

全国理科高等数学研究会推荐
高等数学同步辅导及考研复习用书

Б.П.吉米多维奇

高等数学习题 精选精解 (专科版)

主编 张天德 崔玉泉 林慧
主审 刘建亚 吴臻

GAODENGSHUXUE XITI JINGXUAN JINGJIE



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

全国理科高等数学研究会推荐
高等数学同步辅导及考研复习用书

Б.П.吉米多维奇

高等数学习题 精选精解

(专科版)

主编 张天德 崔玉泉 林 慧
主审 刘建亚 吴 臻

GAODENGSHUXUE XITI JINGXUAN JINGJIE

副主编 尹树国 娄万东 王 刚
编委会 尹树国 娄万东 王 刚
高 宏 孔凡清 吴维峰
赵永贞 初东丽 王金平
丁 冰 臧新建 王世敏
杜继明 施俊英 于凤卫
张明成 王 岳 李 娜
姜静霞 吕 娜 王云霞
顾鑫盈

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题精选精解:专科版/张天德,崔玉泉,
林慧主编.—济南:山东科学技术出版社,2014
ISBN 978-7-5331-7269-5

I. ①高… II. ①张…②崔…③林… III. ①高等数
学—高等职业教育—题解 IV. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 032084 号

高等数学习题精选精解(专科版)

主编 张天德 崔玉泉 林 慧

主审 刘建亚 吴 臻

出版者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路 16 号

邮编: 250002 电话: (0531) 82098088

网址: www.lkj.com.cn

电子邮件: sdkj@sdpress.com.cn

发行者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路 16 号

邮编: 250002 电话: (0531) 82098071

印刷者: 山东临沂新华印刷物流集团公司

地址: 临沂市高新开发区

邮编: 276017 电话: (0539) 2925638

开本: 720mm×1020mm 1/16

印张: 16.5

版次: 2014 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-7269-5

定价: 28.00 元



前言

QIANYAN

高等数学是理工类专业一门重要的基础课,也是硕士研究生入学考试的重点科目。为了帮助读者学好高等数学,我们于2007年编写了《高等数学习题精选精解》(本科版)。该书出版7年来重印14次,书中的解题思路和方法都非常经典且很容易被读者接受,因此被很多同学亲切称为“高数宝典”。

为适应专科层次读者的需要,使读者在一定的时间内达到较好的学习效果,我们在《高等数学习题精选精解》(本科版)的基础上精选了难度适中且有代表性的符合专科层次的习题,书后增添了答案章节,在对全部习题做出科学、规范解答的同时进行点评,指出解题的思路和方法,为读者的分析能力和发散思维的提高提供帮助。

本书共十一章,每章又分成若干节,在章节设置上与高等数学教学大纲基本一致,涉及的内容涵盖了高等数学的全部主题。本书包括四大部分内容:

知识要点:简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统梳理。

基本题型:对每节常见的基本题型进行归纳总结,便于读者理解和掌握基本知识,有利于提高读者的解题能力和数学思维水平。

综合提高:每章最后一节是综合提高题型,这一节的题目综合性较强,难度较大,通过本节的学习,可以提高读者的应变能力、思维能力和分析、解决问题的能力,把握重点、开拓视野。

习题详解:本书后附有全部基本题型和综合提高题型的详尽答案,为读者提供学习的参考。

高等数学的学习没有捷径可走,初学者可以由浅入深地学习:对于一个题目,最好不要先去看答案,先试着自己去做,实在做不出再看提示和解答。看解答过程中,要理清解题思路,掌握基本解題

