全国理科高等数学研究会推荐
高等数学同步辅导及考研复习用书

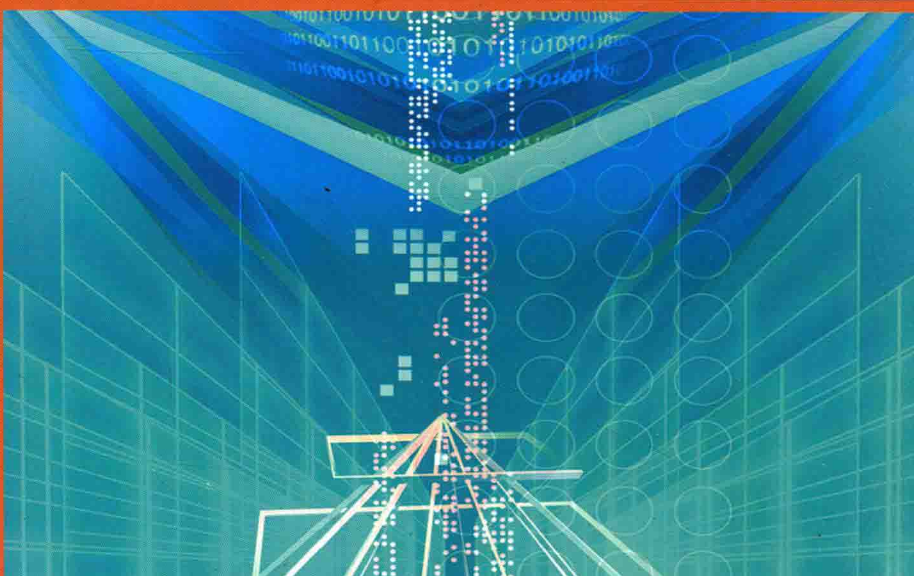
Б. П. 吉米多维奇

高等数学习题精选精解

（专科版）

主编 张天德 崔玉泉 林 慧
主审 刘建亚 吴 臻

GAODENGSHUXUE XITI JINGXUAN JINGJIE



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

全国理科高等数学研究会推荐
高等数学同步辅导及考研复习用书

Б.П.吉米多维奇

高等数学习题精选精解

（专科版）

主编　张天德　崔玉泉　林　慧
主审　刘建亚　吴　臻

GAODENGSHUXUE XITI JINGXUAN JINGJIE

副主编　尹树国　娄万东　王　刚
编委会　尹树国　娄万东　王　刚
高　宏　孔凡清　吴维峰
赵永贞　初东丽　王金平
丁　冰　臧新建　王世敏
杜继明　施俊英　于凤卫
张明成　王　岳　李　娜
姜静霞　吕　娜　王云霞
顾鑫盈

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题精选精解:专科版/张天德,崔玉泉,林慧主编.—济南:山东科学技术出版社,2014
ISBN 978-7-5331-7269-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张…②崔…③林… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—题解Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 032084 号

高等数学习题精选精解(专科版)

主编 张天德 崔玉泉 林 慧
主审 刘建亚 吴 臻

出版者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002 电话:(0531) 82098088
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn
发行者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002 电话:(0531) 82098071
印刷者:山东临沂新华印刷物流集团公司
地址:临沂市高新开发区
邮编:276017 电话:(0539) 2925638

开本:720mm×1020mm 1/16
印张:16.5
版次:2014 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-7269-5
定价:28.00 元

前言
QIANYAN

高等数学是理工类专业一门重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的重点科目。为了帮助读者学好高等数学，我们于2007年编写了《高等数学习题精选精解》(本科版)。该书出版7年来重印14次，书中的解题思路和方法都非常经典且很容易被读者接受，因此被很多同学亲切称为“高数宝典”。

为适应专科层次读者的需要，使读者在一定的时间内达到较好的学习效果，我们在《高等数学习题精选精解》(本科版)的基础上精选了难度适中且有代表性的符合专科层次的习题，书后增添了答案章节，在对全部习题做出科学、规范解答的同时进行点评，指出解题的思路和方法，为读者的分析能力和发散思维的提高提供帮助。

本书共十一章，每章又分成若干节，在章节设置上与高等数学教学大纲基本一致，涉及的内容涵盖了高等数学的全部主题。本书包括四大部分内容：

知识要点：简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统梳理。

基本题型：对每节常见的基本题型进行归纳总结，便于读者理解和掌握基本知识，有利于提高读者的解题能力和数学思维水平。

综合提高：每章最后一节是综合提高题型，这一节的题目综合性较强，难度较大，通过本节的学习，可以提高读者的应变能力、思维能力和分析、解决问题的能力，把握重点、开拓视野。

习题详解：本书后附有全部基本题型和综合提高题型的详尽答案，为读者提供学习的参考。

高等数学的学习没有捷径可走，初学者可以由浅入深地学习：对于一个题目，最好不要先去看答案，先试着自己去做，实在做不出再看提示和解答。看解答过程中，要理清解题思路，掌握基本解题

方法和技巧，然后对于同一个题目反复做几次，并举一反三，应用到同类题目中。

由于编者水平有限，不足之处敬请读者批评指正，以便不断完善。

编　者

2014 年 3 月

目 录

MULU

目录
MULU

目 录
MULU

目录
MULU

习题详解

目 录
MULU

第一章　极限与连续

§1. 函　　数

1. 函数的概念　设有两个变量 x 与 y,如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定的数值时,变量 y 按照一定的规则 f 总有唯一确定的数值和它对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记为 $y=f(x)$. x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域,f 表示由 x 确定 y 的对应规则.

