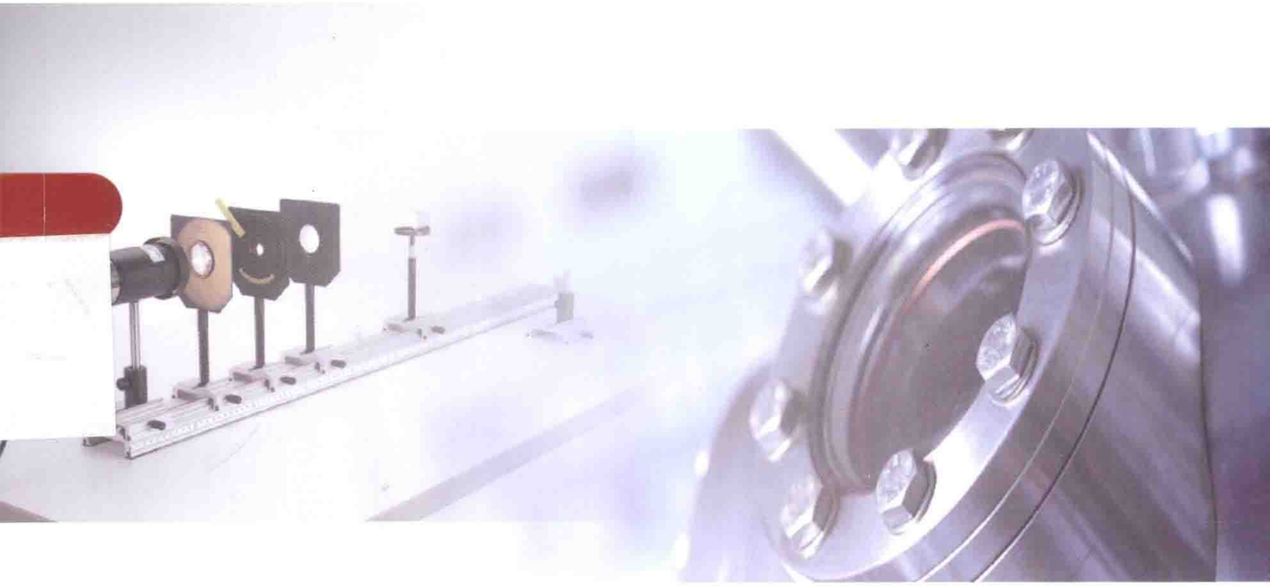
大学物理实用教程

DAXUE WULI SHIYONG JIAOCHENG

——基于建构性教学观

主　编　史祥蓉
副主编　王建中



国防工業出版社
National Defense Industry Press

大学物理实用教程

基于建构性教学观

主　编　史祥蓉
副主编　王建中

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是基于建构性教学观的大学物理实用教程。书中将大学物理的知识整合，形成若干讲内容，每一讲都采用问题式教学方法，力求做到从学习者的角度出发，帮助、引导学习者在学习的过程中积极思考，从而主动建构起自己的知识体系。

本书可供高等工科学校各专业、理科非物理专业以及成人教育相关专业的广大师生使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实用教程：基于建构性教学观/史祥蓉主编．—北京：国防工业出版社，2015.5

ISBN 978-7-118-10077-8

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①史…　Ⅲ．①物理学—高等学校—教材　Ⅳ．①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 128841 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710×1000　1/16　**印张** 21½　**字数** 390 千字

2015 年 5 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—2000 册　**定价** 66.00 元

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

前　言

在教育心理学领域中，建构主义作为一种新的学习理论对教学提出了一系列新解释；在知识观上强调知识的动态性，知识并不是对现实世界的绝对正确的表征，不是放之各种情境皆准的教条；在学生观上强调学习者的学习潜能及其经验世界的丰富性、差异性；在学习观上强调学习的主动建构性。试图实现知识广泛而灵活的迁移，这些观点对转变教学观念、改革传统教学具有重大意义。基于这些观点，建构主义者提出了一系列改革教学的设想，比如基于问题式学习，课题式教学，等等。

本书的特点是采用基于建构性教学观的问题式教学方法。力求做到从学习者的角度出发，帮助、引导学习者在学习的过程中建构自己的知识体系，一方面使学生建构起真正灵活的知识体系，另一方面也可以提高他们解决问题的能力，并在问题的发现与解决中不断发展他们的求知欲和求知能力。

