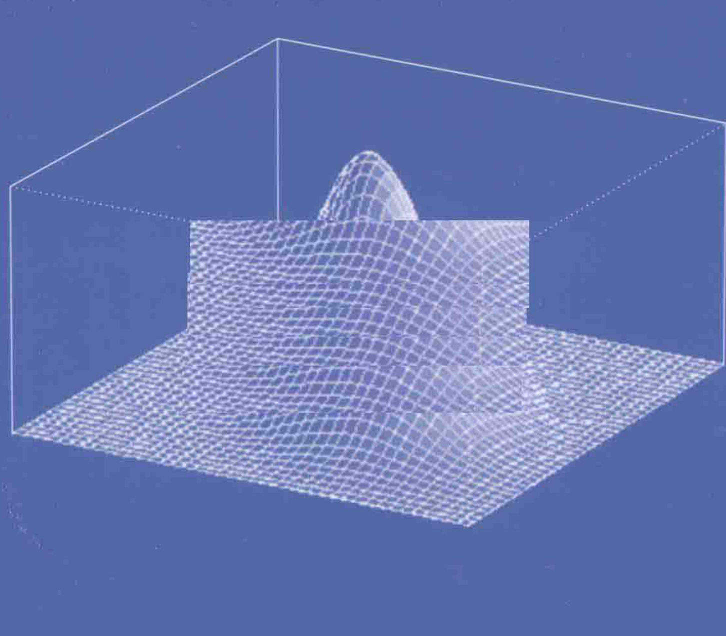
普通高等教育“十二五”规划教材

GAILÜLUN YU
SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主编 王红蔚



郑州大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主编　王红蔚

郑州大学出版社
郑州

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王红蔚主编. —郑州:郑州大学出版社,2015.2

ISBN 978-7-5645-1919-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 179783 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:王　锋　　发行部电话:0371-66966070
全国新华书店经销
郑州龙洋印务有限公司印制
开本:787 mm×1 092 mm　1/16
印张:19
字数:450 千字
版次:2015 年 2 月第 1 版　　印次:2015 年 2 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-1919-3　　定价:39.60 元

作者名单

主　编　王红蔚

副主编　孔　波　牧少伯

　　　　　张宏波　郑喜英

内容提要

本书包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机向量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析等十章。本书可供高等院校理科、工科及经济类各专业作为教材使用。

河南省高校特色专业建设点
数学教育专业建设成果

河南省高等教育教学改革研究项目
研究成果

“应用数学”重点学科成果

编者的话

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的学科，它的理论和方法已被广泛应用于自然科学、工程技术、社会科学及经济管理等众多领域。概率论与数理统计是高等学校理工类、经管类、教育类等专业的必修基础课程。在多年的教学中，我们感到学生在学习这门课程时擅长形式计算：求概率、算分布、求均值、找估计量等，而对有趣的背景、独特的思维、数据的意识、广泛的应用重视不够。

本书力图从实际问题出发，用数据说话，突出概率统计的思想方法，把冰冷的美丽变成火热的思考，展示既有结果又有过程，既有途径又有技巧的绚丽画卷，激发学生的学习兴趣，从而使学生较为快乐地学习和掌握概率论与数理统计的基础知识，达到培养学生应用能力的目的。

本书结合编者多年教学经验，力求把学科知识的系统性和教学方法的多样性相结合，尽量通俗易懂、适度严谨。比如，没有引进事件域，避免了公理化定义，而注重对频率稳定性的分析；只介绍中心极限定理的背景和应用，略去了中心极限定理的证明。

我们参考了国内外许多概率论与数理统计教材，引用了不少好的例题和习题，为此，我们向这些作者表示深深的谢意。

本书的编写分工如下：第一、第五章由王红蔚（河南教育学院）编写，第二、第三章由张宏波（河南教育学院）编写，第七、第八章由孔波（河南教育学院）编写，第九、第十章由郑喜英（黄河科技学院）编写，第四、第六章的编写和全部习题的配备由牧少伯（河南教育学院）完成。

由于水平所限，书中不当之处在所难免，敬请读者指正。

编者

2014 年 3 月

目 录

第一章　随机事件与概率

本章主要介绍概率论中常用的基本概念与术语. 包括随机试验与样本空间、随机事件及其运算、概率的定义及基本性质、条件概率与独立性. 同时,还介绍应用非常广泛的两类概率模型:等可能概型和 Bernoulli 概型.

