1981

全国高考试题解法分析

数学·物理·化学

钟　集　谢贤群　龙宝泉

广东科技出版社

1981
全国高考试题解法分释

（数学·物理·化学）

钟　集　谢贤群　龙宝泉

广东科技出版社

1981
全国高考试题解答分析
（数学·物理·化学）
钟 集 谢贤群 龙宝泉
*
广东科技出版社出版
广东省新华书店发行
广东新华印刷厂印刷
787×1092毫米32开本 4.125印张90,000字
1981年12月第1版 1981年12月第1次印刷
印数1—165,000册
统一书号7182·26 定价0.37元

出版说明

本书是一九八一年全国高等学校统一招生数学（包括理工农医类和文史类）、物理、化学试题的解答和分析，分别由华南师范学院数学系副主任钟集副教授、物理系中学物理教研室副主任谢贤群讲师和广州市第三中学龙宝泉老师撰写。

本书不但提供了数理化三科试题的详细答案（包括不同解法的答案），而且着重地阐述解答的方法。撰写者对于试题特点和解题思路的分析，对于解答中注意事项的指示或易犯错误的剖析，其作用不但有助于启发怎样解这些试题，而且有助于青年学生掌握正确的学习方法和解题方法，也将有助于中学教师提高高考复习辅导水平。

本书适合高中学生和青年阅读，也可供中学教师教学时参考。

目　　录

数　学

〔钟　集撰写〕

1981年全国高等学校统一招生考试的数学试题，无论是理工农医类或文史类，都有一个共同的特点，就是着重基本知识．题目并不难，但如果基本知识掌握得不好，要获得好成绩是不容易的．

有的考生为了参加考试，花了许多功夫作准备，可是效果并不好，这可能是学习方法不对头所致．要解决一道数学题目，首先必须掌握题目所提及的全部概念，才能够弄清楚题目的意义和要求；然后，根据题目中已知和未知条件的特点及它们的相互关系，找到解题的途径．为此，必须熟悉有关的定理和公式的特点，而且要掌握各种类型的题目解题的基本规律．对于一些稍为复杂的题目，解答之后还要回顾一下看看自己是根据题目的哪些特点找到解题途径的．这样，就可以逐步积累解题的经验，提高解题的能力．

以本届试题理工科第九题与文科第九题为例，这两道题目都提到二次曲线和直线相交的问题．虽然两题的条件和要求不同，但归根结底都是通过解由二次曲线和直线方程所组成的方程组，求曲线与直线的交点．求出了这两个交点，就可以根据题目的要求再确定下一步的做法．理工农医第九题没有给出直线方程，但因为给出了直线上一定点，这自然使人想到用点斜式来表示过该点的直线是较为简便的方法．但还必须考虑点斜式能否把过该定点的所有直线都表示出来？

过该点且垂直于x轴的直线$x=2$就不能用点斜式表示，应该另外讨论。这样，整个解题的途径就基本明确了。这一类型的题目，在过去几届高考试题中多次出现过，可见这是中学数学中一个重要内容。

对于理工科试题第十题，只要注意到图形是完全确定的，就知道a、b应该是可求的。在引出了有关a、b的两条方程之后，是否解方程，要看后面解题的需要而定。另一个着手途径，就是应该求出u_k的比较简单的表示式。这个式子可以直接应用乘法公式或等比级数求和公式得出，这样题目就容易解决了。

总之，学习数学应在平常下功夫，功夫到家了，就会熟能生巧，考试时就能获得优良的成绩。否则，靠死记硬背一些难题和解答，往往是劳而无功的。

下面介绍本届数学试题的解法，着重指出解题的思路和应注意的事项；也介绍一些不同的解法，不过，只限于那些比较简捷的而且有启发意义的不同解法。我们认为，不加选择地追求一题多解的做法，并没有多大的积极意义。

（一）理工农医类试题

一、（6分）

设A表示有理数的集合，B表示无理数的集合，即设$A=\{有理数\}$，$B=\{无理数\}$，试写出：（1）$A\cup B$，（2）$A\cap B$。

【分析】 全体有理数和无理数合起来就是全体实数。不可能有一个实数，既是有理数，又是无理数。

【解】（1）$A\cup B=$全体实数的集合R。

（2） $A\cap B=$空集ϕ。

【注意】 两个集合的并集和交集都是集合，所以两个答案中都应明确指出是集合．如，$A\cup B=\{实数\}$，或$A\cup B=R$，或 $A\cup B=\{有理数，无理数\}$均可以．如果把$A\cup B$答为实数，或把 $A\cap B$ 答为0，都是错误的．