具体做法是将大学物理的知识整合，形成课题式教学；一般以一节或相关联的几节内容为一个课题，即为一讲。同时，在每一讲中又采用问题式的教学方法，即从学习者的角度出发提出一系列的问题，让学习者以原有的知识为基础思考，从而主动地建构起属于自己的知识体系。这样不仅有利于提高学生的学习积极性，更有利于培养学生的逻辑思维能力和解决问题的能力。

本书在每一章中，首先介绍该章的教学内容、教学要求及授课设计，有利于广大师生对课程内容的理解和掌握。

全书由史祥蓉主编，王建中副主编。史祥蓉编写了除热学以外所有内容，并对全书进行了统稿和修订，王建中编写了热学部分的内容。

解放军理工大学韩仙华教授审阅了本实用教程的全部内容，提出了许多宝贵建议，在此表示衷心感谢！

本教程是作者多年教学实践及教学研究的结果，由于水平有限，不足或错误之处敬请批评指正。

作　者
2015 年 3 月

目　录

第一章　质点的运动

【教学内容】

第一讲　参考系　坐标系　质点　位置矢量　位移　速度　加速度

第二讲　运动学两类问题的处理

第三讲　自然坐标描述　角量描述　参照系的变换

【教学要求】

1. 通过质点模型的建立,理解物理学研究中物理模型的特点,体会物理模型在探索自然规律中的作用。

2. 理解位置矢量、位移、速度、加速度、角速度、角加速度、切向加速度与法向加速度等物理概念,掌握描述质点运动的方法,掌握线量和角量的关系。

3. 能熟练运用高等数学知识处理运动学两类问题,能在直角坐标系和自然坐标系下计算质点在平面内运动的有关问题。理解运动的合成与分解。

4. 理解相对运动(相对平动),会用速度合成公式。

【授课设计】

分三讲完成。第一讲:参考系　坐标系　质点　位置矢量　位移　速度　加速度,重点讲基本概念,掌握描述质点运动的方法。第二讲:运动学两类问题的处理(以直角坐标系为基础讲解),掌握各物理量间的关系。第三讲:自然坐标描述角量描述参照系的变换,讲解线量与角量的关系以及相对平动中位移、速度、加速度的变换公式,重点是切向加速度与法向加速度的物理含义以及实际中的运用。

第一讲　参考系　坐标系　质点
位置矢量　位移　速度　加速度

【问题设计】

1. 什么是质点?
2. 描述质点运动的前提是什么?
3. 如何描述质点的位置?

4. 如何描述质点位置的变化?
5. 如何描述质点位置变化的快慢?
6. 如何描述质点速度变化的快慢?

【问题讲授】

问题1:什么是质点?

质点:研究物体的运动时,若可以忽略其形状和大小,只把该物体当成是一个具有质量的几何点,这样的点通常叫作“质点”。显然,质点是一个理想模型。

注意:①“若可以忽略”实际上是个“精度”问题,要根据问题的精度要求来判断。②引入“质点”目的是抓住主要因素剔除次要因素,这是使实际复杂问题变简单的重要方法。

对于质点运动的研究可分为两方面:①如何描述质点的运动? 即运动学。②质点运动状态改变的原因? 即动力学。本章质点的运动属于质点运动学,即研究如何描述质点的运动。

那么,当一个质点在运动时,我们又如何描述其运动呢?

由于运动描述的相对性,即对于同一运动,当参照物不一样时描述的结果是不一样的,所以在描述质点的运动之前必须先选好参考系。

问题2:描述质点运动的前提是什么?

在描述质点的运动之前必须先选好参考系或坐标系,这是描述质点运动的前提。

参考系:描述物体运动时被选作参考的物体。其特点:①具有任意性,有方便之分;②不同参考系对同一物体的描述结果也不同,反映出运动的相对性。

坐标系:定量描述质点运动的数学工具,固定在参照系上(故坐标系有时就是参照系的代名词)。不同坐标系中同一运动的数学规律不同,所以选择适当的坐标系可以简化问题的处理。常见类型:直角坐标系、自然坐标系、球坐标系、柱坐标系、极坐标系。

确定了描述的前提,即坐标系建立好后,如何对质点的运动进行描述呢? 首先必须给出质点的位置。又如何描述质点的位置呢?