2. 函数的主要性质

(1)有界性　设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在一个正常数 M,使得对于 x 在 D 上的任意取值,均有 $|f(x)|<M$,则称函数 $f(x)$在 D 上有界,否则称 $f(x)$在 D 上无界.

(2)单调性　设函数 $f(x)$在某区间 D 上有定义,如果对于 D 上任意两点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,均有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在 D 上单调增加(或单调减少).单调增加与单调减少函数统称为单调函数.

(3)奇偶性　设函数 $f(x)$在关于原点对称的区间 D 上有定义,如果对 D 上任意点 x,均有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称函数 $f(x)$为偶函数(或奇函数).

(4)周期性　设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义 ,如果存在正常数 T ,使得对于 D 上任意 x ,均有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,使上式成立的最小正数为周期函数的周期.

3. 基本初等函数与初等函数　常数函数 $y=c$(c 为常数),幂函数 $y=x^\alpha(\alpha\in R)$,指数函数 $y=a^x(a\neq1,a>0)$,对数函数 $y=\log_a x(a\neq1,a>0)$,三角函数和反三角函数称为基本初等函数.由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合,并由一个式子表示的函数称为初等函数.

基 本 题 型

求一元函数的定义域

【1】函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\arcsin\dfrac{x-1}{5}$的定义域为________.

【2】函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$的定义域为________.

(A)$x\in\boldsymbol{R}$,但 $x\neq0$　　(B)$x\in\boldsymbol{R}$,但 $1+\dfrac{1}{x}\neq0$

(C)$x\in\boldsymbol{R}$,但 $x\neq0,-1,-\dfrac{1}{2}$　　(D)$x\in\boldsymbol{R}$,但 $x\neq0,-1$

【3】已知 $f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)$的定义域为________.

【4】已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant0$,则 $\varphi(x)=$________,定义域为________.

【5】已知函数 $f(\log_a x)=\sqrt{x}$,则 $f(x)=$________,其定义域为________,其中 $a\neq1$,且 $a>0$.

【6】设 $f(x)=\tan x$，$f[g(x)]=x^2-2$，且 $|g(x)|\leqslant\frac{\pi}{4}$，则 $g(x)$ 的定义域为________.

求初等函数的表达式

【7】已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}$，求 $f(x)$.

【8】设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

求分段函数的表达式

【9】设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$，则 $f(-x)=$________.

(A) $f(-x)=\begin{cases}-e^{-x}, & x\leqslant 0\\ -\cos x, & x>0\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}-\cos x, & x<0\\ e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ e^{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$

【10】设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$________

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

判断函数的奇偶性

【11】下列函数中非奇非偶的函数是________.

(A) $f(x)=3^x-3^{-x}$　　(B) $f(x)=x(1-x)$

(C) $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$　　(D) $f(x)=x^2\cos x$

【12】设 $f(x)$ 为奇函数，判断下列函数的奇偶性：

(1) $xf(x)$　　(2) $(x^2+1)f(x)$　　(3) $|f(x)|$

(4) $-f(-x)$　　(5) $f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$

【13】判定函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

【14】设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们可以构成复合函数

$$f[f(x)],g[f(x)],f[g(x)],g[g(x)],$$

则其中为奇函数的是________.

(A) $f[f(x)]$　　(B) $g[f(x)]$　　(C) $f[g(x)]$　　(D) $g[g(x)]$

讨论函数的单调性

【15】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)(x\neq y)$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$，证明 $F(x)=f(x)+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

【16】设 $f(x),g(x),h(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增加函数，且 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，证明 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$.

一元函数周期性的讨论

【17】设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $c\neq 0$，使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期

函数.

讨论一元函数的值域

【18】函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 的值域是________.

(A)$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$　　(B)$[0,1]$　　(C)$[-1,0]$　　(D)$[-1,1]$

【19】函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是________.

(A)$[-1,1]$　　(B)$\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　(C)$[0,1]$　　(D)$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

§2. 数列的极限

1. 数列　一个定义在正整数集合上的函数 $a_n=f(n)$（称为整标函数），当自变量 n 按正整数 $1,2,3,\cdots$ 依次增大的顺序取值时，函数按相应的顺序排成一串数：

$$f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots$$

称为一个无穷数列，简称数列.数列中的每一个数称为数列的项，$f(n)$ 称为数列的一般项或通项.