二、（6分）

在A、B、C、D四位候选人中，（1）如果选举正、副班长各一人，共有几种选法？写出所有可能的选举结果；（2）如果选举班委三人，共有几种选法？写出所有可能的选举结果。

【分析】 因为正、副班长是有区别的，所以可把正、副班长看做位置顺序，那么，选举正、副班长是属于排列的问题。因为班委三人并没有区别，即是不分顺序的，所以选举班委属于组合的问题。要写出所有可能的选举结果，而不致有重复和遗漏，有多种方法。通常用的是字典法，这就是象字典一样，按照字母的顺序书写。

【解】（1）选举正、副班长的选法总数为

$$P_4^2=4\cdot 3=12\ （种）.$$

以第1位表示正班长，第2位表示副班长，这12种选举结果是

$$AB,\ AC,\ AD,\ BA,\ BC,\ BD,$$
$$CA,\ CB,\ CD,\ DA,\ DB,\ DC.$$

（2）选举班委3人的选法总数为

$$C_4^3=4\ （种）.$$

这4种选举结果是

$$ABC,\ ABD,\ ACD,\ BCD.$$

三、（8分）

下表所列各小题中，指出A是B的充分条件，还是必要条件，还是充要条件，或者都不是.

	A	B	A是B的什么条件？
(1)	四边形$ABCD$为平行四边形	四边形$ABCD$为矩形	
(2)	$a=3$	$\|a\|=3$	
(3)	$\theta=150°$	$\sin\theta=\frac{1}{2}$	
(4)	点(a, b)在圆$x^2+y^2=R^2$上	$a^2+b^2=R^2$	

【分析】 若有A则有B，则A是B的充分条件．反之，若有B则有A，则A是B的必要条件．用符号$A\to B$表示若有A则有B．对于表中的题目：

（1） $B\to A$，因为矩形必然是平行四边形．

（2） $A\to B$，因为$a=3$，则$|a|=3$．

（3） $A\to B$，因为$\sin 150°=\sin 30°=\frac{1}{2}$．

（4） $A\to B$，因为点(a,b)在$x^2+y^2=R^2$上，则其坐标必满足方程，即$a^2+b^2=R^2$．反之，$B\to A$，因为$a^2+b^2=R^2$，表明(a,b)满足方程$x^2+y^2=R^2$，即此点在圆上．

【解】（1） 必要条件．

（2） 充分条件．

（3） 充分条件．

（4） 充要条件．

四、(10分)

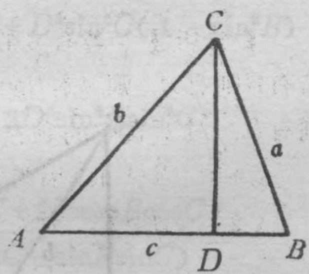
写出余弦定理(只写一个公式即可),并加以证明:

【分析】 余弦定理是勾股定理的推广. 因为三角形的内角可能是锐角、直角或钝角,所以一般要分别加以证明. 从$\triangle ABC$的顶点C作AB边的垂线,得到一个或两个直角三角形. 利用勾股定理就可推出余弦定理. 由于角A的大小不同,顶点C在AB边上的射影的位置也不同,所以要将角A分为锐角、直角和钝角三种情形讨论. 这就是证法一. 如果约定直线AB的某一方向为正,则证法一可以化简为证法二. 因为正弦定理的证明与余弦定理无关,所以,以正弦定理为根据推证余弦定理也是正确的,这就有证法三.

【解】 设$\triangle ABC$的三内角A, B, C的对边分别为a,b,c,则有余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

证法一



由顶点C作AB边的垂线,其垂足为D.