1.1　样本空间与随机事件

本节介绍随机试验、样本空间、随机事件等基本概念. 并讨论随机事件间的基本关系及运算,这是定义概率与计算概率的基础.

一、随机试验

在日常生活中,存在两类不同的现象. 其中一类现象在某一条件下一定发生. 例如,“在真空中,光的传播速度必为定值 (3×10^8 km/s)”“在标准大气压下,纯水温度降至 0 ℃必然会结冰”等. 这类现象称为**确定性现象**. 另一类现象,在一定条件下可能发生的结果不能事先预知,既有可能发生,也有可能不发生. 例如,“掷一枚骰子,出现 6 点”“买一注彩票,中一等奖”等. 这类现象称为**随机现象**.

研究随机现象的出发点是做试验(或观察). 如,掷一枚均匀的骰子,观察出现的点数;又如,从一个装有 6 个红球、4 个绿球的盒子中摸出一个球,观察其颜色. 这类试验具有如下共同特点:

(1) 试验可以在相同(或大致相同)的条件下重复进行;

(2) 试验的可能结果不止一个,并且试验的所有可能结果是明确知道的;

(3) 每次试验出现且只出现这些结果中的一个,但在试验之前无法确定出现哪一个

结果.

我们把具有上述三个特征的试验称为**随机试验**,简称为**试验**,并记为 T.

例 1.1　下面是随机试验的一些例子:

(1)抛一枚均匀硬币,观察朝上一面的图案;

(2)抛一枚均匀硬币三次,观察朝上一面的图案;

(3)抛一枚均匀硬币三次,记录硬币正面朝上的次数;

(4)掷一枚均匀骰子,记录出现的点数;

(5)记录某零售商店一小时内收到百元面值钞票的张数;

(6)某人进行投篮游戏,投中为止,记录其总的投篮次数;

(7)在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的使用时间;

(8)某人到达一公交车站,记录其等车时间(设每 10 分钟有一辆车经过).

容易验证,这些试验都符合上述的三个要求,因而都是随机试验.

二、样本空间

对于随机试验 T,我们知道,试验所有可能的结果在试验之前是明确知道的,从而由试验所有可能的结果构成的集合是明确定义的,一般称该集合为试验 T 的**样本空间**. 样本空间中的元素,即每个可能结果(或结局)称为**样本点**. 样本空间和样本点分别用 Ω 和 ω 表示. 在这样的记号下显然有 $\omega \in \Omega$.

在确定了样本空间之后,为了将试验结果描述出来,还需要对试验结果进行适当的标记. 例如对例 1.1 中的(1),如果用 H 表示出现正面(head),用 T 表示出现反面(tail),则该试验的样本空间可表示为 $\Omega_1=\{H,T\}$. 采用同样的标记方式,例 1.1 中的(2)的样本空间为:$\Omega_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$.

类似地,其他几个试验的样本空间如下:

$$\Omega_3=\{0,1,2,3\},\qquad \Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\},$$

$$\Omega_5=\{0,1,\cdots\},\qquad \Omega_6=\{1,2,\cdots\},$$

$$\Omega_7=\{t \mid t\geqslant 0\},\qquad \Omega_8=\{t \mid t\in[0,10]\}.$$

样本空间是概率论中的一个重要的基本概念,由例 1.1 可知:

(1)样本空间是一个抽象的集合,由随机试验到样本空间这一数学概括使我们可以用集合论的语言来描述概率论的概念;

(2)样本的标记方式不唯一,从而同一随机试验的样本空间可以有不同的表示方式,例如对例 1.1(1),如果用 1 表示出现正面,用 0 表示出现反面,则这时 $\Omega_1=\{0,1\}$;

(3)样本空间可以是有限集(例如 Ω_1,Ω_2),也可以是无限集(例如 Ω_6,Ω_7);

(4)样本空间的选取由试验的目的决定,例如对例 1.1 中(2)和(3),虽然试验过程一样,但试验目的不一样,所以其样本空间也不一样.