问题3:如何描述质点的位置?

提问:以前大家是如何描述质点的位置? 坐标。现在我们将用**位置矢量**描述质点的位置。

为何要用位置矢量? 有何优点? 随着课程的深入大家就会明白,现在我们先看什么是位置矢量。

定义:从坐标原点到质点所在位置的有向线段。

如图 1－1 所示，若质点位于 P，坐标原点为 O，则有向线段$\overrightarrow{OP}$就是质点 P 的位置矢量，用符号 $\vec{r}$ 表示。其大小是$\overrightarrow{OP}$的长度，其方向由 O 指向 P。

此为图形描述，如何将其用数学的形式定量地给出呢？以下以直角坐标系为例，讨论位置矢量。

如图 1－2 所示，在直角坐标系中，位置矢量 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$可表示为

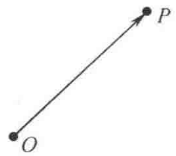


图 1－1

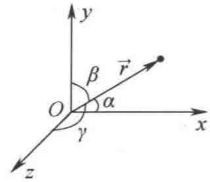


图 1－2

$$\vec{r}=x\vec{\mathrm{i}}+y\vec{\mathrm{j}}+z\vec{\mathrm{k}}$$

其大小：

$$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

其方向可用方向余弦表示：

$$\cos\alpha=x/r,\cos\beta=y/r,\cos\gamma=z/r$$

例 1－1：对于在 xy 平面内，以原点 O 为圆心做匀速圆周运动的质点，试用半径 r、角速度 ω 和单位矢量表示其 t 时刻的位置矢量。已知在 $t=0$ 时，$y=0$，$x=r$，角速度 ω 如图 1－3 所示。

解：位置矢量

$$\vec{r}=x\vec{\mathrm{i}}+y\vec{\mathrm{j}}=r\cos\omega t\ \vec{\mathrm{i}}+r\sin\omega t\ \vec{\mathrm{j}}$$

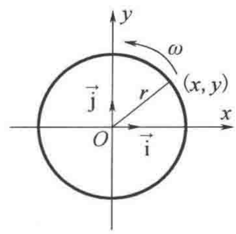


图 1－3

讨论：(1) 由此可以看出：当质点运动时，其位置随时间变化，即

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

其位置矢量随时间变化的方程式即为质点运动的运动方程。而运动方程包含有质点运动的全部信息，知道运动方程，即可确定质点在任意时刻的位置、速度和加速度以及质点的轨迹方程等。这就是用位矢描述的好处。

该质点的运动方程：

矢量形式

$$\vec{r}(t)=r\cos\omega t\vec{\mathrm{i}}+r\sin\omega t\vec{\mathrm{j}}$$

参数形式

$$x(t) = r\cos\omega t; y(t) = r\sin\omega t$$

（2）该质点的轨迹方程？

运动方程的参数形式消去参数 t 即得到轨迹方程

$$x^2 + y^2 = r^2$$

到此为止，如何描述质点的位置，我们已经清楚了，但当质点运动时，质点的位置在不断地改变，又如何描述位置的变化呢？

问题4：如何描述质点位置的变化？

物理学中用质点起始位置指向终了位置的有向线段描述质点位置的变化，定义为位移矢量。位移矢量定义：**从起始位置指向终了位置的有向线段。**

如图1-4所示：若 t_1 时刻质点在 A 点，位置矢量为 $\vec{r}_1$，t_2 时刻质点在 B 点，位置矢量为 $\vec{r}_2$，则在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内，质点的位移矢量即为有向线段$\overrightarrow{AB}$，表示为

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

直角坐标系中

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{\mathrm{i}} + (y_2 - y_1)\vec{\mathrm{j}} + (z_2 - z_1)\vec{\mathrm{k}} \\ &= \Delta x\vec{\mathrm{i}} + \Delta y\vec{\mathrm{j}} + \Delta z\vec{\mathrm{k}}\end{aligned}$$