设A是锐角,则D, B同在A的一侧,如图所示. 依勾股定理,有

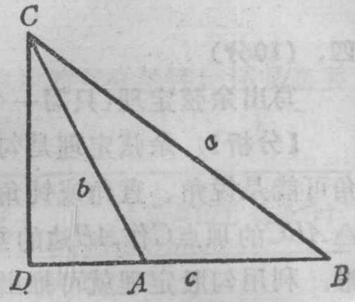
$$\begin{aligned}a^2&=CD^2+DB^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=c^2+b^2\cos^2A+b^2\sin^2A-2bc\cos A\\&=c^2+b^2-2bc\cos A.\end{aligned}$$

设A是直角,则$\cos A=0$,由勾股定理直接得

$$a^2=c^2+b^2=c^2+b^2-2bc\cos A.$$

设A是钝角,则D, B在A的两侧,如图所示,依勾股定理,有

$$a^2 = CD^2 + DB^2$$
$$= [b\sin(180° - A)]^2$$
$$+ [c + b\cos(180°$$
$$- A)]^2$$
$$= b^2\sin^2 A + c^2 +$$
$$b^2\cos^2 A - 2bc\cos A$$
$$= c^2 + b^2 - 2bc\cos A.$$

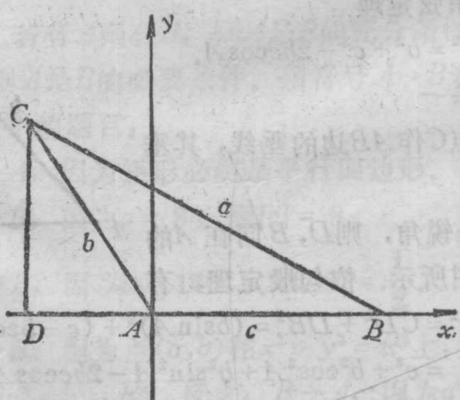


故不论A的大小如何，恒有

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A.$$

证法二

以A为原点，AB为x轴，B在正半轴上，C在x轴的上侧，如图所示，则不论D的位置怎样，有



$$AD = b\cos A, \quad DC = b\sin A.$$

因此，

$$a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$$
$$= c^2 + b^2 - 2bc\cos A.$$

证法三

依正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

令比值为D. 实际上，D即为$\triangle ABC$的外接圆直径，故

$$a=D\sin A,\ b=D\sin B,\ c=D\sin C.$$

由此得

$$\begin{aligned}
a^2&=D^2\sin^2 A=D^2\sin^2(180°-B-C)\\
&=D^2\sin^2(B+C)\\
&=D^2(\sin B\cos C+\cos B\sin C)^2\\
&=D^2\sin^2 B\cos^2 C+D^2\cos^2 B\sin^2 C\\
&\quad+2D^2\sin B\sin C\cos B\cos C\\
&=D^2\sin^2 B(1-\sin^2 C)+D^2\sin^2 C(1-\sin^2 B)\\
&\quad+2bc\cos B\cos C\\
&=D^2\sin^2 B+D^2\sin^2 C-2D^2\sin^2 B\sin^2 C\\
&\quad+2bc\cos B\cos C\\
&=b^2+c^2-2bc\sin B\sin C+2bc\cos B\cos C\\
&=b^2+c^2+2bc(\cos B\cos C-\sin B\sin C)\\
&=b^2+c^2+2bc\cos(B+C)\\
&=b^2+c^2+2bc\cos(180°-A)\\
&=b^2+c^2-2bc\cos A.
\end{aligned}$$

【注意】 通常用证法一. 但如果只对A是锐角的情形作出证明，而不考虑直角和钝角的情形，是不全面的.

五、(10分)

解不等式(x为未知数)：

$$\begin{vmatrix} x-a & b & -c \\ a & x-b & c \\ -a & b & x-c \end{vmatrix} > 0.$$

【分析】 令

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-a & b & -c \\ a & x-b & c \\ -a & b & x-c \end{vmatrix}.$$

观察Δ，就会发现行列式中第1，2行相加，可以提出因子x；第2，3行相加，亦可提出因子x. 由此得解法一. 如果第1列减第2列加第3列，可以提出因子$x-a-b-c$，由此得解法二. 如果直接把Δ展开，则得解法三.