三、随机事件

在用随机试验研究随机现象的过程中，我们常常关心某种特定的结果是否出现，例如在掷骰子的试验中[例 1.1(4)]，我们有时会关心结果是否是偶数点，用样本点可以表示为 $A=\{2,4,6\}$，显然 A 是 Ω_4 的一个子集.

一般地，我们称试验 T 的样本空间 Ω 的子集为**随机事件**，简称**事件**. 随机事件常用大写字母 A,B,C 等表示. 在一次试验中，当且仅当某一子集 A 中的一个样本点 ω 出现时，称**事件 A 发生**，这时也把 ω 称为事件 A 的**有利样本点**.

一些特殊的随机事件包括：

基本事件：由一个样本点组成的单点集 $\{\omega\}$；

必然事件：每次试验都必然会发生的事件，即由所有样本点组成的事件，即样本空间 Ω；

不可能事件：每次试验都不会发生的事件，即任意样本点都不是其有利样本点，即空集 $\varnothing$.

严格地说，必然事件和不可能事件已经不具有随机性，但为了理论研究与应用的方便，我们仍把其称为事件. 另外，从理论上讲，并不是样本空间的所有子集都是随机事件，然而在应用概率论中我们不必关心这一细微差别.

下面举几个事件的例子.

例 1.2　考虑例 1.1 中的试验.

在(2)中，用 A 表示"第一次出现的是正面"，用 B 表示"三次试验结果均为同一面"，则

$$A=\{HHH,HHT,HTH,HTT\},$$
$$B=\{HHH,TTT\}.$$

在(4)中，用 O 表示"出现奇数点"，用 E 表示"出现偶数点"，则

$$O=\{1,3,5\},\quad E=\{2,4,6\}.$$

在(7)中，若规定灯泡的寿命超过 1 万小时为合格，则 $C=$"灯泡为合格品"可表示为

$$C=\{t\mid t>10\,000\}.$$

在(8)中，用 D 表示"等车时间不超过 5 分钟"，则

$$D=\{t\mid t\in[0,5]\}.$$

四、事件间的关系与运算

对随机试验，其样本空间中往往有许多随机事件需要考虑，有些比较复杂，有些比较

简单.分析事件之间的关系,特别是找出较简单事件与较复杂事件之间的关系,对以后计算事件发生的概率十分重要.因此本小节给出事件之间的关系、相关运算的定义以及常用的性质.

设试验 T 的样本空间为 Ω,而 A,B 以及带下标的相应字母是随机事件.

包含关系:若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记为 $A\subset B$.参见图 1.1.

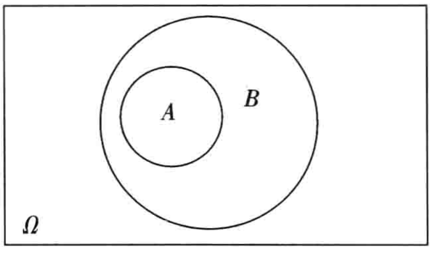


图 1.1　事件的包含关系

相等关系:若事件 A 包含事件 B,反过来,事件 B 也包含事件 A,则称事件 A 与事件 B 相等,记为$A = B$.从而,$A = B$ 当且仅当$A\subset B$ 和 $B\subset A$ 同时成立.

和事件:事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这样的事件称作事件 A 与事件 B 的和事件,记为 $A\cup B$,如图 1.2 所示.类似地可以定义 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,记为$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$.另外,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 表示可列个事件 $A_n(n \geqslant 1)$的和事件.

积事件:事件 A 与事件 B 同时发生,这样的事件称作事件 A 与事件 B 的积事件,记作 $A \cap B$ 或 AB.如图 1.3 所示.类似地可以定义 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant1)$以及可列个事件 $A_n(n\geqslant1)$的积事件,分别记为$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 与 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