2. 数列极限的定义

(1)设 $\{a_n\}$ 是一数列，如果存在常数 a，当 n 无限增大时，a_n 无限接近（或趋近）于 a，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛，a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，或 $n\to\infty$，$a_n\to a$. 当 $n\to\infty$ 时，若不存在这样的常数 a，则称数列 $\{a_n\}$ 发散或不收敛，也可以说极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

(2)设 $\{a_n\}$ 为一个数列，a 为一个常数.若对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在一个正整数 N，使得 $n>N$ 的一切 a_n 都满足不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$，则称 a 为数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

3. 数列极限的性质

唯一性：收敛数列的极限是唯一的.

即若数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$，则 $a=b$.

有界性：假设数列 $\{a_n\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 必有界，即存在常数 $M>0$，使得 $|a_n|<M$（任意 $n\in N$）.这个性质中的 M 显然不是唯一的，重要的是它的存在性.

保号性：假设数列 $\{a_n\}$ 收敛，其极限为 a.

(1)若有正整数 N，使得当 $n>N$ 时 $a_n>0$（或 <0），则 $a\geqslant0$（或 $\leqslant0$）.

(2)若 $a>0$（或 <0），则有正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$a_n>0$（或 <0）.

基本题型

有关数列极限存在性的判定

【20】设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有________.

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n c_n$ 不存在　　(D)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n c_n$ 不存在

证明数列没有极限

【21】 证明:数列 $x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{n+1}{n}$ 是发散的.

§3. 函数的极限

1. 函数极限的定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内(点 x_0 可除外)有定义,A 为一个常数.若对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在一个正数 δ,使得满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

2. 左极限和右极限的定义　若对于满足 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 自 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的极限,即左(右)极限,分别记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)=A\quad(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)=A)$$

类似地,可以给出当 $x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 时,$f(x)$ 的极限为 A 的定义.

3. 极限的性质

(1)唯一性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 A 必唯一.

(2)有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域(x_0 除外)内是有界的.

(3)保号性　设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域(x_0 除外)内均有 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$),且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

4. 充要条件　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

基本题型

讨论函数极限的存在性

【22】 设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ________.

(A)存在且等于零　(B)存在但不一定为零　(C)一定不存在　(D)不一定存在

【23】 设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant1\\ x-2, & |x|>1\end{cases}$. 试讨论 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$.

【24】 求函数

$$f(x)=\frac{|x|}{x},g(x)=\frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}\quad(a>1)$$

当 $x\to0$ 时的左、右极限,并说明 $x\to0$ 时极限是否存在.

§4. 无穷小与无穷大

1. 无穷小与无穷大的定义

(1)无穷小的定义　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$,则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷小.

(2)无穷大的定义　若对任意给定的 $M>0$,都存在一个正数 $\delta(N)$,使得满足 $0<|x-x_0|<\delta(|x|>N)$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷大,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$$

2. 无穷小与无穷大的关系(以下所讨论的极限,都是在自变量同一变化过程中的极限)

若 $\lim f(x)=0\quad(f(x)\neq 0)$, 则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$;

若 $\lim f(x)=\infty$, 则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$.

基本题型

有关无穷小与无穷大的定义

【25】 当 $x\to 0$ 时,变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是________.

(A)无穷小　　(B)无穷大

(C)有界的,但不是无穷小量　　(D)无界的,但不是无穷大

【26】 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是________.

(A)若 x_n 发散,则 y_n 必发散　　(B)若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C)若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小　　(D)若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

§5. 极限运算法则

1. 运算法则　设 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 均存在,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$
$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(\lim g(x)\neq 0)$$

2. 无穷小运算法则

(1)有限多个无穷小之和仍是无穷小;

(2)有限多个无穷小之积仍是无穷小;

(3)有界变量与无穷小之积仍为无穷小.

所谓变量 u 有界是指:存在常数 $M>0$,u 在其变化过程中总有 $|u|<M$.

3. 无穷小与函数极限之间的关系 在一个极限过程中,函数 $f(x)$ 的极限为 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 为这个极限过程中的无穷小量(即 $\lim\alpha=0$).

利用极限存在的充要条件求极限

【27】 当 $x\to1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限________.

(A)等于 2　　(B)等于 0　　(C)为 ∞　　(D)不存在但不为 ∞

【28】 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ 1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

利用分子或分母有理化求极限

【29】 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=$________.

【30】 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$________.

【31】 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【32】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$________.

【33】 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

先求和,再求极限

【34】 设 $x_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【35】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2})=$________.

【36】 设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$________.

先求积,再求极限

【37】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}),(|x|<1)$.

§6. 极限存在准则　两个重要极限

1. 两个准则

准则Ⅰ(夹逼准则)　如果数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$, $n=1,2,\cdots$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅰ′　设函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 有定义,且满足下列条件:

(1)当 $x\in\{x|\ 0<|x-x_0|<h\}$(或 $|x|>M$)时,有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 成立;