【解】

解法一

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x & 0 \\ a & x-b & c \\ 0 & x & x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & x-b & c \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2(x-a-b-c).$$

故

$$x^2(x-a-b-c) > 0,$$

解得

$$x \neq 0 \quad \text{且} \quad x > a+b+c.$$

解法二

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-a-b-c & b & -c \\ a+b+c-x & x-b & c \\ -a-b-c+x & b & x-c \end{vmatrix}$$

$$= (x-a-b-c) \begin{vmatrix} 1 & b & -c \\ -1 & x-b & c \\ 1 & b & x-c \end{vmatrix}$$

$$= (x-a-b-c) \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ -1 & x-b & c \\ 0 & x & x \end{vmatrix}$$

$$=x^2(x-a-b-c).$$

以下与解法一同．

解法三

$$\Delta=(x-a)(x-b)(x-c)-2abc-bc(x-a)$$
$$-ca(x-b)-ab(x-c).$$

第一项中 x 的系数是 $ab+bc+ca$，而后三项中 x 的系数是 $-ab-bc-ca$，恰好相抵消．全式 abc 的系数是

$$-1-2+1+1+1=0.$$

故 Δ 只包含 x^3 和 x^2 的项，这两项直接由开头三因子相乘得出

$$\Delta=x^2(x-a-b-c).$$

以下解法与解法一同．

【注意】 不等式的解是两式

$$x\neq0,\quad x>a+b+c$$

同时成立．例如，当 $a+b+c=-1$ 时，$x=0$ 虽然满足 $x>a+b+c$，但不满足 $x\neq0$，所以 $x=0$ 不是不等式的解．又如 $x=-2$，满足 $x\neq0$，但不满足 $x>a+b+c$，所以 $x=-2$ 也不是不等式的解．

六、(10分)

用数学归纳法证明恒等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

对一切自然数 n 都成立．(注意：用其它方法证明这个等式的不给分．)

【分析】 题目中恒等式的证法本来不一定要用数学归纳法．但因为指明限用数学归纳法，所以就不许用别的方法．数

学归纳法包括如下步骤：首先要满足初始条件，本题是$n=1$时恒等式成立；再设n等于某个正整数k时，恒等式成立，这叫做归纳法假设；然后证明$n=k+1$时，恒等式也成立。完成了这几步，就算用数学归纳法证明了命题。在证明时，可以直接就题目的恒等式作出证明，也可以把原式加以恒等变换后作出证明。

【证】

证法一

恒等式的右边分母含有因子$\sin\dfrac{x}{2^n}$，故必须有

$$\sin\frac{x}{2^n}\neq 0 \quad (n\text{为任何正整数}) \tag{A}$$

若$n=1$，则

$$2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin x. \tag{B}$$

等式成立。

假设$n=k$（k为正整数），有

$$2^k\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^k}\sin\frac{x}{2^k}=\sin x, \tag{C}$$

则

$$2^k\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^k}\cdot 2\cos\frac{x}{2^{k+1}}\sin\frac{x}{2^{k+1}}=\sin x,$$

即

$$2^{k+1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{k+1}}\sin\frac{x}{2^{k+1}}=\sin x. \tag{D}$$

这是（C）中的k换为$k+1$的情形。故依数学归纳法，n为任何正整数，恒有

$$2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}=\sin x. \qquad (\mathrm{E})$$

依(A)，得到

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}. \qquad (\mathrm{F})$$

证法二

因为求证的恒等式的分母含有因子 $\sin\frac{x}{2^n}$，故不论 n 为任意一个正整数，恒有

$$\sin\frac{x}{2^n}\neq 0. \qquad (\mathrm{A})$$

由此，对于任意一个正整数 $m>1$，必有

$$\cos\frac{x}{2^m}\neq 0. \qquad (\mathrm{G})$$

否则，若

$$\cos\frac{x}{2^m}=0,$$

则

$$\frac{x}{2^m}=r\pi+\frac{\pi}{2} \quad (r\text{为整数}),$$

故

$$\frac{x}{2^{m-1}}=2r\pi+\pi,$$

因而

$$\sin\frac{x}{2^{m-1}}=0,$$

与(A)矛盾。

设$n=1$，则

$$\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

依(A)，约去$\sin\frac{x}{2}$得

$$\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}.$$

即原式于$n=1$时成立.

设$n=k$ （k为正整数），等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^k\sin\frac{x}{2^k}} \qquad \text{(H)}$$

成立. 以$\cos\frac{x}{2^{k+1}}$乘之，

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^{k+1}}=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}.$$

$$右式=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}\cos\frac{x}{2^{k+1}}}.$$

依(G)，约去 $\cos\frac{x}{2^{k+1}}$，得到