前言

QIANYAN

方法和技巧,然后对于同一个题目反复做几次,并举一反三,应用到同类题目中。

由于编者水平有限,不足之处敬请读者批评指正,以便不断完善。

编者

2014年3月

目 录

MULU

第一章 极限与连续	(1)
§ 1. 函数	(1)
§ 2. 数列的极限	(3)
§ 3. 函数的极限	(4)
§ 4. 无穷小与无穷大	(5)
§ 5. 极限运算法则	(5)
§ 6. 极限存在准则 两个重要极限	(6)
§ 7. 无穷小的比较	(8)
§ 8. 连续函数的运算与初等函数的连续性	(9)
§ 9. 闭区间上连续函数的性质	(10)
§ 10. 综合提高题型	(11)
第二章 导数与微分	(12)
§ 1. 导数的概念	(12)
§ 2. 导数的基本公式与运算法则	(15)
§ 3. 高阶导数 隐函数及参数方程求导	(17)
§ 4. 微分	(19)
§ 5. 综合提高题型	(20)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(21)
§ 1. 微分中值定理	(21)
§ 2. 洛必达法则	(23)
§ 3. 泰勒公式	(24)
§ 4. 函数的单调性与曲线的凹凸性	(25)
§ 5. 函数的极值与最大值、最小值	(28)
§ 6. 函数图形的描绘	(30)
§ 7. 曲率	(31)
§ 8. 综合提高题型	(31)

第四章	不定积分	(32)
§ 1.	不定积分的概念与性质	(32)
§ 2.	换元积分法	(34)
§ 3.	分部积分法	(36)
§ 4.	有理函数的积分	(37)
§ 5.	综合提高题型	(38)
第五章	定积分	(39)
§ 1.	定积分的概念与性质	(39)
§ 2.	微积分基本公式	(42)
§ 3.	定积分的换元法和分部积分法	(43)
§ 4.	广义积分	(46)
§ 5.	综合提高题型	(47)
第六章	定积分的应用	(49)
§ 1.	定积分在几何上的应用	(49)
§ 2.	定积分在物理学上的应用	(51)
第七章	向量代数与空间解析几何	(53)
§ 1.	向量及其运算	(53)
§ 2.	空间的平面和直线	(55)
§ 3.	空间曲面与空间曲线	(58)
第八章	多元函数微分法及其应用	(59)
§ 1.	多元函数的基本概念	(59)
§ 2.	偏导数	(61)
§ 3.	全微分	(63)
§ 4.	多元复合函数的求导法则	(64)
§ 5.	隐函数的求导法则	(65)
§ 6.	多元函数微分学的几何应用	(65)



目 录

MULU

§ 7. 多元函数的极值及其求法	(67)
§ 8. 综合提高题型	(68)
第九章 二重积分	(69)
§ 1. 二重积分	(69)
§ 2. 重积分的应用	(73)
§ 4. 综合提高题型	(74)
第十章 无穷级数	(74)
§ 1. 常数项级数的概念和性质	(74)
§ 2. 正项级数的审敛法	(76)
§ 3. 任意项级数的审敛法	(78)
§ 4. 幂级数	(80)
§ 5. 函数展开成幂级数	(83)
§ 6. 综合提高题型	(84)
第十一章 常微分方程	(85)
§ 1. 微分方程的基本概念	(85)
§ 2. 可分离变量的微分方程	(86)
§ 3. 齐次微分方程	(87)
§ 4. 一阶线性微分方程	(87)
§ 5. 可降阶的高阶微分方程	(89)
§ 6. 高阶线性微分方程解的结构	(90)
§ 7. 常系数齐次线性微分方程	(91)
§ 8. 常系数非齐次线性微分方程	(92)
§ 9. 综合提高题型	(93)

习 题 详 解

第一章 极限与连续	(96)
§ 1. 函数	(96)
§ 2. 数列的极限	(98)
§ 3. 函数的极限	(99)
§ 4. 无穷小与无穷大	(100)
§ 5. 极限运算法则	(100)
§ 6. 极限存在准则 两个重要极限	(102)
§ 7. 无穷小的比较	(104)
§ 8. 连续函数的运算与初等函数的连续性	(105)
§ 9. 闭区间上连续函数的性质	(107)
§ 10. 综合提高题型	(107)
第二章 导数与微分	(111)
§ 1. 导数的概念	(111)
§ 2. 导数的基本公式与运算法则	(116)
§ 3. 高阶导数 隐函数及参数方程求导	(119)
§ 4. 微分	(122)
§ 5. 综合提高题型	(122)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(126)
§ 1. 微分中值定理	(126)
§ 2. 洛必达法则	(129)
§ 3. 泰勒公式	(132)
§ 4. 函数的单调性与曲线的凹凸性	(133)
§ 5. 函数的极值与最大值、最小值	(137)
§ 6. 函数图形的描绘	(139)