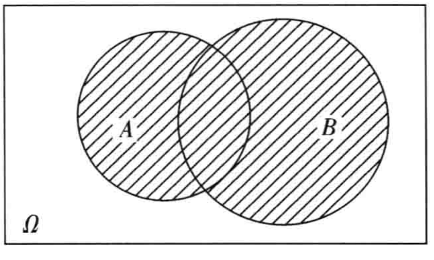


图 1.2　和事件

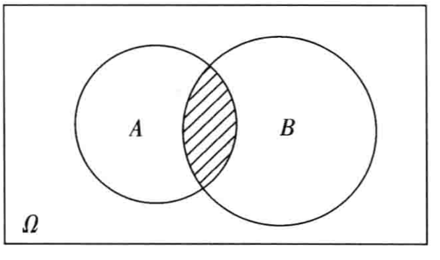
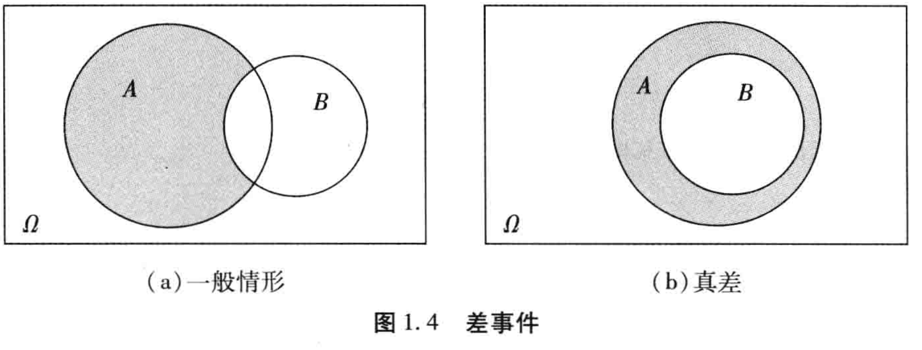


图 1.3　积事件

差事件:事件 A 发生而事件 B 不发生,这样的事件称作事件 A 与事件 B 的差事件,记为$A - B$,如图 1.4(a)、(b)所示.特别地,如果 $B\subset A$,则称 $A - B$ 为真差,如图 1.4(b)所示.



(a)一般情形　　　　(b)真差

图 1.4　差事件

互不相容事件：若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的或**互斥**的，从而互不相容事件 A 与 B 满足 $AB=\varnothing$，此时 $A\cup B$ 也记为 $A+B$，如图 1.5 所示. 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,\cdots,n)$，则称这 n 个事件两两互不相容. 类似地可以定义可列个事件两两互不相容. 特别地，基本事件是两两互不相容的.

逆事件：若在一次试验中事件 A 与事件 B 有一个发生且仅有一个发生，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，又称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**. 从而 A 与 B 为对立事件时满足 $AB=\varnothing$ 和 $A\cup B=\Omega$. A 的对立事件记为 $\overline{A}$，所以有 $\overline{A}=\Omega-A$，如图 1.6 所示. 显然，由定义可知对立事件必互不相容.

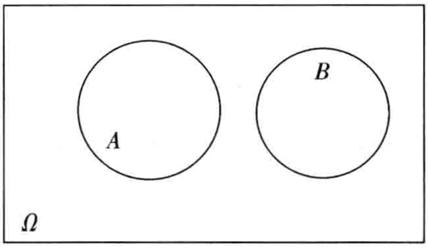


图 1.5　互不相容事件

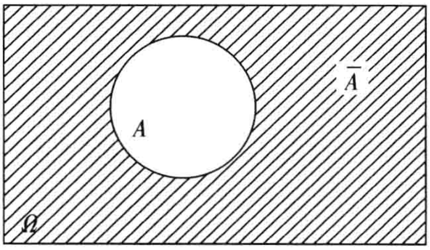


图 1.6　逆事件

因为样本空间是一个集合，事件定义为该集合的子集，所以由以上定义可见，概率论中的事件与集合论中的集合，以及它们之间的关系与运算是一致的. 为便于比较，特列表 1.1 如下.

表 1.1　概率论与集合论的关系

符号	概率论	集合论
Ω	样本空间或必然事件	空间或全集
ω	样本点	集合的元素
$\varnothing$	不可能事件	空集
$A\subset\Omega$	随机事件	子集
$\omega\in A$	事件 A 发生	ω 是 A 的元素
$A\subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	A 是 B 的子集
$A\cup B$	事件 A 与 B 的和事件	A 和 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 与 B 的积事件	A 和 B 的交集
$A-B$	事件 A 与 B 的差事件	B 相对于 A 的补集
$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 互不相容	集合 A 与 B 不相交
$AB=\varnothing,A\cup B=\Omega$	事件 A 与 B 对立	集合 A 与 B 互补

事件的运算满足常见的集合运算规律,为了方便引用,列举如下,证明从略.

