上海电视教育教材

微积分初步

复旦大学数学系

吴卓人编

一九七八年

上海电视教育教材

微积分初步

复旦大学数学系

吴卓人编

一九七八年

目录

引　言

高等数学的主要内容是微积分。微积分是解决什么实际问题的呢？我们为什么要学习这门课呢？看一看下面两个典型例子，我们就可以大致地了解上面所提出的问题。

1　自由落体的瞬时速度

物体受重力作用自由下落，运动开始时 $t=0$，到任一时刻 t 时下落的路程为 S，由公式

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \quad (g\text{ 是重力加速度})$$

确定。这个运动不是等速的，物体在下落时间内每一时刻的速度都不同。今求物体下落到时刻 $t=3$(秒)时的“瞬时速度 v”。

设落体在 3 (秒) 时的位置为 M_0，经过的路程为 $S_0=OM_0$ (图 0.1)，这里

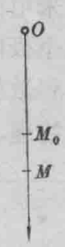
$$S_0=\frac{1}{2}g3^2.$$

再设落体在时刻 t 的位置为 M，经过的路程 $S=\overline{OM}$ 是

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

从第 3 秒到 t 秒这段时刻内，落体的平均速度 $\bar{v}$ 是

$$\bar{v}=\frac{S-S_0}{t-3}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g3^2}{t-3}=\frac{1}{2}g\frac{t^2-3^2}{t-3}\left(=\frac{1}{2}g(t+3)\right).$$

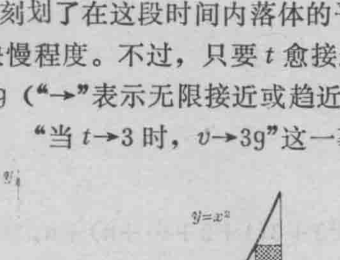


(图0.1)

$\bar{v}$ 刻划了在这段时间内落体的平均快慢程度，但不能刻划 $t=3$ 这一“瞬间”物体下落的快慢程度。不过，只要 t 愈接近 3，$\bar{v}$ 就愈接近这一瞬间的情况，因此，当 $t\to3$ 时，$\bar{v}\to 3g$ (“$\to$”表示无限接近或趋近的意思)，数值 $3g$ 就是落体在 $t=3$(秒) 时的瞬时速度 v。

“当 $t\to3$ 时，$\bar{v}\to3g$”这一事实，用数学的术语来说，就是：$3g$ 是 $\bar{v}$ 当 $t\to3$ 时的极限，因此，瞬时速度是平均速度的极限。

类似这种极限问题，在自然现象中是非常普遍的。如力学中求物体运动的速度、角速度及加速度；物理、化学中求物质的比热、密度及浓度；几何学中求曲线的切线斜率、升降及极值点等等。把这些具体问题概括为一般数学问题，并找出解决它们的简便方法（微分方法），这就是**微分学**的主要课题。



(图0.2)

2　平面图形的面积

在直角坐标系中计算抛物线 $y=x^2$、x 轴与直线 $x=1$ 围成的平面图形的面积(图0.2)。

我们用分点$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，$\frac{3}{n}\cdots$，$\frac{n-1}{n}$（n为正整数）将OB分成n等分。以每一等分为下底作出矩形，使矩形的左上角到抛物线（见图0.2）。很明显，这n个矩形底边的长都是$\frac{1}{n}$，它们的另一边的长度分别是$0,\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$.

这n个矩形的面积之和是

$$\begin{aligned}A_n&=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]^*\\&=\frac{1}{n^3}\ \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\&=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

由上式可知，当n无限增大（记为$n\to\infty$，记号∞叫做无穷大）时，A_n就无限接近$\frac{1}{3}$，即当$n\to\infty$时，$A_n\to\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}$就是这个平面图形的面积。

采用前面的说法，A是A_n当$n\to\infty$时的极限。由于A_n是n个小矩形面积之和，因此这个极限又称为“和数极限”。

和数极限问题，在自然现象中也很普遍，如力学中求变力作功、质量中心及转动惯量；物理、化学中求非均匀物质的质量、热量及压力；几何学中求曲线长度、面积及体

---

*

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

这个关系式怎么得来的呢？利用恒等式$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$得

$$\begin{aligned}&(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1,\\&n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1,\\&2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1,\end{aligned}$$