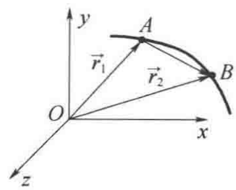


图1-4

注意：位移 $\Delta\vec{r}$ 与路程 Δs（AB 弧长）的区别与联系。区别：①定义及量值都不同；②位移 $\Delta\vec{r}$ 为矢量、路程 Δs 为标量。联系：从极限情况看，即 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\vec{r}\to \mathrm{d}\vec{r}$，$\Delta s\to \mathrm{d}s$；此时 $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$。

讨论：Δr 与 $\Delta\vec{r}$ 的量值相等吗？$\Delta r = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1|$；$|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$，显然：$\Delta r \neq |\Delta\vec{r}|$。

例1-2：如图1-5所示，在高出地面25m的高楼平台上，以初速度 $v_0 = 20\mathrm{m/s}$竖直向上抛一物体。问：

（1）抛出3s后物体的位置（用位矢表示）及位移、路程。

（2）物体回到平台时位移为多少？时间为多少？落到地面时位移又为多少？

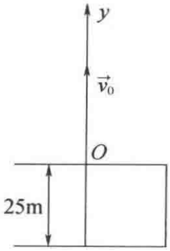


图1-5

解：建立如图1-5所示的坐标系

则其运动方程为

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{\mathrm{j}}$$

（1）将 $t = 3\mathrm{s}$ 代入得抛出3s后物体的位置

$$\vec{r} = 15\vec{\mathrm{j}}$$

位移

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(3)-\vec{r}(0)=15\vec{j}$$

因为 $t=v_0/g=2\text{s}$ 时，质点达到最高点，所以 3s 时其路程

$$\Delta s=\left(20\times2-\frac{1}{2}\times10\times2^2\right)+\frac{1}{2}\times10\times1^2=25\text{m}$$

（2）根据位移的定义可得，物体回到平台时位移

$$\Delta\vec{r}=0$$

令回到平台时的时间为 t，则

$$0=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$t=\frac{2v_0}{g}=4\text{s}$$

根据位移的定义可得，物体落到地面时位移

$$\Delta\vec{r}=-25\vec{j}$$

到此为止，如何描述质点位置的变化，我们已经清楚了，但位置的变化是有快慢之分的，又如何描述位置变化的快慢呢？

问题 5：如何描述质点位置变化的快慢？

如图 1－6 所示：若 t_1 时刻质点在 A 点，t_2 时刻质点在 B，在 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内，质点的位移为 $\Delta\vec{r}$，路程为 Δs。则$\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$能否反映位置变化的快慢呢？显然是可以的，但反映的是这段时间内变化的平均值，所以，物理学中用它来描述质点位置变化快慢的平均值，定义为平均速度矢量。即在 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内，质点的平均速度矢量定义

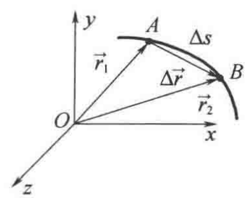


图 1－6

$$\bar{\vec{v}}\equiv\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

当 Δt 趋于零呢？反映的是 A 点速度，所以瞬时速度矢量定义

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

同理可得：平均速率定义

$$\bar{v}\equiv\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

瞬时速率定义

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

根据以上定义及极限情况下$|\mathrm{d}\vec{r}|=\mathrm{d}s$可得:①$v=|\vec{v}|$,即速度矢量的大小等于速率;②速度的方向沿着切线的方向。

将$\vec{r}=x\vec{\mathrm{i}}+y\vec{\mathrm{j}}+z\vec{\mathrm{k}}$代入$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$可得,速度在直角坐标系中的表示

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{k}}$$

其中三个分量式及速度的大小为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2}$$

由以上讨论可以看出$v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2}=\frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。

请问:$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$吗?否!$v$是速率,是路程对时间的变化率$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,而$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$是位置矢量大小对时间的变化率,所以$v\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$。

注意速度的“三性”:矢量性、相对性、瞬时性。

例1-3:已知质点运动方程为:$\vec{r}=R\cos\omega t\vec{\mathrm{i}}+R\sin\omega t\vec{\mathrm{j}}$,其中$R$、$\omega$为常量。求质点的速度。

解:$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-R\omega\sin\omega t\vec{\mathrm{i}}+R\omega\cos\omega t\vec{\mathrm{j}}$