定理 1.1 设 A,B,C 是随机事件,其运算满足以下基本规律:

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA$;

(2)结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A(BC)=(AB)C$;

(3)分配律:$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C),\quad A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$;

(4)对偶律(也称为 De Morgan[①] 律):$\overline{A\cup B}=\bar{A}\ \bar{B},\quad \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

在上述定理中,结合律说明在表示多个事件的和与积时,加括号是没有必要的. 例如,三个事件 A,B,C 的和事件可以记为 $A\cup B\cup C$. 另外,分配律和对偶律可以推广到任意多个事件的情形,例如

$$A\cup\bigcap_{k=1}^{n}B_k=\bigcap_{k=1}^{n}(A\cup B_k),\quad A\bigcup_{k=1}^{n}B_k=\bigcup_{k=1}^{n}(AB_k),$$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n,\quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n.$$

例 1.3 考虑例 1.1(4)中掷骰子的试验. 这里 $\Omega=\{1,\cdots,6\}$,如果令 A 表示"出现 2 点",B 表示"出现 4 点",C 表示"出现 6 点",用 D 表示"出现 2 点或 4 点";用 O 表示"出现奇数点",用 E 表示"出现偶数点",则这些事件间有以下关系:

$$E=A\cup B\cup C,\quad OE=\varnothing,\quad D\subset E,$$

$$\Omega=O\cup E,\quad D=E-C,\quad BD=B.$$

所以 O,E 互为对立事件,A,B,C 互不相容.

例 1.4 设 A,B,C 为三个事件,则

(1) A,B,C 至少有一个发生可以表示为 $A\cup B\cup C$;

(2) A,B,C 恰有一个发生可以表示为 $A\bar{B}\ \bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\ \bar{B}C$;

(3) A,B,C 不多于两个发生可以表示为 $\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$,这是因为不多于两个发生的对立事件是三个都发生:$ABC$.

1.2 频率与概率

对于一个随机事件来说,它在一次试验中可能发生,也可能不发生,而且发生的可能性大小也不同. 为了比较随机事件发生可能性的大小,我们将引进概率这一概念. 直观地

① A. De Morgan(德·摩根,1806—1871),英国数学家.

说，所谓随机事件在某一次试验中发生的概率，就是一个表示该事件发生可能性大小的实数. 然而为了理论研究与应用的方便，我们必须给出概率的明确定义，为了便于理解，首先给出频率的定义及相关性质.

一、频率

假定在相同的条件下进行了 n 次试验，而且在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 n_A（称为事件 A 发生的**频数**）. 称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$. 显然频率具有以下基本性质：

（1）非负性：对任意事件 A，有 $f_n(A) \geqslant 0$；

（2）规范性：对必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega) = 1$；

（3）有限可加性：若事件 A,B 互不相容，则有 $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$.

这三条性质可以从频率的定义出发证明，具体细节从略. 另外，由这三条性质出发，还可以得到频率的其他一些重要性质，例如：

（4）不可能事件的频率为 0，即 $f_n(\varnothing) = 0$.

（5）频率具有单调性，即若 $A \subset B$，则 $f_n(A) \leqslant f_n(B)$. 再由性质（1）已知，频率是一个介于 0 与 1 之间的数.

（6）对于任意有限个两两不相容的随机事件 $A_1, \cdots, A_k$，由性质（3）以及数学归纳法容易证明

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i).$$

该性质同样称为有限可加性.

频率刻画了随机事件在重复试验中发生的平均次数. 在少量的几次试验中，很难发现规律性，但当随机试验进行的次数很多时，就会发现频率稳定在某一值附近. 这种与随机试验相关的某平均特征在少数试验中具有随机性，但在大量重复试验中表现出来的稳定性，称为**统计规律性**. 下面给出两个具体的例子.

历史上有很多统计学家通过抛硬币的试验研究了频率的稳定性，以下是一些试验数据. 见表 1.2.