把这n个等式的两边分别相加，得

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n.$$

由于$1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$，代入上式，得

$$n^3+3n^2+3n=3(1^2+2^2+\cdots n^2)+\frac{3}{2}n(n+1)+n,$$

整理后，得

$$1^2+2^2\cdots+n^2=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1)=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1),$$

因此，

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

积等等。把这些具体问题概括为一般数学问题，并找出解决它们的简便方法（积分方法），这就是**积分学**的主要课题。

如果，我们进一步考察这两种不同类型问题，就不难发现：不论是微分学的问题还是积分学的问题都是计算某个极限。因此，我们必须先了解极限这个基本概念，然后再进入（一元函数）微分学和积分学的学习，并在此基础上学习在物理、化学中有着重要应用的"微分方程"。

微积分是进一步学习数学的基础，是某些专业基础课不可缺少的工具。因此，要求我们正确地理解基本概念和基本理论，熟练地掌握运算方法，并不断地提高分析、概括及解决问题的能力。

第一章 函数与极限

由于微积分的问题基本上是求函数极限的问题，因此我们来阐述函数和极限这两个基本概念。

§1 函数的概念

在物体自由下落的过程中，时间 t 和路程 S 都是取不同数值的量。这种在所考虑的过程中，取不同数值的量，称为**变量**。而重力加速度 g 在物体下落过程中，总取同一数值，它是一种特殊的变量，这种在所考虑的过程中，总取同一数值的量，称为**常量**。这些量都是用（实）数表示的，因此，又称变量为**变数**，称常量为**常数**。

在自然现象中，同时出现的几个变量，通常不是各自孤立地在变化，而是彼此之间有着依赖关系的。

例 1 上述 S 和 t这两个变量，有下列依赖关系：

$$S=\frac{1}{2}gt^2,(0\leqslant t\leqslant t^1),$$

其中 t_1 是物体下落到地面时所用的时间，不等式 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 表示 t 的变化范围。

关系式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 给出了 S 依赖于 t 的变化规律。在 t 的变化过程中，当 t 取某值 t_0 时，按量依赖关系，S 就有一确定值与之对应。这个依赖关系是：把 t_0 平方，再乘以常数$\frac{1}{2}g$，就得到 S 的对应值 S_0：$S_0=\frac{1}{2}gt_0^2$.

例 2 在引言的例 2 中，A_n 和 n 也是两个变量。它们之间有关系式：

$$A_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right),\qquad (n\text{: 自然数}),$$

这里，n 和 A_n 的地位与上例中 t 和 S 的地位是一样的，只不过 n 和 A_n 的依赖关系及 n 的变化范围与上例不同而已。

例 3 在温度一定时，就一定质量的气体而言，当压力 P 在一个半大气压到八个大气压之间变化时，P 与容积 V 成反比：

$$V=\frac{C}{P},\ (1.5\leqslant P\leqslant 8),$$

其中 C 是常数。

这种变量间的相互联系，在自然现象中是非常普遍的。因此有必要把它们概括为一般概念来进行研究。

定义 设有两个变量 x 和 y，如果对于 x 的变化范围内的每一个值，通过某依赖关系 f,y 就有一个确定的值与之对应，则称 y 是定义在这个变化范围上的 x 的**函数**，简称

为y是x的函数（y又称为**因变量**），记为$y=f(x)$。而y对x的依赖关系f称为**函数关系**。x称为**自变量**，x的变化范围称为函数的**定义域**。

我们用记号$f(a)$表示$x=a$时函数$f(x)$的值。

如果对于x的一个值，y有多个值与之对应，则称y是x的**多值函数**。上面定义的函数是**单值函数**。今后如不特殊指明时，所说的函数都是单值函数。

以上三例都是函数。下面举例说明，对于给定的函数，如何确定它的定义域，例如

1）多项式$f(x)=x^3-2x^2+3x+1$；它的定义域是全体实数，记为$-\infty<x<+\infty$。

这里函数关系f表示：$(\ )^3-2(\ )^2+3(\ )+1$这一系列运算。例如，$f(2)=2^3-2\times 2^2+3\times 2+1=7$；$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{3}{a}+1$。