目 录

MULU

§ 7. 曲率	(141)
§ 8. 综合提高题型	(141)
第四章 不定积分	(143)
§ 1. 不定积分的概念与性质	(143)
§ 2. 换元积分法	(145)
§ 3. 分部积分法	(149)
§ 4. 有理函数的积分	(152)
§ 5. 综合提高题型	(155)
第五章 定积分	(158)
§ 1. 定积分的概念与性质	(158)
§ 2. 微积分基本公式	(162)
§ 3. 定积分的换元法和分部积分法	(165)
§ 4. 广义积分	(169)
§ 5. 综合提高题型	(171)
第六章 定积分的应用	(176)
§ 1. 定积分在几何上的应用	(176)
§ 2. 定积分在物理学上的应用	(183)
第七章 向量代数与空间解析几何	(185)
§ 1. 向量及其运算	(185)
§ 2. 空间的平面和直线	(188)
§ 3. 空间曲面与空间曲线	(192)
第八章 多元函数微分法及其应用	(194)
§ 1. 多元函数的基本概念	(194)
§ 2. 偏导数	(196)
§ 3. 全微分	(200)
§ 4. 多元复合函数的求导法则	(201)

§ 5.	隐函数的求导法则	(202)
§ 6.	多元函数微分学的几何应用	(204)
§ 7.	多元函数的极值及其求法	(205)
§ 8.	综合提高题型	(207)
第九章	二重积分	(209)
§ 1.	二重积分	(209)
§ 2.	重积分的应用	(214)
§ 4.	综合提高题型	(215)
第十章	无穷级数	(218)
§ 1.	常数项级数的概念和性质	218
§ 2.	正项级数的审敛法	(222)
§ 3.	任意项级数的审敛法	(225)
§ 4.	幂级数	(227)
§ 5.	函数展开成幂级数	(231)
§ 6.	综合提高题型	(232)
第十一章	常微分方程	(235)
§ 1.	微分方程的基本概念	(235)
§ 2.	可分离变量的微分方程	(236)
§ 3.	齐次微分方程	(237)
§ 4.	一阶线性微分方程	(239)
§ 5.	可降阶的高阶微分方程	(242)
§ 6.	高阶线性微分方程解的结构	(245)
§ 7.	常系数齐次线性微分方程	(246)
§ 8.	常系数非齐次线性微分方程	(247)
§ 9.	综合提高题型	(250)

第一章 极限与连续

§ 1. 函 数

1. 函数的概念 设有两个变量 x 与 y , 如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定的数值时, 变量 y 按照一定的规则 f 总有唯一确定的数值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为 $y=f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数的定义域, f 表示由 x 确定 y 的对应规则.

2. 函数的主要性质

(1) 有界性 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在一个正常数 M , 使得对于 x 在 D 上的任意取值, 均有 $|f(x)| < M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

(2) 单调性 设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义, 如果对于 D 上任意两点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加 (或单调减少). 单调增加与单调减少函数统称为单调函数.

(3) 奇偶性 设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义, 如果对 D 上任意点 x , 均有 $f(-x) = f(x)$ (或 $f(-x) = -f(x)$), 则称函数 $f(x)$ 为偶函数 (或奇函数).

(4) 周期性 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在正常数 T , 使得对于 D 上任意 x , 均有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 使上式成立的最小正数为周期函数的周期.

3. 基本初等函数与初等函数 常数函数 $y=c$ (c 为常数), 幂函数 $y=x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$), 指数函数 $y=a^x$ ($a \neq 1, a > 0$), 对数函数 $y=\log_a x$ ($a \neq 1, a > 0$), 三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合, 并由一个式子表示的函数称为初等函数.

基本题型

求一元函数的定义域

【1】 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \arcsin \frac{x-1}{5}$ 的定义域为 _____.

【2】 函数 $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$ 的定义域为 _____.

