我對И. К. 安德洛諾夫，Б. В. 庫圖佐夫，П. А. 拉利切夫，П. С. 莫杰諾夫諸教師深表謝意，他們的批評意見和友誼的忠告對完成本書給了我很大幫助和支持。我還要感謝И. А. 麥杰里雅諾夫斯基，他典範地完成了插圖工作。

С. М. 諾窪塞洛夫

1958年12月25日於莫斯科。

目 錄

序	v
緒論	1
§ 1. 初等代數教程的內容	1
§ 2. 環和體的概念	2
§ 3. 在初等代數內所研究的基本數集	5
§ 4. 有序數體	8
§ 5. 函數的基本概念	11
第一章 多項式	17
§ 6. 解析式的概念	17
§ 7. 恒等變形的概念	20
§ 8. 多項式	22
§ 9. 多項式的標準形狀	25
§ 10. 多項式諸項的各種排列方法	30
§ 11. 關於多項式恒等於零的定理	33
§ 12. 關於多項式恒等的定理	35
§ 13. 多項式標準形狀的唯一性。多項式的運算	37
§ 14. 關於多項式乘積的定理	41
§ 15. 簡略乘法公式	44
§ 16. 多項式恒等變形舉例	48
§ 17. 對稱多項式	53
§ 18. 未定係數法	55
§ 19. 條件等式	58
§ 20. 多項式的可除性	59
§ 21. 帶余式的除法	62
§ 22. 用 $x-a$ 除	67
§ 23. 關於多項式的根的定理	70
§ 24. 多項式的因式分解	71
§ 25. 多項式析因子的各種方法	77
§ 26. 關於一個自變數的多項式的基本定理。插值公式	84
§ 27. 依自變數的升幂排列的多項式的帶余式除法	87

第二章 有理函数	90
§ 28. 有理式与有理函数	90
§ 29. 代数分式	91
§ 30. 代数分式的恒等	92
§ 31. 代数分式的化简	96
§ 32. 有理函数体	100
§ 33. 有理式的恒等变形	105
§ 34. 有理式的恒等变形举例	106
第三章 根式与无理函数	113
§ 35. 实数体上的根式	113
§ 36. 含有根式的表达式的变换	121
§ 37. 数的开方	134
§ 38. 幂概念的推广	133
§ 39. 有理指数的幂函数	142
§ 40. 实数体上的代数显函数	148
§ 41. 复变数函数	158
第四章 方程与不等式	171
§ 42. 方程与方程组	171
§ 43. 方程及方程组的等价性	177
§ 44. 方程的变形	182
§ 45. 解方程组的基本方法	191
§ 46. 在补充条件下解方程	196
§ 47. 含有参数的方程	193
§ 48. 解方程的特殊情形, 广义解	203
§ 49. 不等式的基本性质	206
§ 50. 绝对不等式	203
§ 51. 几个著名的不等式	203
§ 52. 用不等式给出的数集与点集	220
§ 53. 含有绝对值的不等式	226
§ 54. 不等式的解	228
§ 55. 混合组	232
§ 56. 教科书中方程与不等式应用问题的解法与讨论	233
§ 57. 方程的初等图解法和近似法的概念	237

第五章 一次方程和一次不等式	243
§ 58 綫性方程	243
§ 59 綫性方程組	247
§ 60 三角形方程組	248
§ 61 由两个綫性方程消去未知数	253
§ 62 用初等方法討論和解綫性方程組	257
§ 63 未定系数法	260
§ 64 綫性相关的概念, 对于綫性方程組的討論上的应用	272
§ 65 綫性方程組的各种特殊解法	277
§ 66 含参数的綫性方程組在附加条件下解綫性方程組	282
§ 67 一次不等式	290
§ 68 綫性不等式組	294
§ 69 混合組	305
§ 70 用构成方程与不等式的方法来解和討論应用問題的例子	306
第六章 高次方程及高次不等式	315
§ 71 二次三項式, 配平方	315
§ 72 二次三項式的根	317
§ 73 二次三項式的根的对称函数	325
§ 74 两个二次三項式的結式	330
§ 75 在实数体上的二次三項式, 二次不等式, 最大及最小值	333
§ 76 在有理数体上的代数方程	343
§ 77 二項方程	347
§ 78 用初等方法可解的特殊高次方程	348
§ 79 分式方程	361
§ 80 高次方程組	369
§ 81 齐次方程及可化成齐次方程的方程	375
§ 82 解方程組的例題	381
§ 83 一个未知数的高次不等式及高次不等式組	389
§ 84 多个未知数的不等式及不等式組	395
§ 85 无理方程	405
§ 86 混合組无理不等式	417
§ 87 应用問題解法举例	423
§ 88 函数的研究及求最大值与最小值的問題	432