2）函数$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$；当$x=\pm 2$时，它没有定义。因此它的定义域是：$-\infty<x<-2$，$-2<x<2$，以及$2<x<+\infty$。

3）函数$y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$；它的定义域是：$a\leqslant x\leqslant b\ (b>a)$。这是因为要使上式成立，必须$(x-a)(b-x)\geqslant 0$，即$x$不能取小于$a$的值，也不能取大于$b$的值。

如果我们把**数**和数轴上的**点**对应起来，那未限制在两个数a, b之间的一切数就是介于数轴上两点a, b之间的全部点，我们称它为**区间**。a, b称为区间的端点。这区间如果包含端点a, b就称为**闭区间**，记为$[a, b]$（即$a\leqslant x\leqslant b$），如果不包含端点a, b，就称为**开区间**，记为(a, b)（即$a<x<b$）。因此3）的定义域是闭区间$[a, b]$，而函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

的定义域是开区间(a, b)，多项式的定义域是全直线$(-\infty, +\infty)$。

自然，当x的变化范围为区间$a\leqslant x<b$时，就应记为$[a,b)$，而$a<x\leqslant b$就记为$(a,b]$。

在函数定义中"对于x的每一个值，y有一定确定值与之对应"，这句话应予以注意。它是说，取定一个x的值，就确定了一个y的值与之对应，并不要求对于不同的x值，y取不同的值。即使y取同一值，也不违背函数的定义。因此$y=C$（常数）可以看成某个变量x的函数。

上面所举的例子中，各个函数都是用它和自变量之间的一个关系式表示的。但不能以为任何函数都能用一个关系式来表示，有时函数需要用几个关系式来表示，也可能没有关系式。

反函数　我们已经介绍过，函数关系$y=f(x)$表示x之值确定后，随即有y的值被确定。那末，当y值给定之后，为了适应这一关系，必有适当的x被确定，可能对应的x不止一个值，例如由关系$y=x^2$，对于任一正数y，必有两个x的值x_1，与$x_2=-x_1$适合$y=x_1^2=x_2^2$。这就说明：x之值也随y之值而变。因此，这同一关系又可表为$x=g(y)$。它们的解析表达式$g(y)$和$f(x)$可以完全不同，习惯上总用x表示自变量，用y表示因变量，于是上面的关系式又可写成$y=g(x)$。$f(x)$和$g(x)$互相称为反函数。因此，当$g(x)$是$f(x)$的反函数，$x=g(y)$和$y=f(x)$便表示同一函数关系，在直角坐标系中是同一图象。但$y=g(x)$和$y=f(x)$的图象对于直线$y-x=0$对称。例如：

$$y=10^x\quad,\qquad y=\lg x$$

互为反函数，如图 1.1，其中虚线表示 $y=\lg x$。

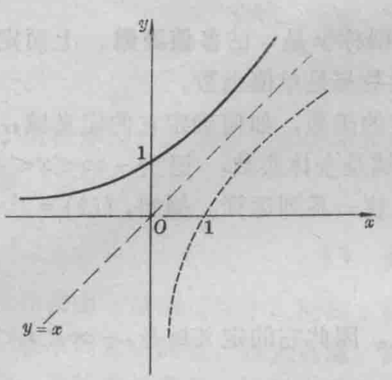


图 1.1

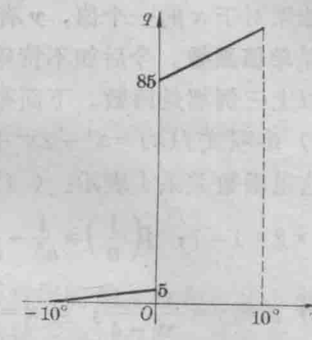


图 1.2

例 4　设有温度为 -10^0C 的冰一克，加热后变为 $+10^0C$ 的水，它所吸收的热量 q 和温度 τ 之间，由物理学可知有如下关系：当 τ 由 -10^0C 增加到接近 0^0C 时，$q=0.5\tau+5$；当 τ 由大于 0^0C 增加到 30^0C 时，$q=\tau+85$，于是 q 就是定义在 $[-10,0)$，$(0,10]$ 上的函数，记为

$$q=\begin{cases}0.5\tau+5, & -10\leqslant\tau<0,\\ \tau+85, & 0<\tau\leqslant 10.\end{cases}$$