其中

$$v_x=-R\omega\sin\omega t,v_y=R\omega\cos\omega t$$

速度的大小

$$v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}=R\omega$$

速度的方向

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=-\mathrm{ctan}\omega t=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\omega t\right)$$

θ是$\vec{v}$与x轴正向的夹角。

例1-4:如图1-7所示,由楼窗口以水平初速度v_0射出一发子弹,取枪口为原点,沿水平方向为x轴,竖直向下为y轴,并取发射时刻t为0,试求:

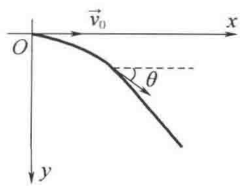


图1-7

(1)子弹在任一时刻t的位置坐标及轨迹方程;

(2)子弹在t时刻的速度。

解:(1) 根据平抛运动的特性,可得子弹在任一时刻 t 的位置坐标

$$x=v_0t;y=\frac{1}{2}gt^2$$

这也就是子弹运动方程,消取参数 t 可得轨迹方程

$$y=\frac{1}{2}x^2g/{v_0}^2$$

(2) 根据 $v_x=\frac{dx}{dt},v_y=\frac{dy}{dt}$可得子弹在 t 时刻的速度分量

$$v_x=\frac{dx}{dt}=v_0,v_y=\frac{dy}{dt}=gt$$

所以,子弹在 t 时刻的速度

$$\vec{v}=v_0\vec{i}+gt\vec{j}$$

到此为止,如何描述质点位置变化的快慢?大家应该已经清楚了,用速度!但速度也是变化的,且变化也有快慢之分,又如何描述速度变化的快慢呢?

问题 6:如何描述质点速度变化的快慢?

如图 1-8 所示:若 t_1 时刻质点在 A 点,速度为 $\vec{v}_1$,t_2 时刻质点在 B,速度为 $\vec{v}_2$,在 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内,质点的速度改变量是 $\Delta\vec{v}$。请问:$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$反映的是什么?该段时间内速度变化的平均值,物理学中将其定义为平均加速度,即在 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内,质点的平均加速度矢量定义

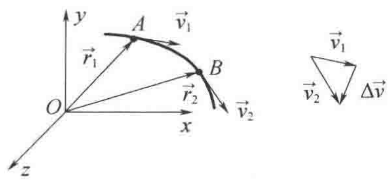


图 1-8

$$\overline{\vec{a}}\equiv\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

当 Δt 趋于零呢?反映的是 A 点的瞬时加速度,瞬时加速度矢量定义

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

将 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$代入,可得:$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$。直角坐标系中,加速度可表示为

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

其中

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2};a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2};a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}$$

例 1－5：已知质点运动方程为：$\vec{r}=R\cos\omega t\,\vec{i}+R\sin\omega t\,\vec{j}$，其中 R、ω 为常量。求质点的加速度。并证明其指向圆心。

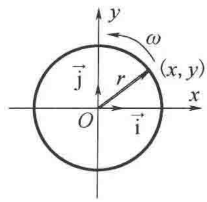


图 1－9

解：质点的加速度

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-R\omega^2\cos\omega t\,\vec{i}-R\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}=-\omega^2\vec{r}$$

即加速度 $\vec{a}$ 与位置矢量 $\vec{r}$ 方向相反，而位置矢量 $\vec{r}$ 是背离圆心的，如图 1－9所示，所以加速度 $\vec{a}$ 指向圆心。

【总结与回顾】

本次课主要讨论了描述质点运动的前提以及描述质点运动的几个物理量，位置矢量、位移、速度、加速度。由以上讨论可知：描述质点运动的几个物理量是密切相关的，当知道位置矢量 $\vec{r}(t)$ 后，位移 $\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$，速度 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$，加速度 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$即可方便求出。

第二讲　运动学两类问题的处理

【问题设计】

1. 位矢、速度、加速度各物理量间的关系？已知其中一个如何求解其他各量？
2. 直线运动的两类问题如何处理？
3. 曲线运动的两类问题如何处理？
4. 什么是自然坐标系？

【问题讲授】

问题 1：位矢、速度、加速度各物理量间的关系？已知其中一个如何求解其他各量？

关系：$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$；$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