第七章 在实数体上的指数函数和对数函数	444
§ 89 在有理数集上的指数函数	444
§ 90 无理指数幂	447
§ 91 指数函数	454
§ 92 指数函数的特性	457
§ 93 对数及其性质	460
§ 94 对数函数	464
§ 95 任何实指数的幂函数	468
§ 96 指数函数及对数函数的增长率	470
§ 97 复合指数函数	472
§ 98 指数函数及对数函数的超越性	473
§ 99 用指数函数及对数函数所实现的映象	475
§ 100 由指数运算及对数运算组成的公式所给函数的讨论例题	480
§ 101 对数的计算	485
§ 102 指数与对数方程及不等式	494
§ 103 指数函数与对数的一些应用。“复利公式”	507
第八章 配合	512
§ 104 组合	512
§ 105 全排列	516
§ 106 选排列	521
§ 107 有重复的选排列	524
§ 108 有重复的全排列	526
§ 109 有重复的组合	529
§ 110 多项式标准式的项数	531
§ 111 二项乘积公式, 牛顿二项式与和的方幂	533
§ 112 组合恒等式及其证明方法	536
第九章 序列	541
§ 113 序列的概念	541
§ 114 数列	543
§ 115 累进列	550
§ 116 差数列与和数列	555
§ 117 各种有限级数的求和法	558
§ 118 收敛序列与级数的求和	564

緒 論

§ 1. 初等代數教程的內容

近世代數這門科學，是一個數學部門，由許多不同的、正在發展的學科（群論、環論、體論、綫性代數）組成。近世代數的內容，可以用一般的形式說明如下：在任意性質的集的元素上，研究代數運算，是代數的（統一代數各科的）基本任務。這裡所謂在所設集 M 里定義了一個運算，可以理解作一種對應，這種對應，使集 M 里的任意兩元素 a 和 b （按一定次序來取的）對應於本集里一個完全確定的元素 c 。近世代數的研究對象是一些運算和集（任意性質的），這些運算具有某些完全確定的，描述（用公理）得很確切的性質，至於集，則在它們的元素上建立了上述的運算（群、環、體）。關於近世代數的內容，在高等代數里要講一個概觀，當然還不是詳盡無遺的概觀。

按內容來說，初等代數和代數這門科學（從其固有的意義來看）迥乎不同。初等代數的內容，取決於中學代數課程內容。在中學里，“代數”這個名稱，就它的內容來說，要理解作一個複合的教學科目，其中所談的基本知識，不只涉及（固有意義的）代數，而且涉及許多其他數學學科。大家知道，在中學代數里，有各種不同的問題，譬如有數的理論的發展，關於代數式（多項式、有理式、根式等）的理論，關於方程的理論，函數論初步，某些超越函數（指數函數、對數函數）的研究，坐標的知識和它對於研究函數的應用，極限概念（序列的極限），簡單級數求和（特別是等差，等比級數），近似計算初步等等。這些問題之中，有一些真正是屬於（固有意義

的)代数的(如多項式的理論,恒等变形、代数方程),有一些在其他数学科目里还要發揮。例如極限概念以及簡單超越函数的研究并不屬於代数,而屬於数学分析。中学課程这样龐杂,是在所难免的,因为中学数学要提供必要的一套普通知識和技能,于是便不能局限于某一数学科目的范围之內。

师范学院初等数学的目的,是深入研究,發揮和論証中学数学所包含的問題以及作为中学数学課程之特征的研究方法。还應該注意的是,有許多重要問題(例如方程和不等式的等价性的一般理論),“高等数学”認為在“初等”数学中已談到了,而不再講它們,但是中学数学課程又不能严格而完備的說明它們。所举的這些理由,說明有必要把初等数学当作一門独立学科来研究,而这門学科从中学数学教师專業訓練的观点来看是極重要的。

初等代数專業教程(在深入的,有科学論据的講解下),除去数的理論和近似計算兩個問題列入算术教程大綱外,包括中学代数的全部問題。

在这一章里,所要指出的是这样一些知識,通常認為它們在其他(在师范学院學習的)学科中已經講过了,而它們又是以后各章中講解初等代数的基础。

§ 2. 环和体的概念

在初等代数里要討論,在其元素上可进行“算术运算”的各种具体的集。例如,运算可以在数、多項式、代数分式等等上施行。在近代数学里,相应的一般定义和公理叙述如下:

定义 定义了下列两种运算(演算)的集 R 叫做环:

加法运算: 对于任意兩元素 a 和 b , 有元素 c 与它們对应, c 叫做 a, b 的和:

$$c = a + b,$$

乘法运算: 对于任意两元素 a 和 b , 有元素 d 与它们对应, d 叫做 a, b 的积:

$$d = ab.$$

加法与乘法运算, 由下列性质刻画出来。

加法公理

1. 结合公理: 对于任何三元素 a, b 和 c ; 必有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

2. 交换公理: 对于任何两元素 a 和 b ; 必有

$$a+b=b+a.$$

3. 逆运算公理 (对于加法): 对于任何两个元素 a 和 b , 存在唯一的元素 x , 满足条件

$$a+x=b.$$

元素 x 称为元素 b 和 a 的差, 记作

$$x=b-a.$$

乘法公理

4. 结合公理: 对于任意三元素 a, b 和 c ; 必有

$$(ab)c=a(bc).$$

5. 交换公理: 对于任意两元素 a 和 b ; 必有

$$ab=ba.$$

6. 分配公理: 对于任意三个元素 a, b 和 c ; 必有

$$(a+b)c=ac+bc. \textcircled{1}$$

定义 若环中至少有一个异于零的元素, 并且对于乘法, 满足下列逆运算公理, 便称它为体。

① 在近世代数里, 也讨论非交换环, 由以上列举的公理, 删去第五, 便可以说明非交换环的特征, 即是在非交换环里, 一般来讲, 乘积与各因子的次序有关, 而对于两元素 a, b , 等式 $ab=ba$ 未必成立。