象这样由几个关系式表示的函数通常又称为**分段函数**，它的图形也分成几段（图 1.2）。计算这种分段函数的值时，特别要注意自变量所取的值在哪个范围。例如，

当 $\tau_0=-3$ 时，则按 $q=0{,}5\tau+5$ 来计算，得

$$q_0=0.5(-3)+5=3.5(\text{卡}).$$

当 $\tau_0=2$ 时，则按 $q=\tau+85$ 来计算，得

$$q_0=2+85=87(\text{卡}).$$

例 5　在一昼夜间，气温 T 是时间 t 的函数。如果用自动记录器来记录，我们就得到表示它们之间关系的曲线(图1.3)。在 t 的变化范围($0\leqslant t\leqslant 24$(小时))内，取某值 t_0，在图上就得到横坐标为 t_0 的一点，过此点作平行于 T 轴的直线交曲线于点 P，则 P 的纵坐标 T_0 就是 T 的对应值。这时 T 与 t 的依赖关系是用曲线来表示而不是用关系式来表示的。

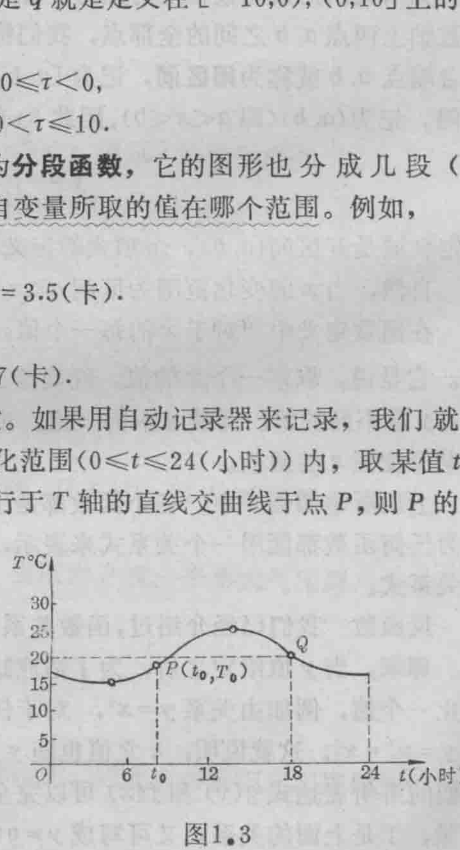


图1.3

以下几种函数，称为基本函数：

幂函数：$y=x^\alpha$；

指数函数：$y=a^x$；

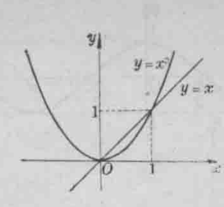
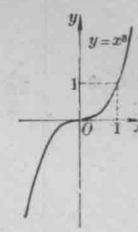
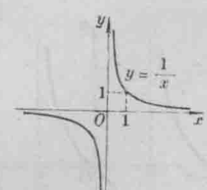
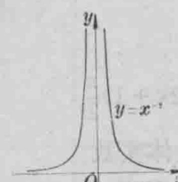
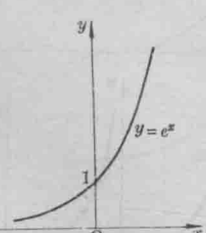
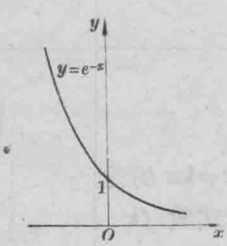
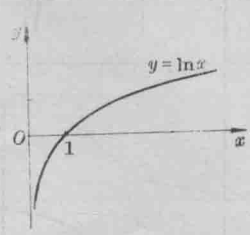
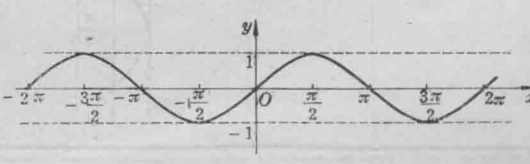
三角函数：$y=\text{siu}\,x$；$y=\cos x$；$y=\text{tg}\,x$ 等等；