由此可知：描述质点运动的几个物理量是密切相关的，当已知其中一个后，就可由它们之间的关系求出其他几个来，那么，如何求呢？

当已知质点的位置矢量随时间的变化关系即运动方程 $\vec{r}(t)$，求速度 $\vec{v}(t)$，

加速度 $\vec{a}(t)$ 时，所采取的方法是微分，速度 $\vec{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$，加速度 $\vec{a}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$，此类问题是运动学的**第一类问题**。

当已知质点运动的加速度 $\vec{a}(t)$ 或速度 $\vec{v}(t)$ 及初始条件 $\vec{r}(t=0)$、$\vec{v}(t=0)$，求质点的运动方程 $\vec{r}(t)$ 或速度 $\vec{v}(t)$ 时，所采取的方法是积分，此类问题是运动学的**第二类问题**。

以上是运动学的两类问题。而运动又可分为：直线、曲线。具体到：直线、曲线中如何解决这两类问题？首先看直线。

问题 2：直线运动的两类问题如何处理？

对于直线运动，坐标系选一维直角坐标系较为简单，此时，所有的矢量可转用标量处理，其方向由正、负来反映。

1. 第一类问题

例 1－6：已知质点运动方程 $x(t)=\sin(t^2)$，$(x:\mathrm{m},t:\mathrm{s})$，求质点的速度 $v(t)$、加速度 $a(t)$。

解：$v(t)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t\cos(t^2)$

$$a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2\cos(t^2)-(2t)^2\sin(t^2)$$

例 1－7：在离水面高为 h 的岸边，有人用绳拉船靠岸，如图 1－10 所示。若拉绳速率 v_0 保持恒定，试求船速与船到岸边的距离的关系，船的加速度，并说明船的运动。

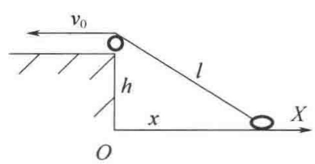


图 1－10

解：建立如图 1－10 所示的坐标系，设在时刻 t 船的坐标为 x，显然 $x>0$，x 的量值等于船到岸边的距离，并且有：$x=\sqrt{l^2-h^2}$，其中 l 为船到滑轮的绳长。

船的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

由于 l 随时间减小，因此有

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-v_0$$

所以船速与船到岸边的距离 x 的关系

$$v=-\frac{lv_0}{\sqrt{l^2-h^2}}=-\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}v_0$$

船的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-\frac{h^2v_0^2}{(l^2-h^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{h^2v_0^2}{x^3}$$

可见,$v<0$,$a<0$,表明船的速度、加速度的方向相同,但都与 x 轴的正向相反,因此船向岸边做加速运动。由于加速度不是常量,所以船的运动是变加速运动。

说明:由例 1－7 可以看出,运动学的第一类问题并不都像例 1－6 那么简单,x、v 不一定只是 t 的函数,像例 1－7 所示,此时微分时就要稍微用一些技巧,变量代换。

2. 第二类问题

例 1－8:已知质点直线运动的加速度 $a(t)=6+24t$,且 $v\Big|_{t=0}=2$,$x\Big|_{t=0}=1$,求质点运动的速度 $v(t)$ 及运动方程 $x(t)$。

解:由 $a(t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$得

$$v(t)=v\Big|_{t=0}+\int_0^t a(t)\mathrm{d}t=2+\int_0^t(6+24t)\mathrm{d}t=2+6t+12t^2$$

由 $v(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$得

$$x(t)=x\Big|_{t=0}+\int_0^t v(t)\mathrm{d}t=1+\int_0^t(2+6t+12t^2)\mathrm{d}t=1+2t+3t^2+4t^3$$

说明:本题是最基本的一维直线运动的第二类问题。

例 1－9:已知质点做直线运动 $\vec{v}_0=100\vec{\mathrm{i}}\,(\mathrm{m/s})$,$\vec{a}=-10v\vec{\mathrm{i}}\,(\mathrm{m/s^2})$,求质点停止前运动的路程。

分析:题目要求质点停止前运动的路程,显然必须知道 $v(t)$ 与 $x(t)$,而本题已知的是 $\vec{a}(v)$,所以应属于一维直线运动的第二类问题,但由于 $\vec{a}(v)$ 不是 t 的函数,所以积分也不是直接对 t 的积分,应分离变量再积分。

解:由 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-10v$ 得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-10\mathrm{d}t$$

两边积分得