(A) $x \in \mathbf{R}$, 但 $x \neq 0$ (B) $x \in \mathbf{R}$, 但 $1 + \frac{1}{x} \neq 0$

(C) $x \in \mathbf{R}$, 但 $x \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$ (D) $x \in \mathbf{R}$, 但 $x \neq 0, -1$

【3】 已知 $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x)$ 的定义域为 _____.

【4】 已知 $f(x) = e^{x^2}, f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 则 $\varphi(x) =$ _____, 定义域为 _____.

【5】 已知函数 $f(\log_a x) = \sqrt{x}$, 则 $f(x) =$ _____, 其定义域为 _____, 其中 $a \neq 1$, 且 $a > 0$.



【6】设 $f(x) = \tan x$, $f[g(x)] = x^2 - 2$, 且 $|g(x)| \leq \frac{\pi}{4}$, 则 $g(x)$ 的定义域为_____.

求初等函数的表达式

【7】已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$, 求 $f(x)$.

【8】设 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8 = (2x-1)^8$, 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7$.

求分段函数的表达式

【9】设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(-x) =$ _____.

(A) $f(-x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x \leq 0 \\ -\cos x, & x > 0 \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} -\cos x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ (D) $f(-x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

【10】设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)] =$ _____

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

判断函数的奇偶性

【11】下列函数中非奇非偶的函数是_____.

(A) $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ (B) $f(x) = x(1-x)$

(C) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ (D) $f(x) = x^2 \cos x$

【12】设 $f(x)$ 为奇函数, 判断下列函数的奇偶性:

(1) $x f(x)$ (2) $(x^2+1)f(x)$ (3) $|f(x)|$

(4) $-f(-x)$ (5) $f(x)\left(\frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}\right)$

【13】判定函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

【14】设 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 且它们可以构成复合函数

$$f[f(x)], g[f(x)], f[g(x)], g[g(x)],$$

则其中为奇函数的是_____.

(A) $f[f(x)]$ (B) $g[f(x)]$ (C) $f[g(x)]$ (D) $g[g(x)]$

讨论函数的单调性

【15】设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且对任意 $x, y \in (-\infty, +\infty) (x \neq y)$ 有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, 证明 $F(x) = f(x) + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

【16】设 $f(x), g(x), h(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增加函数, 且 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, 证明 $f[f(x)] \leq g[g(x)] \leq h[h(x)]$.

一元函数周期性的讨论

【17】设对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$, 存在常数 $c \neq 0$, 使 $f(x+c) = -f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期



函数.

讨论一元函数的值域

【18】函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 的值域是_____.

- (A) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (B) $[0, 1]$ (C) $[-1, 0]$ (D) $[-1, 1]$

【19】函数 $y = \sin \frac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是_____.

- (A) $[-1, 1]$ (B) $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ (C) $[0, 1]$ (D) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

§2. 数列的极限

1. 数列 一个定义在正整数集合上的函数 $a_n = f(n)$ (称为整标函数), 当自变量 n 按正整数 $1, 2, 3, \dots$ 依次增大的顺序取值时, 函数按相应的顺序排成一串数:

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

称为一个无穷数列, 简称数列. 数列中的每一个数称为数列的项, $f(n)$ 称为数列的一般项或通项.

2. 数列极限的定义

(1) 设 $\{a_n\}$ 是一数列, 如果存在常数 a , 当 n 无限增大时, a_n 无限接近 (或趋近) 于 a , 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛, a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 或 $n \rightarrow \infty, a_n \rightarrow a$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若不存在这样的常数 a , 则称数列 $\{a_n\}$ 发散或不收敛, 也可以说极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在.

(2) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, a 为一个常数. 若对任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在一个正整数 N , 使得 $n > N$ 的一切 a_n 都满足不等式 $|a_n - a| < \epsilon$, 则称 a 为数列 $\{a_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

3. 数列极限的性质

唯一性: 收敛数列的极限是唯一的.

即若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, 则 $a = b$.

有界性: 假设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则数列 $\{a_n\}$ 必有界, 即存在常数 $M > 0$, 使得 $|a_n| < M$ (任意 $n \in N$). 这个性质中的 M 显然不是唯一的, 重要的是它的存在性.