对数函数：$y=\log_a x$；

反三角函数：$y=\text{arc}\sin x$；$y=\text{arc}\cos x$；$y=\text{arc tg}\,x$ 等等。

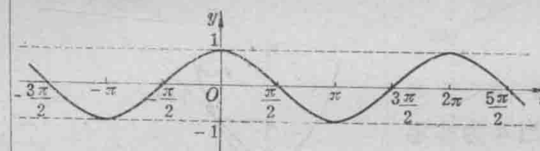
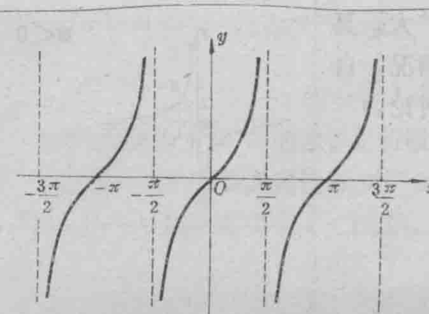
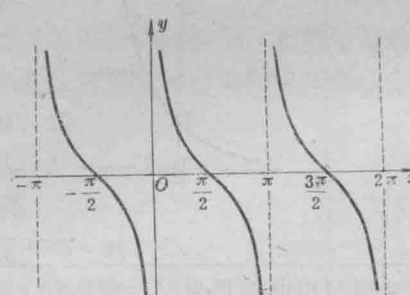
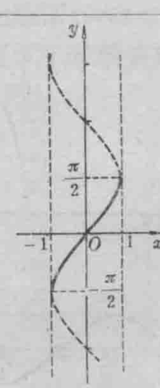
现在把基本函数的主要特性和图象表列如下。

基本初等函数表

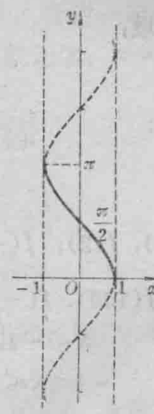
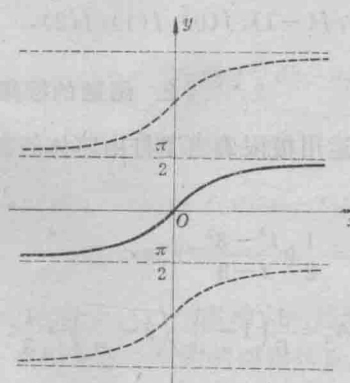
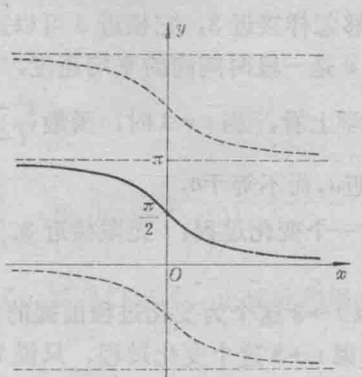
名称	表达式	定义域	图形	简单性质
幂函数	$y=x^\alpha$	$0<x<+\infty$ (当 α 为非零整数或分数时，定义域可扩大。具体情况，自行讨论。)	$\alpha>0$   $\alpha<0$  	图形都经过第一象限的点(1,1)。α 为偶数时，图形关于 y 轴对称；α 为奇数时，图形关于原点对称；当 α 为负数时，图形在原点间断
指数函数	$y=e^x$ $=\exp x$	$-\infty<x<+\infty$	 	图形都经过 y 轴上的点(0,1)。$y=e^x$ 经过(0,1)点后，随 x 的增大急速增大；$y=e^{-x}$ 经(0,1)点后随 x 的增大而逐渐衰减
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0$ $a\neq 1$	$0<x<+\infty$		图形都经过 x 轴上的点(1,0)。$y=\ln x$ 随 x 的增大而增大，但 x 越大，y 增大得越缓慢
三角函数	$y=\sin x$	$-\infty<x<+\infty$		以 2π 为周期的周期函数。图形关于原点对称，并界于 $y=1$ 与 $y=-1$ 两平行直线之间