7. 对于任意二元素 a 和 b , 其中 $a \neq 0$, 存在唯一的元素 x , 满足条件:

$$ax = b.$$

元素 x 称为以 a 除 b 的商, 記作: $x = \frac{a}{b}$.

在算術里, 加法和乘法的公理 1, 2, 4, 5 与 6 叫做基本的运算定律. 由這些定律, 可以推出任意有限多个元素的运算法則(用和去乘乘积, 用和去乘和等等的法則)。①

由环和体的公理可以推出下列命題(証明參看高等代数課程)。

在任何环內存在这个环的唯一的“零”元素, 零与环中任何元素 a 的和等于 a :

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

对于环內每一元素 a , 存在唯一的元素 $-a$, 称为 a 的負元, 满足条件:

$$a + (-a) = 0.$$

在任何体内存在这个体的唯一的“單位”元, 满足条件:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$$

这里 a 是体的任何元素。

对于体内每一元 $a \neq 0$, 存在唯一的元素 a^{-1} , 称为 a 的逆元, 满足条件:

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

要使体内二数的乘积等于零, 必要而且只要它的因子中至少有一个等于零。

① 大家知道, 当規定和証明任意多个元素的运算法則时, 要用完全归纳原理, 这原理是建立有限集里公共性質的必要工具。

§ 3. 在初等代數內所研究的基本數集

自然數列. 在算術里表述自然數列

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

特征的公理, 在那里用适当的定義建立了自然數集內加法和乘法運算。自然數集不是環(因此也不是體), 因為加法逆運算公理不成立; 即是對於任意兩自然數 a, b , 不一定存在一數 x , 滿足條件:

$$a + x = b,$$

換句話說, 在自然數集里, 減法不是總能成立的。

乘法逆運算的公理也不成立。

在初等代數教程內, 廣泛地應用一種證明方法, 即完全歸納原理。完全歸納原理基於下面的公理(出現於自然數列的其他公理之中):

任何自然數集合 \mathfrak{M} , 若具有性質:

1° 1 屬於 \mathfrak{M} ,

2° 若 n 屬於 \mathfrak{M} , 它的鄰繼數便也屬於 \mathfrak{M} , 那末 \mathfrak{M} 必與整個自然數集完全一致。

完全歸納原理通常按下列方式來使用:

若關於自然數的某種論斷, 對於數 1 正確(第一條); 且假定該論斷對於 n 正確, 從而對於 n 的鄰繼數 $n+1$ 也正確(第二條); 那末該論斷對於任意自然數都正確。

完全歸納原理產生於上邊所說的這條公理: 所謂集 \mathfrak{M} 應該就是使這論斷成立的所有自然數集。當原理的條件滿足時, 集 \mathfrak{M} 便和所有自然數的集完全一致, 即所給的論斷對於任意自然數都正確。

要證明一個命題對於所有自然數都成立, 用直接驗證的方法是不可能的。事實上, 自然數列是無窮集, 我們不能(對於每一數

分別試驗)試驗無窮多次。對於任何自然數都成立的一般命題,可以由完全歸納法來證明。

整數環 在所有整數

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

的集內能做加法和乘法運算(連同它們原有的性質),並且加法運算公理成立,即二整數的差仍是整數。因此,所有整數的集是環。

整數環不是體,因為乘法逆運算不能施行,即一個整數不一定能被另一整數整除。

有理數體 所有有理數的集由所有整數和分數構成(正數、負數和零)。每一個有理數 r 總可以寫成分數 $\frac{m}{n}$ 的形式,這裡 m 和 n 是整數且 $n \neq 0$ (可以認定 n 是正數)。所有有理數的集是體,因為在它里边永遠可以施行加法和乘法,以及它們的逆運算:減法和除法(不以零作除數)。

實數體 有理數和無理數合在一起,構成實數集。

每一無窮小數

$$p. q_1 q_2 \dots q_n \dots$$

表示一個正實數,這裡 p 是非負整數(整數部分)而 $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ 是十進數碼(即 $q_n = 0, 1, 2, \dots, 9$)。反之每個正實數可以用無窮十進小數表出。

每個正有理數可以寫成有盡或無窮十進循環小數。反之每一有盡或無窮十進循環小數表示一個有理數。用有盡小數表示的任何有理數可以用周期為 0 或 9 的無窮循環小數來表示。例如

$$\frac{1}{5} = 0.2 = 0.2000\dots = 0.1999\dots$$

每個不循環的(無窮)十進小數表示一個無理數。

每個負實數可以用負尾數(即小數部分)或正尾數的兩種形式