保号性: 假设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 其极限为 a .

(1) 若有正整数 N , 使得当 $n > N$ 时 $a_n > 0$ (或 < 0), 则 $a \geq 0$ (或 ≤ 0).

(2) 若 $a > 0$ (或 < 0), 则有正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $a_n > 0$ (或 < 0).

基本题型

有关数列极限存在性的判定

【20】设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, c_n$ 不存在(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n, c_n$ 不存在

证明数列没有极限

【21】证明: 数列 $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ 是发散的.

§ 3. 函数的极限

1. 函数极限的定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内(点 x_0 可除外)有定义, A 为一个常数. 若对任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在一个正数 δ , 使得满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

2. 左极限和右极限的定义 若对于满足 $0 < x_0 - x < \delta$ ($0 < x - x_0 < \delta$) 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 自 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的极限, 即左(右)极限, 分别记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = A \quad (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = A)$$

类似地, 可以给出当 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x)$ 的极限为 A 的定义.

3. 极限的性质

(1) 唯一性 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 A 必唯一.(2) 有界性 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域(x_0 除外)内是有界的.(3) 保号性 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域(x_0 除外)内均有 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).4. 充要条件 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

基本题型

讨论函数极限的存在性

【22】设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且等于零 (B) 存在但不一定为零 (C) 一定不存在 (D) 不一定存在

【23】设 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ x-2, & |x| > 1 \end{cases}$. 试讨论 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

【24】求函数

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, g(x) = \frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}} \quad (a > 1)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明 $x \rightarrow 0$ 时极限是否存在.



§ 4. 无穷小与无穷大

1. 无穷小与无穷大的定义

(1) 无穷小的定义 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时为无穷小.

(2) 无穷大的定义 若对任意给定的 $M > 0$, 都存在一个正数 $\delta(N)$, 使得满足 $0 < |x - x_0| < \delta (|x| > N)$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时为无穷大, 记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty$$

2. 无穷小与无穷大的关系(以下所讨论的极限, 都是在自变量同一变化过程中的极限)

若 $\lim f(x) = 0 (f(x) \neq 0)$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = \infty$;

若 $\lim f(x) = \infty$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = 0$.

基本题型

有关无穷小与无穷大的定义

【25】当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是_____.

(A) 无穷小

(B) 无穷大

(C) 有界的, 但不是无穷小量

(D) 无界的, 但不是无穷大

【26】设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是_____.

(A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

§ 5. 极限运算法则

1. 运算法则 设 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 均存在, 则

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (\lim g(x) \neq 0)$$

2. 无穷小运算法则

(1) 有限多个无穷小之和仍是无穷小;

(2) 有限多个无穷小之积仍是无穷小;

(3) 有界变量与无穷小之积仍为无穷小.

所谓变量 u 有界是指: 存在常数 $M > 0$, u 在其变化过程中总有 $|u| < M$.



3. 无穷小与函数极限之间的关系 在一个极限过程中, 函数 $f(x)$ 的极限为 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为这个极限过程中的无穷小量 (即 $\lim \alpha = 0$).

利用极限存在的充要条件求极限

【27】当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限_____.

(A) 等于 2 (B) 等于 0 (C) 为 ∞ (D) 不存在但不为 ∞

【28】设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1 + x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

利用分子或分母有理化求极限

【29】 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}] =$ _____.

【30】极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) =$ _____.

【31】 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【32】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2+x-2} =$ _____.

【33】 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

先求和, 再求极限

【34】设 $x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【35】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \cdots + \frac{1}{9n^2-3n-2}) =$ _____.

【36】设函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln [f(1)f(2)\cdots f(n)] =$ _____.

先求积, 再求极限

【37】求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}), (|x| < 1)$.

§ 6. 极限存在准则 两个重要极限

1. 两个准则

准则 I (夹逼准则) 如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件

(1) $y_n \leq x_n \leq z_n, n=1, 2, \cdots$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$,

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

准则 I' 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 有定义, 且满足下列条件:

(1) 当 $x \in \{x \mid 0 < |x-x_0| < h\}$ (或 $|x| > M$) 时, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 成立;