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（续表）

名称	表达式	定义域	图形	简单性质
三角函数	$y=\cos x$	$-\infty<x<+\infty$		以2π为周期的周期函数。图形与 y 轴对称，并界于$y=1$与$y=-1$两平行直线之间
	$y=\mathrm{tg}\,x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$的全体实数（k 为整数）		以 π 为周期的周周函数。图形关于原点对称，在 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 处间断（k为整数）
	$y=\mathrm{ctg}\,x$	$x\neq k\pi$ 的全体实数（k 为整数）		以 π 为周期的周期函数。图形关于原点对称，在$x=k\pi$处间断（k为整整数）
反三角函数	$y=$ arc sin$x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$		$y=\text{arc}\sin x$ 的主值为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$，记作 arc sin x（图中的实线部分）

（续表）

名称	表达式	定义域	图形	简单性质
反三角函数	$y=$ arc $\cos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$		$y=\text{arc}\cos x$ 的主值为 $0\leqslant y\leqslant\pi$，记作 arc $\cos x$
	$y=$ arc tg x	$-\infty<x<+\infty$		$y=\text{arc tg}\,x$ 的主值为 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$，记作 arctg x
	$y=$ arc ctg x	$-\infty<x<+\infty$		$y=\text{arc ctg}\,x$ 的主值为 $0<y<\pi$，记作 arcctg$x$

习 题

1. 两个物理量之间存在函数关系的例子很多，试举几例。

2. 你能举一个分段函数的实际例子吗？

3. 试指出下列函数的定义域：

(1) $\log|x-3|$；　　(2) $\arcsin(x+3)$；

(3) $\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\arccos x$；　　(4) $\sqrt{16-x^2}+\sqrt{\sin x}$.

4. 计算函数值：

(1) $f(x)=2^x$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(-2)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$；

(2) $f(x)=\log x^2$，求 $f(100)$，$f(-100)$，$f(0.01)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & x>1,\end{cases}$

求 $f(-2),f(-1),f(0),f(1),f(2)$.

§2 函数的极限

在引言中，我们曾运用极限确定了自由落体的瞬时速度及平面图形的面积，并把它们分别记为

1) 当 $t\to 3$ 时，$\bar{v}=\frac{1}{2}g\frac{t^2-3^2}{t-3}\to 3g$；

2) 当 $n\to\infty$ 时，$A_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{3}$.

现在我们对这两个例子作进一步的分析。

首先，在例 1 中，$t\to 3$ 系指 t 无限接近 3，而永远不等于 3。所谓 t 无限接近 3，是说要 t 怎样接近 3 就能够怎样接近 3，它接近 3 可以达到任何程度。至于 t 不等于 3，这也是容易理解的，因为 $\bar{v}$ 是一段时间内的平均速度，就某一时刻来考虑平均速度在物理上是没有意义的。从数学上看，当 $t=3$ 时，函数 $\frac{t^2-3^2}{t-3}$ 也没有定义。今后，"$x\to a$"一般都理解为：x 无限接近 a，而不等于 a.

其次，$t\to 3$ 是这样一个变化过程：t 无限接近 3. 既可以取大于 3 的值，也可以取小于 3 的值。

第三，$\bar{v}\to 3g$，是以 $t\to 3$ 这个为变化过程前提的，也就是说，$\bar{v}$ 随着 t 无限接近 3 而无限接近 $3g$. 如果不考虑 $t\to 3$ 这个变化过程，只说 $\bar{v}\to 3g$，那是没有意义的。

例 2 的变化过程与例 1 不同，例 1 中的 t 趋于定数 3，而例 2 中的 n 是趋于无穷。

我们把上面两种情况综合起来，就有

定义 如果自变量 x 无限接近一定数 a（或趋于无穷）时，函数 $f(x)$ 无限接近一个

定数 A，那末，我们就说，$f(x)$ 当 x 趋于 a（或趋于无穷）时的**极限存在**，并且 A 就是它的**极限**，记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,\quad (\text{或} \lim_{x\to\infty} f(x)=A),$$

其中记号 $x\to\infty$，表示 $|x|$ 无限地增大。如果 x 变到一定程度以后，总取正值而无限增大就记为：$x\to+\infty$；总取负值而 $|x|$ 无限增大就记为：$x\to-\infty$。

于是上面两个例子可以记为

$$\lim_{t\to 3} \bar{v}=3g;$$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n=\frac{1}{3}.$$

下面举两个极限不存在的例子。

例如，函数 $\frac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时极限是不存在的，因为当 x 大于 0 而趋于 0 时，$\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$；当 x 小于 0 而趋于 0 时，$\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$. 这就是说，当 x 趋于 0 时，函数 $\frac{|x|}{x}$ 不能接近确定的值。

又如，从函数 $y=\operatorname{tg} x$ 的图形可知：当 x 小于 $\frac{\pi}{2}$ 而趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg} x\to\infty$；当 x 大于 $\frac{\pi}{2}$ 而趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg} x\to-\infty$. 所以，当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg} x$ 的极限不存在。

为了方便，一般我们也把"当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时 $f(x)\to\infty$"记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.\qquad (\text{或} \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

这里并不是说"∞"是 $f(x)$ 的极限，而是表示 $f(x)$ 无限增大的趋势。

为了求比较复杂的函数的极限，我们来建立极限的四则运算。

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 皆存在，则有

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x)=c\cdot\lim_{x\to a} f(x),\ (\text{其中 } c \text{ 是常数}),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\quad (\text{设} \lim_{x\to a} g(x)\neq 0).$$

上面这些公式在这里就不证明了。对我们来说，正确地利用它们来计算极限是重要的。

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x(2+3x)}{x-1}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1\neq 0$，用除法公式，得

$$\lim_{x\to 2}\frac{x(2+3x)}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x\,(2+3x)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}$$

但由乘法公式得

$$\lim_{x\to 2}x(2+3x)=\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}(2+3x)=2\cdot(2+3\lim_{x\to 2}x)=16,$$

于是

$$\lim_{x\to 2}\frac{x(2+3x)}{x-1}=16.$$

例 2　计算 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\infty$，　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{1-x^2}=\infty$，即极限不存在，所以不能用减法公式。但当 $x\neq 1$ 时

$$\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1+x-2}{1-x^2}=-\frac{1-x}{1-x^2}=-\frac{1}{1+x},$$

于是

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}.$$

例 3　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$.

解　因为分母的极限为 0，不能用除法公式。但

$$\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}=\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}$$

$$=\frac{a+x-a}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}},$$

因为最后这个分式当 $x\to 0$ 时有极限，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

例 4　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-4x+5}$.

解　$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

最后，我们介绍一个以后要用的重要极限。

例 5　证明　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

证　作单位圆，如图1.4所示。x 表圆心角的弧度。

扇形 AOD 的面积大于$\triangle AOB$ 的面积，而小于 $\triangle AOC$ 的面积。但扇形 AOD 的面积 $=\frac{1}{2}\overline{OA}^2\cdot x=\frac{1}{2}x$；$\triangle AOB$ 的的面积 $=\frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x$；$\triangle AOC$ 的面积 $=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{OA}=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. 故有不等式

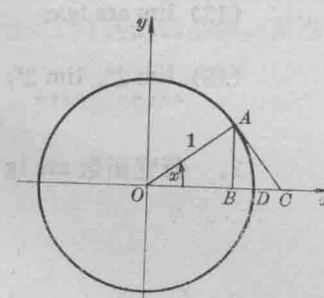


图1.4

$$\frac{1}{2}\cos x\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x.\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

即

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

从而

$$\frac{1}{\cos x}>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，$0<-x<\frac{\pi}{2}$，从上式有 $\cos(-x)<\frac{\sin(-x)}{-x}<\frac{1}{\cos(-x)}$，由于 $\cos(-x)=\cos x$，$\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$，上式也是成立的。又因，当 $x\to 0$ 时，$\cos x\to 1$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

利用这个结果，求某些函数的极限是方便的。例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2.$$

习　题

1.　求极限（如果极限不存在，就指出它的变化趋势）：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+5}{x^2+7}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3+5x^2}{x^4-15x^2}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})$；　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}$；　　（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$；

（9）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$；　　（10）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\alpha x-\sin^2\beta x}{x\sin x}$；

（11）$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arc\,tg} x$；　　（12）$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{are\,tg} x$；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com